Ökonometrie Tutorium

Blatt 1

Carsten Stahl und Fabian Hentrich

WiSe 2024/2025

Vorwort

- Wichtige Formeln sind mit $\boxed{\text{einer roten Box}}$ gekennzeichnet
- Diese sind natürlich nur eine kleine Hilfestellung, um besser mit diesem Stoff klarzukommen.
- Ganz allgemein gibt es bei diesem Fach keine Abkürzung.

Aufgabe 1
a)

Normale Definition der Varianz:

$$Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$$

Dies können wir umformen:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2 - 2X^2\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 1
a)

Daher gilt:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \iff Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2)$$

Merken:

$$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

Aufgabe 1
a)

Einsetzen in die Formel der letzten Folie:

$$\mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 12 + 0 = 12$$

Generell kann man davon ausgehen dass:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \implies Var(X) = \mathbb{E}(X^2)$$

Aufgabe 1
b) und c)

Die Kovarianz kann beschrieben werden durch:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

- Sie ist die **lineare** Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen.

Diese Größe lässt sich schätzen durch (also die **Stichproben Kovarianz**):

$$\boxed{\widehat{Cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})(y - \bar{y})}$$

- Dabei ist $\bar{x}$ und $\bar{y}$ das **arithmetische Mittel**

Aufgabe 1
d)

Die gesuchte Umformung ist[1]:

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathbb{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) \\
&= \mathbb{E}(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_Y\mu_X) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mu_Y - \mu_X\mathbb{E}(Y) + \mu_Y\mu_X \\
&= \mathbb{E}(XY) - 2\mu_x\mu_Y + \mu_Y\mu_X \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mu_X\mu_Y \\
&\underset{\mu_Y=0,\mu_X=0}{=} \mathbb{E}(XY)
\end{aligned}$$

[1] Wir nutzen $\mathbb{E}(X) := \mu_X$ und $(Y) := \mu_Y$

Aufgabe 1

Merken: $\boxed{Cov(x, y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$

Aufgabe 1
e)

Wenn zwei Zufallsvariablen X, Y stochastisch unabhängig sind, lässt sich der Erwartungswert faktorisieren:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Aber das ist äquivalent zu:

$$0 = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = Cov(X, Y)$$

Die Aussage ist somit gezeigt.

- Die Umkehrung gilt jedoch nur, wenn die Zufallsvariablen **beide** normalverteilt sind.

Aufgabe 1
f)

Ohne hier unheimlich tief in die Maßtheorie einzutauchen können wir hier behaupten, dass

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$$

gilt, wenn X,Y stochastisch unabhängig voneinander sind.

- Intuitiv könnte man sagen, dass sich die Erwartung von einer Zufallsvariable nicht verändert, wenn ich die Informationen von etwas unabhängigem verwende.
- Beispiele:
  - $\mathbb{E}(\text{DAX-Wert}|\text{Teilnehmeranzahl dieses Tutoriums})$
  - $\mathbb{E}(\text{Ausfallraten Hypotheken}|\text{Sparvermögen von Kleinkindern})$
  - $\mathbb{E}(\text{Nettoexporte von Deutschland}|\text{Umsatz des lokalen Friseursalons})$

Aufgabe 2

a)

- $\mathbf{x}$ hat die Dimension $n \times 1$ (Spaltenvektor)
- $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ hat demnach die Dimension 1 (Skalar)

Aufgabe 2
b)

$\rightarrow$ Wie berechnet man dieses Skalar? (Zeile $\times$ Spalte)

$$\boxed{\mathbf{x}'\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Aufgabe 2
c)

$\mathbf{x}\mathbf{x}'$ hat die Dimension $n \times n$

Warum?

$$\boxed{\mathbf{x}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 2
d)

Numerisches Beispiel mit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'\mathbf{x} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \\ \mathbf{x}\mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2
e)

Definition Symmetrie: eine symmetrische Matrix ist eine quadratische Matrix, die gleich ihrer Transponierten ist

$\rightarrow$ Matrix A ist symmetrisch, wenn gilt: $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A = A'$

$\rightarrow$ Einträge der Matrix A sind **symmetrisch zur Hauptdiagonalen**

Aufgabe 2

e) Beispielmatrizen:

1. **Einfache symmetrische Matrix**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **Symmetrische Matrix mit mehr Dimensionen**:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. **Nullmatrix**:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
f)

- X die Dimension $n \times k$
- X' die Dimension $k \times n$

$\rightarrow$ $X'X$ existiert mit Dimension $k \times k$

Zu zeigen ist, dass $X'X = (X'X)'$ ist (äquivalent zu $A = A'$)

- Transpositionsregel: $(AB)' = B'A'$
- demnach ist $(X')' = X$
- und somit:
$$(X'X)' = X'(X')' = X'X$$
- $X'X$ ist gleich seiner eigenen Transposition und somit symmetrisch

Aufgabe 2
g)

- Die Vektoren $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ heißen linear unabhängig, wenn die einzigen Skalare $a_1, ..., a_k$, für die die Aussage $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ...a_k\mathbf{x}_k = 0$ zutrifft, Nullen sind, $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$.
  - Intuition? [Link zu Lernvideo]
- Der Rang einer $n \times k$ - Matrix mit $k \leq n$ ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten.
- Eine quadratische $k \times k$ - Matrix heißt nichtsingulär, wenn sie Rang k hat (auch: vollen Rang).

