

Synopse zur 15. Vorlesung – 20.09.2024

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel V – Reelle Zahlen

Glaubhafte Rechenregeln für Grenzwerte

Falls die Folgen $a, b, c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Grenzwerte besitzen und für alle $n \in \mathbb{N}$ $c_n = a_n + b_n$ gilt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Falls $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Eine Anwendung der Monotonie-Eigenschaft findet sich im Babylonischen Verfahren bzw. Heron-Algorithmus zum Wurzelziehen:

Babylonisches Verfahren oder Heron-Algorithmus

Definition

Es seien $a > 1$ und $b > 0$ sowie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$x_0 = b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

Behauptung: Die in $(*)$ definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist antiton, beschränkt und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Beweis der Behauptung

(1) Zeige zunächst, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (dann darf man damit dividieren) durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

(IA) $n = 0$:

Es gilt $x_0 = b > 0$, ist also erfüllt.

(IV) Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n > 0$.

(IS) $n \mapsto n + 1$:
Es gilt

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} \left(\underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0, \text{ mit IV}} \right) > 0.$$

Also gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Zeige nun, dass $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist nämlich

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{\overbrace{(x_n - \sqrt{a})^2}^{\geq 0 \text{ (quadrat)}}}{\underbrace{2x_n}_{>0 \text{ nach (1)}}} \geq 0.$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \stackrel{2}{\leq} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{a} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Daher gilt $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (x_n) ist also antiton, und zusammen mit (2) ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

(4) Identifiziere nun den Grenzwert der Folge $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Lasse dazu $n \rightarrow \infty$ auf beide Seiten in (*) laufen. Es gilt

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right). \end{aligned} \tag{**}$$

Bemerkung: Insbesondere ist x dann ein Fixpunkt der Iteration (*), es gilt also

$$x_n = x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x$$

Löse nun (**) auf: Es gilt

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x + \frac{a}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}.$$

Wegen $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss auch $x \geq 0$ gelten, und man erhält $x = \sqrt{a}$ als Lösung. Dies endet schon den Beweis. Wir geben noch eine heuristische Begründung an.

(5) *Fehlerabschätzung:*

Wegen (2) gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} \stackrel{a \geq 1}{\leq} \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a})^2.$$

Ist beispielsweise $|x_n - \sqrt{a}| = 10^{-k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} 10^{-2k}.$$

In der Tat verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt die Anzahl der “korrekten (Dezimal)Stellen” von x_n . So gilt zum Beispiel für $a = 2$ und $b = 1$:

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{17}{12} = 1,416\dots$$

$$x_3 = \frac{577}{408} = 1,414215\dots,$$

im Vergleich zu $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ □

Beobachtung. (i) Sind $a, b \in \mathbb{Q}$, so ist auch $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, auch wenn der Limes $\sqrt{a}$ irrational ist.

(ii) Der Startwert $x_0 = b$ beeinflusst den Grenzwert sowie die Konvergenzrate nicht.

Eine Erweiterung dieses Verfahrens zum Ziehen der k -ten Wurzel ist gegeben durch:

Verfahren zum Ziehen der k -ten Wurzel

Es seien $a \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $b^k \geq a$ und

$$x_0 = b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

Exponentielles Wachstum

Eine Anlage von Anfangskapital A mit jährlichem Zinssatz $p > 0$ ergibt nach einem Jahr das Endkapital

$$E = A \cdot (1 + \alpha), \quad \text{mit } \alpha = \frac{p}{100}.$$

Nach $t \in \mathbb{N}$ Jahren ohne Zinseszins hat man

$$E = A \cdot (1 + t \cdot \alpha).$$

Haben wir eine Zinsauszahlung zu den Zeitpunkten $\frac{t}{2}$ und t , so gilt

$$E = \left(A \left(1 + \frac{t}{2} \alpha \right) \right) \cdot \left(1 + \frac{t}{2} \alpha \right) = A \left(1 + \frac{t}{2} \alpha \right)^2.$$

Bei n Zinstermen hat man entsprechend Zeitpunkte

$$\frac{t}{n}, 2\frac{t}{n}, \dots, (n-1)\frac{t}{n}, n\frac{t}{n} = t$$

und damit eine Zinsauszahlung von $E = A \left(1 + \frac{t}{n} \alpha \right)^n$.

Einer “stetigen Verzinsung” entspricht also der Limes $n \rightarrow \infty$. Dies motiviert die Untersuchung der Folge

$$(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Das Kapital wächst mit Zinseszins schneller als ohne. Daraus folgt, dass die Folge $(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für $x > 0$ isoton bezüglich $n \in \mathbb{N}$ ist.

Betrachte nun die modifizierte Folge gegeben durch

$$f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} = e_n(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

wobei $f_n(x) > e_n(x)$ für $x > 0$.

Man kann zeigen, dass die Folge $(f_n(x))_{n \geq n_x}$ streng antiton ist. Insgesamt gilt also für $x > 0$:

$$e_1(x) < e_2(x) < e_3(x) < \dots < f_3(x) < f_2(x) < f_1(x).$$

Damit ist $(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ streng isoton und von oben beschränkt und $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ streng antiton und von unten beschränkt. Nach dem Satz der letzten Vorlesung sind die Folgen dann konvergent. Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) =: e(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Da bekannterweise $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1$, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x),$$

es gilt also $e(x) = f(x)$.

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Damit haben wir die Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x)$$

definiert. Speziell heißt

$$e := \exp(1) \quad \text{die Eulersche Zahl.}$$

Insbesondere ist $e \in (2, 3)$: Setzt man $e_n := e_n(1)$ bzw. $f_n := f_n(1)$ für $n \in \mathbb{N}$, gilt nämlich

$$2 = e_1 < e < f_5 < 3.$$

Die ersten Dezimalstellen lauten 2,718281828...