

# Klausur zu Ökonometrie (Master)

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

2. August 2024

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer

Nachname

Studiengang

Vorname

## Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus fünf Aufgaben, welche alle zu bearbeiten sind.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Für jede der fünf Aufgaben sind maximal je 18 Punkte zu erreichen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

## Erlaubte Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Ein DIN-A4 Blatt mit handschriftlichen Notizen (Vorder- und Rückseite)

**Viel Erfolg!**

Vom Prüfer auszufüllen:

Punkte Aufgabe 1  / 18

Punkte Aufgabe 2  / 18

Punkte Aufgabe 3  / 18

Punkte Aufgabe 4  / 18

Punkte Aufgabe 5  / 18

Gesamtpunkte  / 90

Note:

# Aufgabe 1

a) Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Gauss-Markov-Theorem korrekt?

1. OLS-Schätzer sind verzerrt und haben die geringste Varianz unter allen linearen Schätzern.
2. OLS-Schätzer sind unverzerrt und haben die geringste Varianz unter allen linearen Schätzern.
3. OLS-Schätzer sind verzerrt und haben die größte Varianz unter allen linearen Schätzern.
4. OLS-Schätzer sind unverzerrt und haben die größte Varianz unter allen linearen Schätzern.

b) Erklären sie den Unterschied zwischen endogenen und exogenen Variablen in einem ökonometrischen Modell. Geben sie ein Beispiel für jede Art von Variable.

Beschreiben sie die Bedeutung und die Voraussetzungen des klassischen linearen Regressionsmodells anhand

c) der Annahmen MLR 1, MLR 3 und MLR 4,

sowie

d) der Annahmen MLR 5 und MLR 6.

# Aufgabe 2

Gegeben sei folgendes Regressionsmodell:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + u_i, \quad i = 1, \dots, 1000$$

Mit folgenden OLS-Schätzungen:

$$\hat{y}_i = 2,11 + 0,29 \cdot x_{i1} + 1,52 \cdot x_{i2}$$

(.26)      (.13)      (.25)

(Standardfehler in Klammern)

Zusätzlich sei ihnen  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 8,34$  und  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 2,296$  bekannt.

a) Prognostizieren sie  $y_i$  durch  $\hat{y}_i$  für  $x_{i1} = 4$  und  $x_{i2} = 5$ .

b) Berechnen sie das Residuum  $\hat{u}_i$  für  $y_i = 9$ .

Für das Modell

$$x_{i2} = \delta_0 + \delta_1 \cdot x_{i1} + v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

gelangen sie zu folgenden OLS-Schätzungen:

$$\hat{x}_{i1} = 0,04 + 0,49 \cdot x_{i2}$$

(0,03)      (0,01)

Die Schätzung für das Modell

$$y_i = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_{i1} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

liegt Ihnen leider nicht vor.

c) Vermuten sie, dass  $\hat{\gamma}_1$  größer, kleiner oder gleich  $\hat{\beta}_1$  ist? Begründen sie Ihre Antwort!

d) Geben sie  $\hat{\gamma}_1$  an, falls möglich. Falls dies nicht möglich ist, begründen sie warum.

# Aufgabe 3

Eine Forscherin möchte untersuchen, ob es einen signifikanten Unterschied im Einkommen zwischen Männern und Frauen gibt. Dafür wurden die folgenden Daten erhoben:

Männer (Einkommen in Euro, arith. Mittel: 3550):

3500, 3200, 4000, 3800, 3900, 3600, 3700, 3100, 3400, 3300

Frauen (Einkommen in Euro, arith. Mittel: 3050):

3000, 3100, 3200, 2800, 2700, 2900, 3100, 3300, 3400, 3000

Gegeben sei das ökonometrische Modell  $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot d_i + u_i$ ,  $i = 1, \dots, 20$ , wobei  $y_i$  das Einkommen von Person  $i$  bezeichne,  $d_i$  den Wert 1 für Männer und den Wert 0 für Frauen annimmt und  $u_i$  eine unbeobachtbare Störgröße bezeichnet. Die Annahmen MLR 1, 3, 4, 5 und 6 seien erfüllt.

a) Formulieren sie die Nullhypothese  $H_0$  und die Alternativhypothese  $H_1$ .

b) Wie lauten  $\hat{\beta}_0$  und  $\hat{\beta}_1$ ?

