Übung zur Vorlesung Ökonometrie
Masterstudiengang
Sommersemster 2025

Aufgabenblatt 1

1.

(a) Für eine Zufallsvariable x gilt $E(x) = 0$ und $Var(x) = 12$. Wie hoch ist der Erwartungswert von x^2?

(b) Definieren Sie die Kovarianz zwischen zwei Zufallsvariablen x und y.

(c) Definieren Sie die Stichprobenkovarianz zwischen zwei Vektoren von Beobachtungsdaten x und y für eine Stichprobe vom Umfang n.

(d) Zeigen Sie: wenn für eine der beiden Zufallsvariablen x oder y der Erwartungswert Null ist, gilt $Cov(x, y) = E(x \cdot y)$.

(e) Welche Folge hat stochastische Unabhängigkeit zwischen x und y für die Kovarianz $Cov(y, x)$?

(f) Welche Folge hat stochastische Unabhängigkeit zwischen x und y für den bedingten Erwartungswert $E(y|x)$?

2.

(a) Sei $\mathbf{x}$ der Spaltenvektor $(x_1, ..., x_n)'$. Welche Dimension hat $\mathbf{x}'\mathbf{x}$?

(b) Geben Sie allgemein einen Summenausdruck für $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ an.

(c) Welche Dimension hat $\mathbf{x}\mathbf{x}'$?

(d) Ermitteln Sie die beiden vorigen Ausdrücke für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) Betrachten Sie die $m \times n$ Matrix A mit typischem Element a_{ij}. Unter welcher Bedingung bezeichnet man A als symmetrische Matrix?

(f) Für diese Aufgabe benötigen Sie die folgenden Fakten über transponierte Matrizen: 1) $(A')' = A$, und 2) wenn A die Dimension $m \times n$ und die Matrix B die Dimension $n \times k$ hat, gilt $(AB)' = B'A'$. Zeigen Sie, dass für eine $n \times k$ Matrix X gilt, dass $X'X$ existiert und symmetrisch ist.

(g) Definieren Sie die folgenden Begriffe:

   i. lineare Unabhängigkeit von Vektoren,
   ii. Rang einer $n \times k$ Matrix mit $k \leq n$,
   iii. Nichtsingularität einer quadratischen $(k \times k)$ Matrix,
   iv. Einheitsmatrix,
   v. Inverse einer quadratischen Matrix.

(h) Unter welcher Bedingung existiert die Inverse einer quadratischen Matrix?

(i) Berücksichtigen Sie folgende Rechenregeln: wenn die Inversen der beiden $(n \times n)$ - Matrizen A und B existieren, gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Wenn A invertierbar ist, gilt $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}$. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie $(A'B)^{-1}$.

3. Betrachten Sie die Einfachregression

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

mit $E(u_i|x_i) = 0$.

(a) Ermitteln Sie die Schätzformeln für $\widehat{\beta}_{0,1}$ mit der Momentenmethode.

(b) Sie haben $n = 102$ Beobachtungspunkte und die Varianz von y_i in der Stichprobe ist 1.36, diejenige von x_i ist 0.25, und ihre Kovarianz ist 0.3 (Stichprobenvarianzen und -kovarianzen sind mit $n-1$ im Nenner berechnet). Die Summe der quadrierten Residuen ist 101. Ermitteln Sie die Schätzwerte für $\widehat{\beta}_1$ und R^2.

4. Ein Unternehmen ermittelt für den Zusammenhang des Umsatzes y_i von den Werbeausgaben x_i (jeweils in 1000€) die Beziehung $\widehat{y}_i = 1000 + 0.28x_i$.

(a) Welche Interpretation hat der Parameter von x_i hier?

(b) Wie würde sich der erwartete Umsatz ändern, wenn die Werbeausgaben um 500.000€ erhöht würden?

(c) Der Mittelwert von x in der Stichprobe ist $\overline{x} = 800$. Wie hoch ist der durchschnittliche Umsatz in der Stichprobe in € ausgedrückt?