Aufgabe 2

g)

- Die Einheitsmatrix I_k ist diejenige quadratische Matrix, die Einsen auf der Hauptdiagonalen und sonst nur Nullen hat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Inverse A^{-1} der quadratischen $k \times k$ - Matrix A ist diejenige Matrix, für die gilt: $A^{-1}A = AA^{-1} = I_k$.

Aufgabe 2

h)

Inverse einer quadratischen Matrix A existiert, wenn Matrix A:

- nichtsingulär ist (folglich keine keine linearen Abhängigkeiten hat)

$\rightarrow$ Determinante $\det(A) \neq 0$

Wir wissen, dass $(A'B)^{-1} = B^{-1}(A')^{-1} = B^{-1}\left(A^{-1}\right)'$ ist

Für invertierbare 2×2 - Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ gilt allgemein

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

Determinate einer 2×2 Matrix: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Aufgabe 2
i)

Daher ist

$$A^{-1} = \frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} (A'B)^{-1} &= B^{-1}\left(A^{-1}\right)' \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 4.5 & -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3
a)

Wichtig: Der einzige Zufallsprozess in der Regression ist der Störterm U_i. Genau deswegen müssen wir auch für diesen die Momentenbedinungen aufstellen:

$$\mathbb{E}(U_i) = 0 \tag{1}$$
$$\mathbb{E}(x_i U_i) = 0 \tag{2}$$

- Diese theoretischen Größen müssen jetzt geschätzt werden.
- **Problem:** gegeben in unseren Daten sind nur x_i, y_i, aber nicht u_i.
- Der Störterm muss also ebenfalls geschätzt werden und ergibt sich aus den Residuen unserer Regression.

Aufgabe 3
a)

Für die Beobachtungen des Störterms benutzen wir also:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

Es ergibt sich:

$$\widehat{\mathbb{E}(U_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \tag{3}$$

$$\widehat{\mathbb{E}(x_i U_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i \tag{4}$$

Aufgabe 3
a)

Lass uns also (3) verwenden, um eine den ersten Momentenschätzer $\hat{\beta}_0$ herzuleiten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i &&\overset{!}{=} 0 \\
\iff &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) &&= 0 \\
\iff &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{n}{n}\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i &&= 0 \\
\iff &\bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x} &&= 0 \\
\iff &\hat{\beta}_0 &&= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3
a)

Die zweite Momentengleichung (4) können wir jetzt verwenden, um den zweiten Momentenschätzer $\hat{\beta}_1$ herzuleiten:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i && \overset{!}{=} 0 \\
\iff &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) && = 0 \\
\iff &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) - \hat{\beta}_1 x_i) && = 0 \\
\iff &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ((y_i - \bar{y}) - \hat{\beta}_1 (\bar{x} - x_i)) && = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) = \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \hat{\beta}_1$$

Hier können wir dann auch die Schätzungen für die Varianz und Kovarianz einsetzen und bekommen:

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{Cov}(x, y)}{\widehat{Var}(x)} \neq \hat{\rho}_{x,y}}$$

Aufgabe 3
b)

Aus der Formel aus der letzten Aufgabe können wir jetzt die Schätzung für $\hat{\beta}_1$ herleiten:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{Cov}(x, y)}{\widehat{Var}(x)} = \frac{0.3}{0.25} = 1.2$$

Die Formel für R^2 ist:

$$\boxed{R^2 = 1 - SSR/SST}$$

Hier gilt:

- SSR ist gegeben und ist 101
- SST können wir aus der Varianz von y herleiten (mehr dazu auf der nächsten Folie)

Aufgabe 3

b)

Wir bekommen die SST durch das richtige Skalieren der Stichproben-Varianz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 &= \frac{n-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\\ &= (n-1)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\\ &= (n-1)\widehat{Var}(Y)\\ &= 101\cdot 1.36 = 137.36\end{aligned}$$

Aufgabe 3
b)

R^2 ist also:

$$R^2 = 1 - SSR/SST = 1 - 101/137.36 = 0.2647$$

Denkt dran: Das R^2 misst die Verbesserung gegenüber des Konstanten Modells $f(x) = \hat{\beta}_0 = \bar{y}$. Je höher der Wert, desto besser ist das lineare Modell gegenüber dem konstanten und desto stärker ist auch die lineare Abhängigkeit zwischen x und Y.
Bei $R^2 = 0.2647$ haben wir also einen schwachen linearen zusammenhang zwischen x und Y.

