Ökonometrie Tutorium

Blatt 1

Carsten Stahl und Fabian Hentrich

WiSe 2024/2025

Aufgabe 7
Elastizität

- Die Elastizität ist gegeben durch den Quotienten der relativen Änderungen von y und x:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

- Möchte man die Elastizität für einen unendlich kleinen Abstand in x auswerten, ergibt sich die Formel:

$$\boxed{\varepsilon_{y,x} = \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x}}$$

- Diese Formel kann man nun für dieser Aufgabe verwenden.

Aufgabe 7

a)

Das gegebene Modell ist multiplikativ. Log-skalieren der Regressionsgleichung resultiert in:

$$\ln y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_{i,1} + \beta_2 \ln x_{i,2} + u_i$$

- Problem: Die Formel verlangt eine Ableitung nach y_i aber nicht nach $\ln y_i$.
- Wir müssen also eine schlaue Ergänzung anwenden.

Aufgabe 7

a)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{y_i,x_{i,1}} &= \frac{x_{i,1}}{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_{1,i}} \\
&= \frac{x_{i,1}}{y_i}\frac{\partial \ln y_i}{\partial \ln y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_{i,1}} \\
&= \frac{x_{i,1}}{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \ln y_i}\frac{\partial \ln y_i}{\partial x_i} \\
&= \frac{x_{i,1}}{y_i}\left(\frac{\partial \ln y_i}{\partial y_i}\right)^{-1}\frac{\partial \ln y_i}{\partial x_{i,1}} \\
&= \frac{x_{i,1}}{y_i}\left(\frac{1}{y_i}\right)^{-1}\frac{\beta_1}{x_{i,1}} \\
&= \frac{x_{i,1}}{y_i}\frac{y_i}{x_{i,1}}\beta_1 = \beta_1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

b)

Merke: Für log-log Modelle ist die Elastizität immer der Parameter selbst:

$$\boxed{\varepsilon_{y_i, x_{i,j}} = \beta_j}$$

WICHTIG:

- Vorsicht mit Quadratischen Termen wie $\log x_{i,1}^2$. In dem Fall gilt dieser Zusammenhang nicht mehr.
- Die Interpretation des Parameters β_j ist dann logischerweise die Elastizität (Änderung in 1% in x_{ij} bewirkt Änderung von y_i um β_j%)

Aufgabe 7
b)

Die Gleichung enthält einen quadratischen Einfluss:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \beta_3 x_{i,1}^2 + \beta_2 x_{i,2}$$

- $x_{i,1}$s Einfluss wird durch ein quadratisches Polynom modelliert.
- Die Elastizität kann direkt ausgerechnet werden

$$\begin{aligned}\varepsilon_{y_i,x_{i,1}} &= \frac{x_{i,1}}{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_{i,1}} \\ &= \frac{x_{i,1}}{y_i}(\beta_1 + 2\beta_3 x_{i,1})\end{aligned}$$

Aufgabe 7
c)

- Diese Gleichung enthält nicht-lineare Parameter.
- Hier müssen wir also die Elastizität nicht berechnen.

Aufgabe 7
d) & e)

Hier enthält die Regressionsgleichung einen Interaktionsterm $x_{i,1}x_{i,2}$. Die Elastizität ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{y_i,x_{i,1}} &= \frac{x_{i,1}}{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_{i,1}} \\ &= \frac{x_{i,1}}{y_i}(\beta_1 + \beta_2 x_{i,2})\end{aligned}$$

Bei e) haben wir einen Spezialfall von a) mit $\beta_1 = 1$ also ergibt sich:

$$\varepsilon_{y_i,x_{i,1}} \underset{a)}{=} \beta_1 = 1$$

Definition:
Die Dummy-Variable-Falle tritt auf, wenn in einem Regressionsmodell mehrere Dummy-Variablen verwendet werden, die eine exakte lineare Abhängigkeit aufweisen **und ein Intercept** β_0.

Aufgabe 8

a) Sehr formal

Nehmen wir an:

$$d_1 + d_2 = e_n$$

Wobei $e_n' = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Sowie $x_0 = e_n$, dann:

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 d_1 + \alpha d_2 = 0$$

Lösbar mit $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Und somit gibt es eine nicht triviale Lösung. **Fazit (und das hier merken!):** *Rangbedinung von X ist verletzt wenn wir das Modell so definieren.*

Beispiel:
Für eine Variable mit drei Kategorien (z. B. A, B, C) gilt:

$$D_A + D_B + D_C = 1$$

Dies führt zu perfekter Multikollinearität und verhindert eine eindeutige Schätzung der Regressionskoeffizienten (Regressormatrix ist nicht vollrangig).

Lösung:
Eine der Dummy-Variablen sollte weggelassen werden, sodass nur zwei Variablen verwendet werden (z. B. D_A und D_B), wobei die dritte Kategorie (z. B. C) als Referenzkategorie dient.

Aufgabe 8

a)

Dummy-Variablen-Falle:

- es gilt $p_i + d_i = 1$ für alle i
- p_i, d_i und die Konstante sind also linear abhängig

$\rightarrow$ perfekte Multikollinearität

$\rightarrow$ OLS-Schätzer existiert nicht (Annahme III ist verletzt)

Man sieht dies leicht, wenn man die Regressormatrix aufstellt:

$$X = \begin{pmatrix} \text{Konstante} & p_i & d_i & g_i \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ \text{usw.} & \dots & & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8
b)

1. $m_i = \beta_0 + \beta_1 g_i + \beta_2 p_i + u_i$

   (β_2 misst den durchschnittlichen Gehaltsvorsprung des produzierenden Gewerbes)

2. $m_i = \beta_0 + \beta_1 g_i + \beta_2 d_i + u_i$

   (β_2 misst den durchschnittlichen Gehaltsvorsprung des Dienstleistungssektors).

Aufgabe 9

a)

Intuitiv würde man sagen $\hat{\beta}_1 = \frac{1}{1000}\tilde{\beta}_1$ aber kann man das auch zeigen?

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(1000 \cdot x_i - 1000 \cdot \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(1000 \cdot x_i - 1000 \cdot \bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} 1000(x_i - \cdot\bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} 1000^2(\cdot x_i - \cdot\bar{x})^2} \\
&= \frac{1000}{1000^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \cdot\bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(\cdot x_i - \cdot\bar{x})^2} \\
&= \frac{1}{1000}\tilde{\beta}_1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

a) & b)

Was ist mit dem y-Achsen Abschnitt β_0?

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 1000 \cdot \bar{x} \\ &= \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \frac{1}{1000} 1000\bar{x} \\ &= \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x} \\ &= \tilde{\beta}_0\end{aligned}$$

Hier gilt dann auch, dass $\tilde{y}_i = \hat{y}_i$ für alle i und auch somit, dass sich die Residuen sich nicht ändern.

Aufgabe 9
c)

Hier muss man wieder in die Schätzgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_1^{neu} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i + z - \bar{y} - z)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \hat{\beta}_1 \\
\tilde{\beta}_0^{neu} &= \overline{y + z} - \tilde{\beta}_1^{neu} \bar{x} \\
&= \bar{y} + \bar{z} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\
&= \bar{y} + z - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\
&= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} + z \\
&= \hat{\beta}_0 + z
\end{aligned}$$