

Klausur zu Ökonometrie (Master)

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

1. Oktober 2024

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer

Nachname

Studiengang

Vorname

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus fünf Aufgaben, welche alle zu bearbeiten sind.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Nicht-programmierbare Taschenrechner sind als Hilfsmittel für diese Klausur zugelassen.

Für jede der fünf Aufgaben sind maximal je 18 Punkte zu erreichen.

Bei 36 von maximal 90 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Ein DIN-A4 Blatt mit eigenen handschriftlichen Notizen (Vorder- und Rückseite)

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Punkte Aufgabe 1 / 18

Punkte Aufgabe 2 / 18

Punkte Aufgabe 3 / 18

Punkte Aufgabe 4 / 18

Punkte Aufgabe 5 / 18

Gesamtpunkte / 90

Note:

Aufgabe 1

Es seien die Beobachtungen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $X \in \mathbb{R}^{n \times k+1}$ verfügbar, wobei $\mathbf{y}$ der Regressand und X die Regressor-matrix sei.

In der Vorlesung wurden die Annahmen MLR 1, MLR 3, MLR 4 und MLR 5 zur Analyse der linearen Regression mit $k + 1$ Regressoren (inklusive Konstante) getroffen.

- a) Wie lauten diese vier Annahmen?
- b) Geben Sie für jede dieser vier Annahmen ein Beispiel, welches die entsprechende Annahme verletzt.
- c) Wie lautet der kleinste Quadrate Schätzer $\hat{\beta}$? Argumentieren Sie, welche der obigen Annahmen notwendig für die Spezifikation und Existenz dieses Schätzers sind.
- d) Welchen Erwartungswert und welche Varianz-Kovarianz-Matrix hat der Schätzer $\hat{\beta}$? Argumentieren Sie, welche der obigen Annahmen benötigt werden, um den Erwartungswert und die Varianz-Kovarianzmatrix dieses Schätzers zu bestimmen.

Aufgabe 2

Dieser Aufgabe liegt der in der Vorlesung und Übung analysierte Datensatz wage1 zugrunde. Ihnen steht folgender Output zur Verfügung:

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1–526

Abhängige Variable: wage

	Koeffizient	Std. Fehler	<i>t</i> -Quotient	p-Wert
const	−3,39054	0,766566	−4,423	0,0000
exper	0,0700954	0,0109776	6,385	0,0000
educ	0,644272	0,0538061	11,97	0,0000
Mittel abhängige Var.	5,896103	Stdabw. abhängige Var.	3,693086	
Summe quad. Residuen	5548,160	Stdfehler Regression	3,257044	
R^2	0,225162	Korrigiertes R^2	0,222199	
$F(2, 523)$	75,98998	P-Wert(F)	1,07e−29	

- Wie sind die Werte in der Spalte „*t*-Quotient“ zu interpretieren? Welche Formel liegt ihnen zugrunde?
- Welchen Schluss können Sie in Bezug auf den Wert des *t*-Quotienten des Regressors educ ziehen?
- Wie viel Prozent der Streuung von wage wird durch die Streuung von exper und educ erklärt? Erklären Sie auf Grundlage welchen Werts der Tabelle Sie Ihre Aussage treffen und wie dieser Wert berechnet wird!
- Welche statistische Kennzahl wird mit SST bezeichnet und wie lautet dieser Wert im vorliegenden Fall? Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen auf Grundlage des vorliegenden Outputs zu berechnen. Geben Sie mindestens eine Möglichkeit an!

Aufgabe 3

Es sei Z und Y beliebige Zufallsvariablen mit $|\mathbb{E}[Z]|, |\mathbb{E}[Y]| < \infty$ und $\mathbb{E}[Z^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

a) Definieren Sie die Varianz von Z , $Var(Z)$, und die Kovarianz von Z und Y , $Cov(Z, Y)$, als Erwartungswerte!

Betrachten Sie nun das lineare Regressionsmodell unter den Annahmen MLR 1 bis MLR 6:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u$$

Es bezeichnen $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ die OLS-Schätzer für β_1 und β_2 .