Aufgabe 4

a)b)c)

Schätzgleichung: $\widehat{y}_i = 1000 + 0.28x_i$

a) Bei einer Änderung der Werbeausgaben um 1000€ wird eine Änderung des Umsatzes um 280€ vorausgesagt.

b) Wegen $\Delta\widehat{y}_i = 0.28\Delta x_i$ $=0.28 \cdot 500 = 140$ ist die vorausgesagte Umsatzänderung 140.000€bei Erhöhung der Werbeausgaben um 500.000€

c) Für $\overline{x} = 800$ ergibt sich aus der ersten Momentenbedingung $\overline{y} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1\overline{x} = 1000 + 0.28 \cdot 800 = 1224$, also 1,224 Mio Euro.

d) Gesucht ist der Mittelwert der $\widehat{y}_i$,
also $\overline{\widehat{y}} := (1/n)\sum_i \widehat{y}_i$
Es gilt $\overline{\widehat{y}} = \overline{y}$:

$$\begin{aligned} y_i &= \widehat{y}_i + \widehat{u}_i \\ \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_i y_i &= \frac{1}{n}\sum_i \widehat{y}_i + \frac{1}{n}\sum_i \widehat{u}_i \\ &\Rightarrow \overline{y} = \overline{\widehat{y}} + 0 \end{aligned}$$

weil $\sum_i \widehat{u}_i = 0$ aus der ersten Momentenbedingung gilt.

Aufgabe 4

e)

Merke: Die Elastizität ist:

$$\boxed{\epsilon_{x_i,\hat{y}_i} = \frac{\frac{\partial \hat{y}_i}{\hat{y}_i}}{\frac{\partial x_i}{x_i}} = \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x_i}\frac{x_i}{y_i}}$$

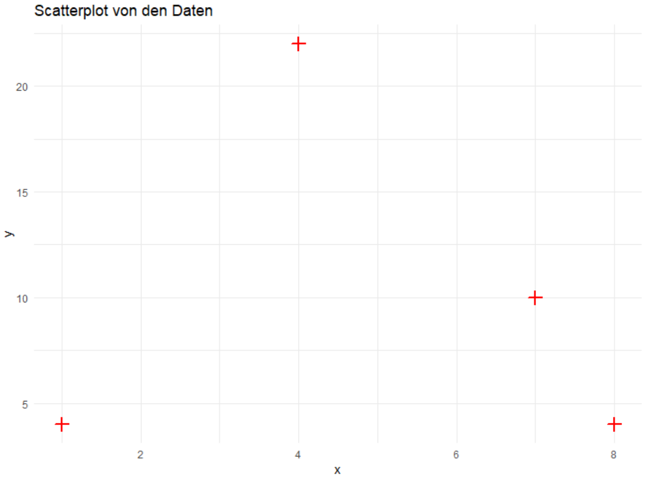
e) Die Elastizität ist somit:

$$\left.\frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial x_i}\frac{x_i}{\widehat{y}_i}\right|_{\widehat{y}_i=\overline{y}=1224,\overline{x}=800} = 0.28\frac{800}{1224} = 0.1830$$

Ausgehend von den Stichprobenmittelwerten sollte eine einprozentige Erhöhung der Werbeausgaben den Umsatz um 0.183 Prozent erhöhen.

Aufgabe 5

Hier sind die Daten mal visualisiert:



Aufgabe 5

a)

Hier war es lediglich verlangt, die Formel aus der Vorlesung für den OLS-Schätzer[2] anzuwenden:

$$\boxed{\hat{\beta}_{OLS,0} = \bar{y} - \hat{\beta}_{OLS,1}\bar{x}} \tag{5}$$

$$\hat{\beta}_{OLS,1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{6}$$

Die daraus resultierende Linie minimiert also den quadratischen Abstand zu den Datenpunkten.

