Aufgabe 1

Gesucht:

$$\mathbb{E}(\hat{\tilde{\beta}}|X_1, x_2)$$

Wir wissen:

$$\hat{\tilde{\beta}} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y$$

Und wir wissen:

$$y = X_1\beta + x_2\gamma + u$$

also wenn wir die Definition von y in die von $\hat{\tilde{\beta}}$ einsetzen:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\beta}} &= (X_1'X_1)^{-1}X_1'(X_1\beta + x_2\gamma + u) \\ &= \beta + (X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2\gamma + (X_1'X_1)^{-1}X_1'u\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\tilde{\beta}}|X_1, x_2) &= \mathbb{E}(\beta + (X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2\gamma + (X_1'X_1)^{-1}X_1'u|X_1, x_2) \\ &= \mathbb{E}(\beta|X_1, x_2) + \mathbb{E}((X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2\gamma|X_1, x_2) + \mathbb{E}((X_1'X_1)^{-1}X_1'u|X_1, x_2) \\ &= \beta + (X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2\gamma\end{aligned}$$

ALSO: Unser Schätzer $\hat{\tilde{\beta}}$ ist verzerrt um $(X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2\gamma$

- In $(X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2\gamma$ drin ist:
  - Einfluss von X_1 auf x_2 ($(X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2$)
  - Einfluss von x_2 auf y (γ)

Aufgabe 2

Es gelten die Formeln für OLS:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{OLS,1} &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \\ \hat{\beta}_{OLS,0} &= \bar{y} - \hat{\beta}_{OLS,1}\bar{x}\end{aligned}$$

Jetzt ergeben sich neue Daten:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - \bar{x} \\ \tilde{y} &= y - \bar{y}\end{aligned}$$

Frage: $\hat{\tilde{\beta}}_{OLS,1} = ?$ und $\hat{\tilde{\beta}}_{OLS,0} = ?$

$$\hat{\tilde{\beta}}_{OLS,1} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})(\tilde{y}_i - \bar{\tilde{y}})\right)}{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})^2}$$

Da aber: $\bar{\tilde{x}} = 0, \bar{\tilde{y}} = 0$, gilt:

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i \tilde{y}_i)\right)}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \\ &= \hat{\beta}_{OLS,1} \end{aligned}$$

Für $\hat{\tilde{\beta}}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\beta}}_0 &= \bar{\tilde{y}} - \hat{\tilde{\beta}}_{OLS,1}\bar{\tilde{x}} \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{se(\hat{\beta})} \sim \mathcal{N}(0,1)?$$

- Richtig unter normalverteilten und homoskedastischen Fehlertermen

b)

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{se(\hat{\beta})} \to \mathcal{N}(0,1)?$$

- Zentraler Grenzwertsatz gefragt
- Diese Aussage gilt unter diesem Satz

c)

- Schwache Exogenität ist gegeben $Cov(x_i, u_i) = 0$
- Deswegen ist OLS konsistent

d)

Die Hypothesen von dem Breusch Pagan lautet:

$$\begin{aligned} H_0 &: Var(u_i) = \sigma^2 \\ H_1 &: Var(u_i) = \sigma_i^2 \end{aligned}$$

- Wird H_0 abgelehnt, haben wir Grund zu der Annahme, dass heteroskedastische Fehlerterme vorliegen und müssen robuste Standardfehler verweden
- Also richtig

Breusch-Pagan
Wir nehmen dieses Hilfsmodell an:

$$u_i^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + e_i$$

Und nutzen das resultierende R^2 als Teststatistik

$$BP = nR^2$$

Intuition

- Haben die Regressoren irgendeine Information über die Residuen?

White
Wir nehmen das Hilfsmodell an:

$$u_i^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j x_j^2 + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \phi_{kl} x_k x_l$$

Daraus nutzen wir erneut das R^2:

$$W = (n-p)R^2$$

- BEIDE Testverfahren testen auf ungleiche Varianz der Störterme
- Durch sie finden wir heraus ob wir ein FGLS Schätzen oder standard OLS

f)

$$Cov(x_i, x_j) > 0 \quad i \neq j$$

- MLR Annahme mit Kolinearität verletzt?
- Falsch:
  - Nur wenn perfekte Korrelation vorliegt haben wir Multikolinearitäten
  - Hohe aber nicht perfekte Korrelation führt zu einem höheren Standardfehler der Schätzung

g)

- Falsch, der p-Wert ist gerade das **kleinste** Signifikanzniveau zu dem abgelehnt wird

h)

- Die Aussage ist richtig, da der Abstand von $\hat{\beta}_j$ zu γ kleiner ist als der Abstand zwischen $\hat{\beta}_j$ und der unteren (oder oberen) Grenze des Konfidenzintervalles

i)
OLS Schätzung von $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 0 - 0 = 0$$

Aufgabe 4

Wir nehmen an:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \exp(\delta_0 + \delta_1 z_i + \delta_2 z_i^2)$$
$$\log(\sigma_i^2) = \log(\sigma^2) + \delta_0 + \delta_1 z_i + \delta_2 z_i^2$$

Problem:

- σ_i^2 ist nicht als abhängige Variable zulässig
- Deswegen: Ersatz gefragt -> $\hat{u}_i$
  Also ergibt sich die Regression:

  $$\log(\hat{u}_i^2) = \beta_0 + \delta_1 z_i + \delta_2 z_i^2 + e_i$$

  Nach dem Schätzen erhalten wir:

  $$\hat{\sigma}_i^2 = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\delta}_1 z_i + \hat{\delta}_2 z_i^2)$$

  Diese Schätzungen können wir jetzt verwenden, um neue Daten zu erzeugen (die OLS konform sind):

  $$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_i^2}}$$
  $$\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_i^2}}$$

  Auf diese Daten können wir normal OLS anwenden:

  $$\tilde{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}_i + e_i$$

Aufgabe 5

AR Prozess:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

Aufgabe: ρ Schätzen

- Kann durch normalen OLS erreicht werden
- Also ein lineares Regressionmodell, bei dem abhängige und unabhängige Variable aus derselben Spalte kommen (u)

$$\begin{aligned}\frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{Var(u_{t-1})} &= \frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{\sqrt{Var(u_{t-1})^2}} \\ &= \frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{\sqrt{Var(u_{t-1})Var(u_t)}} \\ &= \frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{\sqrt{Var(u_{t-1})}\sqrt{Var(u_t)}}\end{aligned}$$

- Hier das gleiche wie der Korrelationskoeffizient, da sich die Varianz über Zeit nicht verändert

$$\hat{\rho} = \frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{Var(u_{t-1})} = \frac{0.8}{1.6} = 0.5$$

Daraus ergibt sich die FGLS Schätzung:

$$y_t - \hat{\rho}y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1(x_t - \hat{\rho}x_{t-1}) + \beta_2(z_t - \hat{\rho}z_{t-1}) + e_t$$

Was ist hier passiert?

- Jeder Regressor und y_t wurde mit $1 - \hat{\rho}L$ multipliziert
- y_t -> $y_t - \hat{\rho}y_{t-1}$ und das auch für jeden Regressor