technische universität dortmund

Vorkurs – Vorlesung 13
Beweisen II

Laufende Fragensammlung

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Einstieg – was ist das überhaupt?
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
   a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

Grundlegendes

- **Was ist alles wichtig im Zusammenhang mit Beweisen?**

Definition:

Satz (oder Theorem):

Beweis:

Vermutung:

Axiom:

Grundlegendes

- **Anforderungen an Beweise**

- Lückenlosigkeit und Vollständigkeit
- Minimalität
- Formalisierung in Struktur, Sprache und Symbolik

Grundlegendes

- **Funktionen von Beweisen**

Verifikation:

Erklärung:

Kommunikation:

Entdecken:

Systematisierung:

(Villiers, 1990)

Grundlegendes

- **Funktionen von Beweisen**

- Verifikation:
  Die Wahrheit einer Aussage soll bewiesen (verifiziert) werden.
- Erklärung:
  Die Leser*innen sollen verstehen, warum eine Behauptung gilt.
- Kommunikation:
  Ein Beweis vermittelt mathematisches Wissen und erlaubt es, die Wahrheit einer Aussage zu prüfen (und sich darüber auszutauschen).
- Entdecken:
  Gründe für die Richtigkeit einer Aussage werden beim Beweisen entdeckt.
- Systematisierung:
  Beweise stellen Zusammenhänge zwischen Sätzen her. (Welche bekannten Sätze und Definitionen spielen bei einem Beweis eine Rolle? Wie hängen die Sätze einer Theorie miteinander zusammen?)

(Villiers, 1990)

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
    a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

Beweistypen aus fachlicher Perspektive

Was kommt heraus, wenn man die Zahlen von 1 bis 100 addiert?

Beweistypen aus fachlicher Perspektive

4

Carl Friedrich Gauß gehört zu den bedeutendsten Mathematikern, die je gelebt haben. Er wurde 1777 in Braunschweig geboren.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Als Carl Friedrich Gauß 10 Jahre alt war, stellte sein Lehrer der Klasse eine große Rechenaufgabe:
Berechnet die Summe aller Zahlen von 1 bis 100.
Viele Kinder rechneten 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100.
Aber Carl Friedrich überlegte ein wenig und nannte als Ergebnis die Multiplikation **50 · 101**.
Warum passt die Multiplikation zur großen Rechenaufgabe?

4

Carl Friedrich Gauß gehört zu den bedeutendsten Mathematikern, die je gelebt haben. Er wurde 1777 in Braunschweig geboren.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Als Carl Friedrich Gauß 10 Jahre alt war, stellte sein Lehrer der Klasse eine große Rechenaufgabe:
Berechnet die Summe aller Zahlen von 1 bis 100.
Viele Kinder rechneten 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100.
Aber Carl Friedrich überlegte ein wenig und nannte als Ergebnis die Multiplikation **50 · 101**.
Warum passt die M
Rechenaufgabe?

Überlegen Sie gemeinsam: Wie sehen die unterschiedlichen Begründungsformen, die Sie gestern kennengelernt haben, für dieses Beispiel aus?

Reminder: Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Darstellungsebene/ Formalisierungsgrad	symbolisch	ikonisch
beispielgebunden	beispielgebunden symbolisch	beispielgebunden ikonisch
generell	generell symbolisch	generell ikonisch

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe der Zahlen 1 bis 100 entspricht 5050.

Beispielgebunden symbolisch

Beispiel bereits vorhanden

<u>Beweis:</u>

1	+	100	=	101
2	+	99	=	101
3	+	98	=	101
4	+	97	=	101
5	+	96	=	101
	⋮			⋮
49	+	52	=	101
50	+	51	=	101