[2] OLS = Ordenary least squares

Aufgabe 5
a)

Merke: eine Formel für das schnelle Ausrechnen von $\hat{\beta}_{OLS,1}$ ist:

$$\boxed{\hat{\beta}_{OLS,1} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}}}$$

Aufgabe 5
a)

Es ergeben sich die Berechnungen:

$$\bar{x} = 5$$
$$\bar{y} = 10$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 30$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -6$$

Und somit die Schätzungen:

$$\hat{\beta}_{OLS,1} = -0.2$$
$$\hat{\beta}_{OLS,0} = 11$$

Aufgabe 5

b)

Die fitted values $\hat{y}$ sind einfach die x-Werte eingesetzt in unser lineares Modell:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{\beta}_{OLS,0} + \hat{\beta}_{OLS,1} x \\ &= 11 - 0.2 \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.4 \\ 9.6 \\ 10.2 \\ 10.8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aufgabe 5
c)

Die Residuen sind die Abstände zu den Datenpunkten (auf der y-Achse):

$$\boxed{\hat{u} = y - \hat{y}} = \begin{pmatrix} -5.4 \\ 0.4 \\ 11.8 \\ -6.8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5
d)

Es gilt für den Stichproben-Korrelationskoeffizient:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{x,y} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \\
&= \hat{\beta}_{OLS,1} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(X)}}{\sqrt{\widehat{Var}(Y)}}
\end{aligned}$$

Da die Varianz eine nicht-negative Größe ist, überträgt sich das Vorzeichen von $\hat{\beta}_{OLS,1}$ auf den Korrelationskoeffizienten. Dieser ist somit negativ.

Aufgabe 5
e)

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 216$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 1.2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 214.8$$

$$\boxed{R^2 = SSE/SST} = 1 - SSR/SST = 0.0056$$

Also kein linearer Zusammenhang.

Aufgabe 5

e)

- Wenn wir uns den Scatterplot anschauen, sind die ersten 3 Datenpunkte perfekt linear
- $(1, 4)$ macht uns also die lineare Regression "kaputt"
- $(1, 4)$ wird auch **Hebelpunkt genannt**

Aufgabe 6

Aufgabe: Regressiere die Residuen $\widehat{u}_i$ auf den Regressor x_i. Welchen Wert müssen die Koeffizienten per Konstruktion haben?

Modell: $\widehat{u}_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + v_i$

Schätzer:

$$\widehat{\alpha}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(\widehat{u}_i - \overline{\widehat{u}})}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} = \frac{Cov(x_i, u_i)}{Var(x_i)}$$

$$\widehat{\alpha}_0 = \overline{\widehat{u}} - \widehat{\alpha}_1 \overline{x}$$

Exkurs: Exogenität

Eine unabhängige Variable x ist asymptotisch exogen, wenn:

- $\mathbb{E}(x_i, u_i) = 0$ (schwache Exogenität)
- y_i, x_i sind i.i.d. (independent identically distributed)

i.i.d. Variablen führen zu

$$\frac{1}{N} \sum x_i u_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(x_i, u_i) = 0$$

wodurch die strikte Exogenität $\mathbb{E}(u_i | x_i)$ hält

Exkurs: Exogenität

Was hat das jetzt mit der Kovarianz zu tun?

- Die Kovarianz zwischen x_i und u_i wird definiert als:

$$Cov(x_i, u_i) = \mathbb{E}(x_i u_i) - \mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(u_i)$$

- Per Exogenitätsannahme gilt:

$$\mathbb{E}(x_i u_i) = 0$$

- Daher erhalten wir:

$$Cov(x_i, u_i) = 0 - \mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(u_i)$$

Exkurs: Exogenität

- $\mathbb{E}(x_i)$ kann ungleich 0 sein, **aber** per Definition ist:

$$E(u_i) = 0$$

aufgrund von :

$$E(x_i, u_i) = \begin{pmatrix} u_1 \\ x_2, u_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

- demnach erhalten wir:

$$\mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(u_i) = 0$$

- und somit:

$$Cov(x_i, u_i) = 0 - 0 = 0$$

Exkurs: Exogenität

Die Annahme der asymptotischen Exogenität sichert, dass:

- Die Schätzungen der Regressionskoeffizienten konsistent sind.
- Die Schätzungen asymptotisch normal verteilt sind (für Hypothesentests wichtig)

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1$$

wenn $n \to \infty$.

Aufgabe 6

Wir wissen nun, dass unter gewissen Annahmen gilt:

$$Cov(x_i, u_i) = 0$$

Demnach gilt für die Schätzer:

$$\widehat{\alpha}_1 = \frac{Cov(x_i, u_i)}{Var(x_i)} = \frac{0}{Var(x_i)} = 0$$

$$\widehat{\alpha}_0 = \overline{\widehat{u}} - \widehat{\alpha}_1 \overline{x} = 0 - 0\overline{x} = 0$$

(da in diesem speziellen Fall: $\overline{\widehat{u}} = \frac{1}{N} \sum \widehat{u}_i = \mathbb{E}(u_i) = 0$)

Aufgabe 6

Interpretation:

- OLS wählt die Schätzer per Konstruktion so, dass die Residuen orthogonal zum Regressor sind
- Residuen sind unerklärter Rest, daher hat x_i keinen Informationsgehalt für sie (sonst wären sie ja nicht unerklärt)