Übung zur Vorlesung Ökonometrie
Masterstudiengang
Sommersemester 2025

Aufgabenblatt 4

1. Nehmen Sie an, das wahre Modell sei $\mathbf{y} = X_1\beta + \mathbf{x}_2\gamma + \mathbf{u}$ mit X_1 einer $(k \times n)$ - Regressormatrix mit k Variablen und $\mathbf{x}_2$ einem $(n \times 1)$ - Vektor mit einer weiteren Variablen; β ist ein $(k \times 1)$ - Parametervektor und γ ist ein skalarer Parameter, während $\mathbf{u}$ wie üblich der Störvektor ist, für den $E(\mathbf{u}|X_1, \mathbf{x}_2) = 0$ gilt. Weil Sie für $\mathbf{x}_2$ keine Daten gefunden haben, schätzen Sie das Modell $\mathbf{y} = X_1\widetilde{\beta} + \mathbf{e}$, wobei $\widetilde{\beta}$ den Parametervektor und $\mathbf{e}$ den Störvektor bezeichnen. Sie ermitteln den OLS-Schätzer für $\widetilde{\beta}$ aus diesem Ansatz, den wir hier $\widehat{\widetilde{\beta}}$ nennen.

   (a) Ermitteln Sie $E\left(\widehat{\widetilde{\beta}}|X_1, \mathbf{x}_2\right)$.

   (b) Beschreiben Sie Ihr Resultat in Worten.

   (c) Sind die Elemente des geschätzten Parametervektors $\widehat{\widetilde{\beta}}$ verzerrte Schätzer der Elemente des wahren Parametervektors β? Wenn ja, in welche Richtung geht die Verzerrung (Über- oder Unterschätzung des wahren Parameterwertes)?

2. Sie wollen ein Regressionsmodell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ schätzen, in dem die abhängige Variable y_i und die Regressorvariable x_i sehr unterschiedliche Stichprobenmittelwerte $\overline{y}$ bzw. $\overline{x}$ haben. Sie überlegen deshalb, ob Sie die Regression lieber mit mittelwertbereinigten Daten schätzen sollten, d.h. statt einer Regression von y_i auf x_i eine Regression von $y_i - \overline{y}$ auf $x_i - \overline{x}$ schätzen sollten. Welcher Unterschied wird zwischen den Ergebnissen beider Spezifikationen resultieren? Warum?

3. Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob Sie sie für richtig, falsch oder bei gegebener Information unentscheidbar halten. Wenn Sie eine Aussage für falsch oder unentscheidbar halten, besteht die korrekte Aufgabenlösung in einer kurzen Begründung, worin der von Ihnen entdeckte Fehler besteht oder welche Information zur Entscheidung fehlt.

   (a) In einem Regressionsmodell mit normalverteiltem Fehlerterm ist die t - Statistik asymptotisch normalverteilt.

   (b) In einem Regressionsmodell mit nicht normalverteiltem Fehlerterm ist die t - Statistik asymptotisch normalverteilt.

   (c) Wenn für das Modell $y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} + u_i$ gilt, dass $Cov(u_i, x_{ij}) = 0$ für alle j ist, konvergieren für $n \to \infty$ die OLS - Schätzungen $\widehat{\beta}_j$ in Wahrscheinlichkeit gegen die β_j.

   (d) Wenn die Nullhypothese des Breusch-Pagan - Tests abgelehnt wird, sollten heteroskedastizitätsrobuste Standardfehler anstelle der OLS -Standardfehler für Hypothesentests verwendet werden.

   (e) Wenn die Nullhypothese des Breusch-Godfrey - Tests nicht abgelehnt wird, liegt Evidenz für autokorrelierte Störterme vor.

(f) Wenn die Korrelation zwischen zwei Regressoren größer als null ist, existiert der OLS - Schätzer wegen des Problems der Multikollinearität nicht.

(g) Wenn der p - Wert eines Tests größer als das gewählte Signifikanzniveau ist, wird die Nullhypothese abgelehnt.

(h) Wenn β_j ein Regressionsparameter ist und der p - Wert zum Test von $H_0 : \beta_j = \gamma$ gegen $H_1 : \beta_j \neq \gamma$ größer als das gewählte Signifikanzniveau α ist, liegt γ im $1 - \alpha$ - Konfidenzintervall um den Schätzwert von β_j.

(i) Wenn das Regressionsmodell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ mit OLS geschätzt wird und die Daten für y_i und x_i beide einen Stichprobenmittelwert von null haben, ist der Schätzwert für β_0 exakt null.

4. Sie unterstellen, dass in Ihrem Regressionsmodell $\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}$ multiplikative Heteroskedastizität in der Art vorliegt, dass die Fehlervarianz von der Variable $\mathbf{z}$ abhängt gemäß $\sigma_i^2 = \sigma^2 \exp(\delta_0 + \delta_1 z_i + \delta_2 z_i^2)$. Daten für $\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}$ liegen Ihnen vor. Beschreiben Sie detailliert die Vorgehensweise, der Sie folgen müssen, um auf dieser Grundlage den FGLS - Schätzer für β zu ermitteln.

5. Sie schätzen ein Regressionsmodell $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 z_t + u_t$ mit strikt exogenen Regressoren mit OLS. Für die Residuen $\widehat{u}_t$ der OLS - Schätzung gilt, dass die empirische Kovarianz zwischen $\widehat{u}_t$ und $\widehat{u}_{t-1}$ den Wert 0.8 hat, während die empirische Varianz von $\widehat{u}_{t-1}$ den Wert 1.6 aufweist.

   (a) Sie vermuten, dass die Störterme des Modells einem autoregressiven Prozess erster Ordnung folgen gemäß $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$ (mit e_t einem klassischen Fehlerterm). Ermitteln Sie einen Schätzwert für den Parameter ρ.

   (b) Geben Sie an, wie Sie auf Grundlage der Schätzung von ρ aus der vorigen Teilaufgabe den FGLS - Schätzer für $\beta_{1,2}$ ermitteln können.