Ökonometrie Tutorium

Blatt 2

Carsten Stahl und Fabian Hentrich

WiSe 2024/2025

Zugang zu den Folien per OneDrive

Aufgabe 1
a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{z}) &= E\left[(\mathbf{z}-E(\mathbf{z}))\,(\mathbf{z}-E(\mathbf{z}))'\right] \\
&= E\left[\begin{pmatrix} v-E(v) \\ w-E(w) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v-E(v) & w-E(w) \end{pmatrix}\right] \\
&= E\begin{bmatrix} (v-E(v))^2 & (v-E(v))\,(w-E(w)) \\ (v-E(v))\,(w-E(w)) & (w-E(w))^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(v) & \mathrm{Cov}(v,w) \\ \mathrm{Cov}(v,w) & \mathrm{Var}(w) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1

Merke also:

$$\boxed{\mathrm{Var}(z) = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(v) & \mathrm{Cov}(v, w) \\ \mathrm{Cov}(v, w) & \mathrm{Var}(w) \end{bmatrix}}$$

Besonders für Schätzungen der OLS-Koeffizienten ist das wichtig:

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2
a)

Ein Schätzer $\widehat{\beta}$ ist erwartungstreu für den wahren Parameter β, wenn gilt:

$$E(\widehat{\beta}|X) = \beta$$

somit bildet sich die Kovarianzmatrix aus:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\beta}|X) = E\left[\left(\widehat{\beta} - E(\widehat{\beta}|X)\right)\left(\widehat{\beta} - E(\widehat{\beta}|X)\right)'\middle|X\right]$$

$$= E\left[\left(\widehat{\beta} - \beta\right)\left(\widehat{\beta} - \beta\right)'\middle|X\right]$$

Aufgabe 2
b)

- Annahme V: $\mathrm{Var}(\widehat{\beta}|X) = \widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$
- $\widehat{\sigma}^2 = SSR/(n-k-1)$ mit $n = 30$, $k = 2$ und $SSR = 39.090258$
- also $\widehat{\sigma}^2 = 39.090258/27 = 1.447787$

Damit ist die geschätzte: Kovarianzmatrix

$$\mathrm{Var}(\widehat{\beta}|X) = \widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.050678 & & \\ 0.010309 & 0.056586 & \\ -0.016506 & -0.045055 & 0.163196 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

c)

Wir finden $\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_2|X)$ in der Kovarianzmatrix der OLS-Schätzungen:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\beta}|X) = \begin{pmatrix} 0.050678 & & \\ 0.010309 & 0.056586 & \\ -0.016506 & -0.045055 & \boxed{0.163196} \end{pmatrix}$$

Hier ist

$$se(\widehat{\beta}_2) = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_2|X)} = \sqrt{0.163196} = 0.403975$$

Aufgabe 3
a)

Der OLS-Schätzer steht in der Vorlesung und wurde dort auch hergeleitet. Der einzige Unterschied ist hier, wir statt y die messfehlerbehafteten Daten z verwenden.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'z \tag{1}$$

Aufgabe 3
b)

Hier müssen wir $z = y + v$ einsetzen und den Erwartungswert bilden:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'\mathbf{z} \\
&= (X'X)^{-1}X'(\mathbf{y}+\mathbf{v}) \quad \text{(Definition von } \mathbf{z}\text{)} \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta+\mathbf{u}+\mathbf{v}) \quad \text{(Definition von } \mathbf{y}\text{)} \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \quad \text{(ausmultiplizieren)} \\
&= \beta+(X'X)^{-1}X'(\mathbf{u}+\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

b)

Der Erwartungswert ist daher:

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\beta}|X\right) &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(\mathbf{u}+\mathbf{v}|X) \\ &= \beta \end{aligned}$$

Also der Schätzer bleibt unverzerrt / erwartungstreu.