(d) Wie hoch ist der Stichprobenmittelwert der fitted values $\widehat{\mathbf{y}}$?

(e) Wie hoch ist die geschätzte Elastizität des Umsatzes bezüglich der Werbeausgaben an der Stelle der Stichprobenmittelwerte?

5. Ihnen liegt eine Stichprobe mit den Beobachtungswerten $\mathbf{y} = (4, 10, 22, 4)$ und $\mathbf{x} = (8, 7, 4, 1)$ vor. Sie spezifizieren für den Zusammenhang das Modell $\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1\mathbf{x} + \mathbf{u}$.

(a) Ermitteln Sie die OLS - Schätzer der Parameter $\beta_{0,1}$.

(b) Ermitteln Sie die fitted values $\widehat{\mathbf{y}}$.

(c) Ermitteln Sie die Residuen $\widehat{\mathbf{u}}$.

(d) Welches Vorzeichen hat der Stichproben-Korrelationskoeffizient zwischen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$?

(e) Ermitteln Sie SST, SSE, SSR und R^2.

6. Wenn Sie aus einer Regression $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ die Residuen $\widehat{u}_i$ ermitteln, und diese auf eine Konstante und die Variable x_i regressieren gemäß $\widehat{u}_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + v_i$ (mit v_i dem Fehlerterm), was ist dann das Schätzergebnis für α_0 und α_1? Interpretation?

7. Beschreiben Sie jeweils, ob und ggf. wie Sie die folgenden Modelle als multiples lineares Regressionsmodell schätzen können, und geben Sie jeweils an, wie Sie die Elastizität von y_i bezüglich x_{i1} ermitteln würden.

   (a) $y_i = \beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2} \exp(u_i)$

   (b) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i1}^2 + u_i$

   (c) $y_i = (\beta_0 + \beta_1 x_{i1})^{\beta_2} + u_i$

   (d) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_1 x_{i2} + \beta_2 x_{i1} x_{i2} + u_i$

   (e) $\ln y_i = \beta_0 + \ln x_{i1} + \beta_1 x_{i2} + u_i$

8. Sie wollen den Einfluss der Unternehmensgröße g_i auf die Managergehälter m_i untersuchen. Außerdem vermuten Sie, dass die Branche des Unternehmens eine Rolle für die Vergütung des Managements spielt. In Ihren Daten sind alle Unternehmen nach zwei Branchen, produzierendes Gewerbe p_i und Dienstleistungssektor d_i, klassifiziert. Es ist also die Variable $p_i = 1$, wenn das i-te Unternehmen im produzierenden Gewerbe tätig ist, und $p_i = 0$, wenn es im Dienstleistungssektor tätig ist. Entsprechend ist $d_i = 1$, wenn das i-te Unternehmen im Dienstleistungssektor tätig ist, und null, wenn es im produzierenden Gewerbe tätig ist.

   (a) Sie stellen die Spezifikation $m_i = \beta_0 + \beta_1 g_i + \beta_2 p_i + \beta_3 d_i + u_i$ auf. Welches Problem besteht hier?

   (b) Schlagen Sie eine alternative Spezifikation vor, und erläutern Sie die Interpretation von deren Parametern.

9. In dem einfachen Regressionsmodell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ sei die Variable x_i in 1000€ gemessen, der mit OLS geschätzte Koeffizient der Steigung ist $\widehat{\beta}_1$.

   (a) Sie ändern nun die Skalierung der Variablen x_i, und messen diese nunmehr in €. Wie ändert sich der Schätzwert $\widetilde{\beta}_1$ nach der Umskalierung relativ zum vorigen Schätzwert $\widehat{\beta}_1$?

   (b) Wie unterscheidet sich die Residuen beider Spezifikationen (vor bzw. nach Umskalierung)?

   (c) Durch einen Tippfehler waren die Daten für y_i leider um den Betrag z zu niedrig eingegeben worden. Wie ändern sich die Koeffizientenschätzer (ausgehend von $\widehat{\beta}_{0,1}$), wenn Sie statt y_i nunmehr die korrekten Werte in der Regression verwenden?