Es bezeichnen $\sigma_1^2 = Var(\hat{\beta}_1)$, $\sigma_2^2 = Var(\hat{\beta}_2)$ und $\sigma_{12}^2 = Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

Um die Nullhypothese $\beta_1 + 2\beta_2 = 2$ zu testen wird der Schätzer $\hat{\theta} = \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2$ definiert.

b) Bestimmen Sie $Var(\hat{\theta})$ in Ausdrücken von σ_1^2 , σ_2^2 und σ_{12}^2 . Wie lautet der Standardfehler $se(\hat{\theta})$ von $\hat{\theta}$?

c) Bestimmen Sie die t -Statistik für die Nullhypothese $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = 2$!

d) Definieren Sie $\theta = \beta_1 + 2\beta_2$ und $z = x_2 - 2x_1$. Stellen Sie eine Regressionsgleichung mit den Parametern β_0, θ, β_2 und β_3 und den Regressoren x_1, z und x_3 auf, welche äquivalent zur obigen Regressionsgleichung ist und deren OLS-Schätzung Ihnen erlaubt $se(\hat{\theta})$ direkt abzulesen.

Aufgabe 4

- a) Was bedeutet der Ausdruck „Heteroskedastizität“ in Bezug auf die unbeobachtbaren Störterme u_i , $i = 1, \dots, n$? Welche der Annahmen MLR 1 bis MLR 6 wird oder werden durch Heteroskedastizität verletzt?
- b) Warum sind heteroskedastische Störterme in Bezug auf das OLS-Schätzverfahren problematisch?
- c) Nennen Sie ein Testverfahren, mit welchem Heteroskedastizität festgestellt werden kann und erläutern Sie kurz dessen Vorgehen!

Es sei angenommen, dass die auf X bedingte Varianz-Kovarianz-Matrix der Störterme bekannt und wie folgt gegeben sei:

$$\mathbb{V}(\mathbf{u}|X) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

- d) Wie müssten der Regressand $\mathbf{y}$ und die Regressoren X transformiert werden, so dass OLS anwendbar ist und Hypothesen an die Parameter valide getestet werden können? Zeigen Sie, dass die transformierten Störterme einen Erwartungswert von null haben und homoskedastisch sind!

Aufgabe 5

In einem Zeitreihenmodell sei der unbeobachtbare Störterm u_t , $t = 1, \dots, n$ ein autoregressiver Prozess erster Ordnung, kurz $AR(1)$.

- a) Welche Formel definiert den $AR(1)$ -Prozess u_t für ein gegebenes u_0 ?
- b) Unter welchen Bedingungen ist der $AR(1)$ -Prozess $\{u_t\}_{t=1}^n$ stationär?
- c) Welche der Annahmen MLR 1 bis MLR 6 ist oder sind verletzt? Warum ist dies in Bezug auf das OLS-Schätzverfahren problematisch?
- d) Nehmen Sie an, die Korrelation zwischen den Störtermen u_t und u_{t-1} sei bekannt und durch den Wert ρ gegeben. Wie müssen der Regressand y und die Regressoren X transformiert werden, so dass OLS anwendbar ist und Hypothesen an die Parameter valide getestet werden können? Zeigen Sie, dass die transformierten Störterme einen Erwartungswert von null haben und seriell unkorreliert sind!

Kritische Werte der t -Verteilung

		Signifikanzniveau				
		einseitig:	10%	5%	2,5%	1%
		zweiseitig:	20%	10%	5%	2%
Freiheits- grade	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
	120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 1%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n - k - 1$	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
	11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
	13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
	14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
	15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
	16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
	17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
	18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
	19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
	20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
	21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
	22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
	23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
	24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
	25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
	26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
	27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
	28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
	29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
	30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
	40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
	60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
	90	6,93	4,85	4,01	3,54	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52
	120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47
	∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 5%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n - k - 1$	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
	25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
	26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
	90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94
	120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
	∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

Kritische Werte der χ^2 -Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits- Grade	1	2,71	3,84	6,63
	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89