<u>Schlussfolgerung:</u>

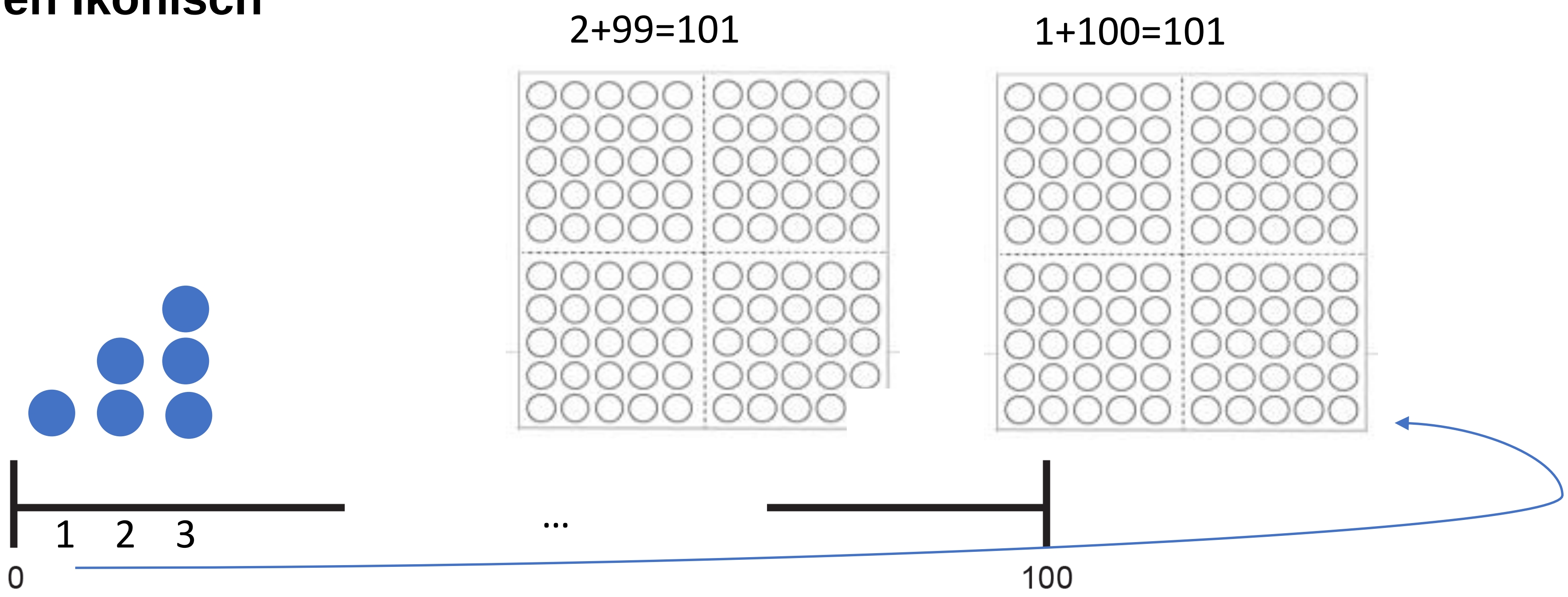
Da sich die Summe der aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 100 in 50 Teilsummen aufteilen lässt, die jeweils 101 ergeben, folgt daraus, dass das Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$ ist.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe der Zahlen 1 bis 100 entspricht 5050.

Beispielgebunden Ikonisch

Oder ist das schon generell ikonisch?



<u>Schlussfolgerung:</u>

Da sich die Summe der aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 100 in 50 Teilsummen aufteilen lässt, die jeweils 101 ergeben, folgt daraus, dass das Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$ ist.

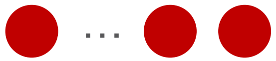
Beweistypen aus didaktischer Perspektive

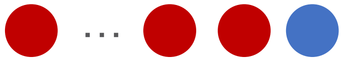
Erinnerung:

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

generell ikonisch

<u>Voraussetzungen:</u>

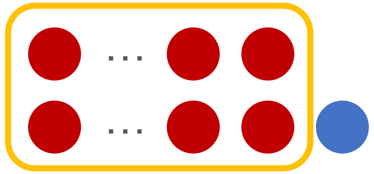
$a = n$ 

$b = n + 1$ 

<u>Beweis:</u>

$a + b = n + (n + 1) = 2 \cdot n + 1$

$2 \cdot n \qquad + 1$



<u>Schlussfolgerung:</u>

Da sich die Summe aus a + b als immer Plättchen mit der Länge 2n + 1 darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Diese Beweisführung gilt analog für alle natürlichen Zahlen a, b, mit b= a+1.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Erinnerung:

generell symbolisch

Voraussetzungen:

$a = n$

$b = n + 1$

Betrachtung der Voraussetzungen

Beweis:

$a + b = n + (n + 1) = 2 \cdot n + 1$

Behauptung mit Termumformungen herleiten

Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus a + b als 2n+ 1 darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Diese Beweisführung gilt analog für alle natürlichen Zahlen a, b, mit b= a+1.

deduktive Schlussfolgerung

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
    a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

Beweis durch vollständige Induktion

- Beweismethode, um eine Behauptung für alle natürlichen Zahlen nachzuweisen

> **Satz: Prinzip der vollständigen Induktion**
>
> Es sei $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine unendliche Folge von Aussagen. Es gelte
>
> (1) $A(n)$ ist wahr für <u>ein</u> $n \in \mathbb{N}$ und
>
> (2) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.
>
> Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

- *Bemerkung*
- Die Prüfung von Bedingung (1) wird als der *Induktionsanfang* (I.A.) bezeichnet.
- Die Prüfung von Bedingung (2) wird als der *Induktionsschritt* (I.S.) bezeichnet.