Aus der OLS Schätzung des obigen Modells resultiert die Summe der quadrierten Residuen von  $SSR = 1250000$  und das Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,5$ .

c) Benutzen sie diese Ergebnisse um eine geeignete Teststatistik zu berechnen. Benennen sie den Test, den sie durchführen und erklären sie kurz ihr Vorgehen.

d) Entnehmen sie einer der Tabellen des Anhangs einen geeigneten kritischen Wert und treffen sie eine Testentscheidung.

# Aufgabe 4

Sie schätzen die Beziehung zwischen dem Einkommen ( $y$ , in Dollar) und den Ausgaben für Luxusgüter ( $x$ , in tausend Dollar) einer Stichprobe von 100 Haushalten aus dem Jahr 2024 (Modell 1, Standardfehler in Klammern):

$$\hat{y} = 50,1524 + 8,78349 x$$

(40,290)            (0,71447)

Sie speichern die quadrierten Residuen von Modell 1 und bezeichnen diese als  $\hat{u}^2$ . Sie regressieren nun  $\hat{u}^2$  auf eine Konstante und auf das Einkommen  $x$  und erhalten Modell 2 (Standardfehler in Klammern):

$$\widehat{\hat{u}^2} = -16914,8 + 1288,63 x$$

(11664,)            (206,84)

a) Benennen sie einen Test, welcher den Output von Modell 2 benötigt und erklären sie, wie dieser Test funktioniert.

b) Formulieren sie die entsprechende Nullhypothese und treffen sie anhand der vorliegenden Informationen eine Testentscheidung. Wie sind die Ergebnisse von Modell 1 im Lichte dieser Testentscheidung zu interpretieren?

Sie führen mit den logarithmierten quadrierten Residuen nun eine Hilfsregression durch und speichern die prognostizierten Werte als  $\widehat{\ln(\hat{u}_i^2)}$ .

c) Benennen sie die Annahme an die Störterme, welche diese Hilfsregression motiviert. Welche funktionale Beziehung zwischen den Störtermen und den Regressoren wird hier angenommen?

d) Benennen sie einen Schätzer für die Varianzen der Störterme aus Modell 1,  $\sigma_i^2$ , und beschreiben sie, wie die Daten  $y_i$  und  $x_i$  zu transformieren sind, um das in b) identifizierte Problem zu lösen.

# Aufgabe 5

Sei  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz Eins. Ein stochastischer Prozess  $\{u_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch:

$$u_t = \frac{1}{2}u_{t-1} + \epsilon_t,$$

wobei  $u_0 = 0$  gelte.

- Stellen sie  $u_t$  als Ausdruck von  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_t$  dar.
- Berechnen sie den Erwartungswert von  $u_t$ .
- Berechnen sie die Varianz von  $u_t$ . Gegen welchen Wert konvergiert diese Varianz für  $t \rightarrow \infty$ ?
- Berechnen sie die Kovarianzen von  $u_t$  und  $u_{t-1}$ , von  $u_t$  und  $u_{t-2}$  und von  $u_t$  und  $u_{t-3}$ . Welchen Ausdruck vermuten sie für die Kovarianz von  $u_t$  und  $u_{t-s}$  für  $0 < s < t$ ?

*Hinweis:* Für  $-1 < \delta < 1$  gilt:

$$\sum_{k=0}^t \delta^k = \frac{1 - \delta^{t+1}}{1 - \delta} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \delta}$$





















## Kritische Werte der $t$ -Verteilung

		Signifikanzniveau				
		10%	5%	2,5%	1%	0,5%
einseitig:		10%	5%	2,5%	1%	0,5%
zweiseitig:		20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits- grade	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	

# Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 1%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n - k - 1$	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
	11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
	13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
	14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
	15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
	16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
	17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
	18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
	19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
	20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
	21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
	22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
	23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
	24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
	25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
	26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
	27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
	28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
	29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
	30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
	40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
	60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
	90	6,93	4,85	4,01	3,54	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52
	120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47
	$\infty$	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

## Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 5%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n - k - 1$	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
	25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
	26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
	90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94
	120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
	$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

## Kritische Werte der $\chi^2$ -Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits- Grade	1	2,71	3,84	6,63
	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89