Aufgabe 3
c)

Wir schauen uns die Varianz der Schätzung $\hat{\beta}$ an:

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}) &= E((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)') \\
&\underset{\hat{\beta}=\beta+(X'X)^{-1}X(u+v)}{=} E((\beta-\beta+(X'X)^{-1}X'(u+v)) \\
&(\beta-\beta+(X'X)^{-1}X'(u+v))') \\
&= E(((X'X)^{-1}X'(u+v))((X'X)^{-1}X'(u+v))') \\
&= E((X'X)^{-1}X'(u+v)(u+v)'X(X'X)^{-1'})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

c)

$$
\begin{aligned}
&\underset{E(u)=E(v)=0}{=} Var((u+v)(X'X)^{-1}X') \\
&\underset{Var(aX)=aVar(X)a'}{=} (X'X)^{-1}X'Var(u+v)X(X'X)^{-1'} \\
&= (X'X)^{-1'}Var(u+v) = (X'X)^{-1}Var(u+v) \\
&\underset{u,v \text{ unabhängig}}{=} (X'X)^{-1}Var(u) + (X'X)^{-1}Var(v) \\
&> (X'X)^{-1}Var(u)
\end{aligned}
$$

Also ja, die Varianz wird größer und ist von der Varianz und $(X'X)^{-1}$ abhängig.

Aufgabe 3

c)

Intuitive Erklärung:

- Da die Störterme unabhängig voneinander sind, erhöht sich die Varianz der abhängigen Variable y. Dadurch werden die Schätzungen unsicherer (also erhöht sich die Varianz der Schätzungen).
- Interessant ist hier auch $(X'X)^{-1}$ in der finalen Gleichung. Dieser Term verrät uns, dass die Unsicherheit ebenfalls durch die Variation der Regressoren beeinflusst wird (mehr dazu auf der nächsten Folie)

Aufgabe 3

c)

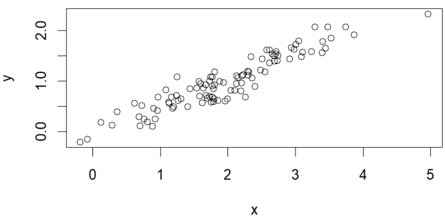


Abbildung: $(X'X)^{-1}$ klein wenn X viel Variation hat $\rightarrow$ Schätzung genauer

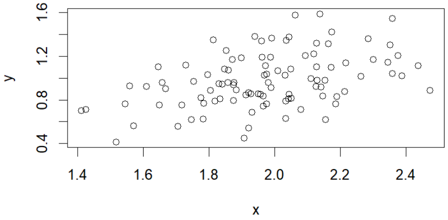


Abbildung: $(X'X)^{-1}$ groß wenn X wenig Variation hat $\rightarrow$ Schätzung unsicherer

Testart	H_0	H_1	**Entscheidung**
Rechtsseitig	$\beta \leq \beta_0$	$\beta > \beta_0$	$t > t_{\text{krit}} \Rightarrow H_0$ ablehnen
Linksseitig	$\beta \geq \beta_0$	$\beta < \beta_0$	$t < -t_{\text{krit}} \Rightarrow H_0$ ablehnen
Zweiseitig	$\beta = \beta_0$	$\beta \neq \beta_0$	$\lvert t \rvert > t_{\text{krit}} \Rightarrow H_0$ ablehnen

- Teststatistik: $t = \frac{\widehat{\beta}-\beta_0}{s_{\widehat{\beta}}}$
- kritischer Bereich (einseitig): $t_{\text{krit}} = t_{(1-\alpha, n-k)}$
- kritischer Bereich (zweiseitig): $t_{\text{krit}} = t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-k)}$

Aufgabe 4
a) und b)

a) Mit einem t - Test.

b) $H_0 : \beta_2 = 1$, gegen $H_1 : \beta_2 \neq 1$.

Teststatistik ist

$$t = \frac{\widehat{\beta} - \beta_2}{s_{\widehat{\beta}}} = \frac{(0.85 - 1)}{0.2} = -0.75$$

Diese Teststatistik ist t - verteilt, wenn die Störterme des Modells normalverteilt sind.

Aufgabe 4

c)

c) Das hängt vom gewählten Signifikanzniveau des Tests ab. Bei $\alpha = 0.05$ wäre der kritische Wert für einen zweiseitigen Test bei 39 Freiheitsgraden würde man nicht ablehnen:

$$t_{\text{krit}} = t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-k)} = t_{(1-\frac{0.05}{2}, 42-3)} = 2.0227$$

$$|t| > t_{\text{krit}} \Rightarrow |-0.75| \not> 2.0227$$

Aufgabe 4

d)

