Übung 13 – Beweisen II
Lösung

Aufgabe 1: Vollständige Induktion I

Beweisen Sie den untenstehenden Satz gemeinsam (Gruppenarbeit). Denken Sie dabei vor allem an die Struktur der vollständigen Induktion. Welche Schritte müssen Sie durchlaufen?

Satz (Beweis durch vollständige Induktion)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Beweis per Induktion nach n
Induktionsanfang:
Für n = 1 gilt: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2-1 = 1 = 1^2$
➔ Die Aussage stimmt für n = 1

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch für n+1 ($n \in \mathbb{N}$):
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

Induktionsschritt:
$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)$

= $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + [2(n+1)-1]$ I (n+1) aus der Summe herausziehen

= $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2n + 1$ I Klammern auflösen (AG, DG)

= $n^2 + 2n + 1$ I IV einsetzen

= $(n+1)^2$ I 1. binomische Formel

Aufgabe 2: Vollständige Induktion II
Bearbeiten Sie den Ihnen zugeordneten Beweis.
Wie können Sie der anderen Gruppe Ihren Beweis erklären? Überlegen Sie, welche Schritte Sie genau vollziehen und welche Erklärungen jeweils notwendig sind.

(Beweis durch vollständige Induktion) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \mid n^3 + 2n$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $3 \mid n^3 + 2n$.

Beweis per Induktion nach n
Induktionsanfang:
Für n = 1 gilt: $1^3 + 2*1 = 3$ und 3I3.
➔ Die Aussage stimmt für n = 1.

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$3 \mid n^3 + 2n$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt die Behauptung auch für n+1 ($n \in \mathbb{N}$):

$$3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$$

Induktionsschritt:
$(n+1)^3 + 2(n+1)$
= $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$ I 1. Binomische Formel hoch 3 & DG
= $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ I KG
= $(n^3 + 2n) + 3 * (n^2 + n + 1)$ I KG,AG, DG

Der erste Summand ist nach der Induktionsvoraussetzung durch 3 teilbar. Der zweite Summand ist ein Vielfaches von 3 und somit ebenfalls durch 3 teilbar. Folglich ist auch die gesamte Summe durch 3 teilbar.

(Beweis durch vollständige Induktion)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Beweis per Induktion nach n
Induktionsanfang:
Für n = 1 gilt: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1*4}{4} = \frac{1^2(2)^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

➔ Die Aussage stimmt für n = 1.

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch für n+1 ($n \in \mathbb{N}$):
$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Induktionsschritt:
$\sum_{i=1}^{n+1} i^3$

$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$ I (n+1) aus der Summe herausziehen

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$ I IV einsetzen

$= \frac{n^2(n+1)^2+4*(n+1)^3}{4}$ I Mit 4 erweitern -> Brüche gleichnamig machen

$= \frac{(n+1)^2*(n^2+4(n+1))}{4}$ I DG, (n+1)² ausklammern

$= \frac{(n+1)^2*(n^2+4n+4)}{4}$ I DG

$= \frac{(n+1)^2*(n+2)^2}{4}$ I 1. binomische Formel