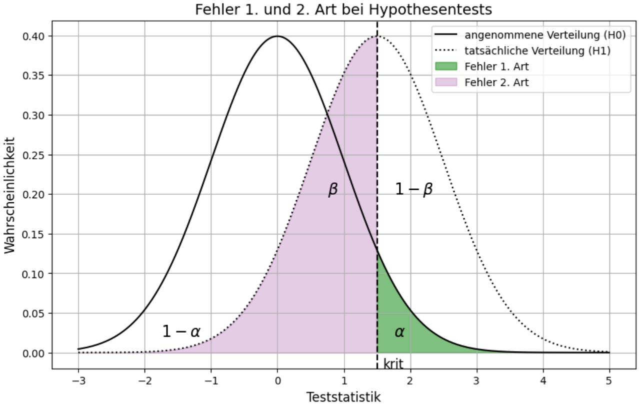
d) Die Nullhypothese, der Parameter β_2 sei gleich 1, könnte nur abgelehnt werden, wenn man eine Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art von mehr als 5% akzeptieren würde. In diesem Sinn ist der Schätzwert von 0.85 nicht signifikant von 1 verschieden. Es ist also nicht allzu unwahrscheinlich (gemessen am Signifikanzniveau von 5%), dass ein wahrer Wert von 1 zu einem Schätzergebnis von 0.85 führt.

Exkurs: Fehler 1. und 2. Art

	H_0 **wahr**	H_0 **falsch**
H_0 **annehmen**	Korrekt $(1-\alpha)$	Fehler 2. Art (β)
H_0 **ablehnen**	Fehler 1. Art (α)	Korrekt $(1-\beta)$

Problem: Wir können nur einen der beiden Fehler kontrollieren. Daher konzentrieren wir uns auf das Ablehnen von H_0. In diesem Fall können wir entweder den **Fehler 1. Art** begehen (den wir über das Signifikanzniveau α steuern) oder eine korrekte Entscheidung treffen $(1-\beta)$. Das bedeutet, dass wir nur dann eine aussagekräftige Interpretation vornehmen können, wenn wir H_0 ablehnen. Andernfalls besteht bei der Alternative die Möglichkeit, dass wir den Fehler 2. Art in unbekannter Höhe machen.

Exkurs: Fehler 1. und 2. Art



Fun Fact: Je näher die H1-Verteilung an der H0-Verteilung ist (also im Test der Koeffizient β an dem Parameter β_0), umso größer ist der potenzielle Fehler 2. Art.

Exkurs: p-Wert

Intuition: Wenn ich unter diesem Wert der T-Statistik H_0 ablehnen würde, ist der p-Wert die Wahrscheinlichkeit falsch zu liegen.

$$\text{p-Wert} = P(\text{Fehler erster Art} | T \wedge H_0 \text{ abgelehnt})$$

Aufgabe 5
a)

Zunächst stellen wir die Regressionsgleichung auf:

$$\ln \texttt{salary}_i = \beta_0 + \beta_1 \ln \texttt{roe}_i + \beta_2 \ln \texttt{sales}_i + u_i$$

Die **theoretische** Elastizität haben wir in dem letzten Übungsblatt in Aufgabe 7 a) bestimmt und die ist:

$$\varepsilon_{\texttt{salary},\texttt{sales}} = \beta_2$$

Aufgabe 5

a)

Diese theoretische Elastizität muss jetzt aber geschätzt werden. Das Schätzergebnis sehen wir in dem Gretl output von der Aufgabe:

$$\hat{\varepsilon}_{\texttt{salary,sales}} = \hat{\beta}_2$$

Da unsere Störgröße **normalverteilt** ist, wissen wir, dass $\hat{\beta}_2$ t-verteilt ist mit Freiheitsgraden $f = n -$ Anzahl der Parameter $= 206$. Ab hier gilt es, die Formel aus der Vorlesung anzuwenden:

$$\boxed{\hat{C}_{1-\alpha} = \left[\hat{\beta}_2 - t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{s}_{\hat{\beta}_2}; \hat{\beta}_2 + t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{s}_{\hat{\beta}_2}\right]}$$

- wobei $\hat{s}_{\hat{\beta}_2}$ die (geschätzte) Standardabweichung von $\hat{\beta}_2$ ist.

Aufgabe 5

a) & b)

Diese Rechnung ergibt dann:

$$[0.215867\,;\;\; 0.327442]$$

Es heißt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ist der wahre Wert von $\varepsilon_{\texttt{salary},\texttt{sales}}$ in dem Intervall enthalten:

- Dieses Ergebnis gilt nur unter den OLS Bedingungen