Beweis durch vollständige Induktion

- **Peano-Axiome**

Axiom 1: 1 ist eine natürliche Zahl

Axiom 2: Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.

Axiom 3: Es gibt keine natürliche Zahl, dessen Nachfolger 1 ist.

Axiom 4: Unterschiedliche natürliche Zahlen haben unterschiedliche Nachfolger.

Axiom 5: Es sei *M* eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften: 1 gehört zu *M* und wenn *x* zu *M* gehört, so gehört auch der Nachfolger von *x* zu *M*. Dann umfasst *M* alle natürlichen Zahlen.

Induktionsaxiom
(eines der grundlegenden
Prinzipien der Mathematik)

Beweis durch vollständige Induktion

- **Inhaltliche Vorstellung**

Behauptung
Für alle passend aufgestellten Dominosteine gilt:
werden die Dominosteine *angeschubst*, so fallen sie um

I.A.	Die Aussage gilt für $n = 1$		**I.A.**	Der erste Stein fällt um	
I.V.	WENN	die Aussage gilt für ein n	**I.V.**	WENN	der Stein Nr. n fällt um
I.B.	DANN	die Aussage gilt für $n + 1$	**I.B.**	DANN	Stein Nr. $n + 1$ fällt um

→ Prüfen dieser Behauptung im Induktionsschritt

Beweis durch vollständige Induktion

- **Ausgangsbeispiel: Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100**

1	+	100	=	101
2	+	99	=	101
3	+	98	=	101
4	+	97	=	101
5	+	96	=	101
	⋮			⋮
49	+	52	=	101
50	+	51	=	101

Behauptung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100}{2} \cdot 101 = 5050$$

Beweis durch vollständige Induktion

Behauptung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Induktionsanfang

Die Behauptung gilt für $n = 1$, denn es gilt $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2} \cdot (1+1)$

WENN Annahme: Es gelte $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsannahme/-voraussetzung (I.V.)

DANN zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}$

Induktionsbehauptung (I.B.)

Beweis durch vollständige Induktion

zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

Induktionsschritt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

Anwenden der Induktionsannahme/-voraussetzung

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\overset{\text{DG}}{=} \left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot(n+1)$$

$$= \left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot(n+1)$$

$$\overset{\text{KG}}{=} \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz: Dreiecks und Quadratzahlen

Die Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl. Formal:

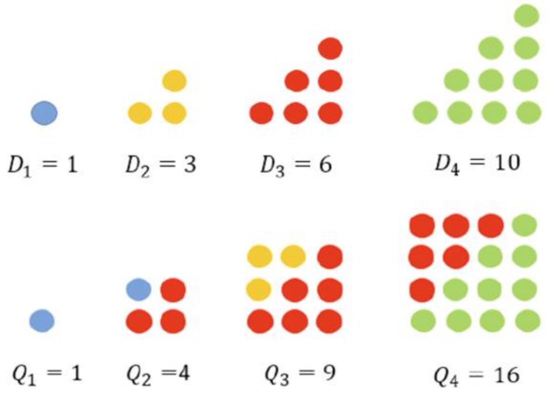
$$D_n + D_{n+1} = Q_{n+1}$$

Legt man verschiedene Dreiecks- und Quadratzahlen mit Plättchen, wird der Zusammenhang zwischen ihnen schnell ersichtlich.
Aber warum ist das so?

Skizzieren Sie selbst die Aussage mithilfe von Punktemustern, um sich den Zusammenhang zu verdeutlichen.

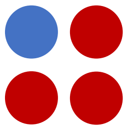
Legt man zwei gleiche Dreieckszahlen aneinander, so muss man, um ein Quadrat zu erhalten, die Diagonale doppelt belegen. Zieht man die Anzahl der sich überlappenden Plättchen ab, so erhält man die nächstkleinere Dreieckszahl.

Beweis durch vollständige Induktion



- **Satz: Dreiecks- und Quadtratzahlen**

Behauptung: $D_n + D_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)^2 = Q_{n+1}$



Beweis: *I.A.* Für $n = 1$ gilt: $D_1 + D_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = Q_2$

I.V. Es gelte $D_n + D_{n+1} = Q_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.B. zu zeigen: $D_{n+1} + D_{n+2} = (n+2)^2 = Q_{n+2}$

I.S.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i + \sum_{i=1}^{n+2} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) + \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+2)$$

KG, I.V.

$$= (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)$$

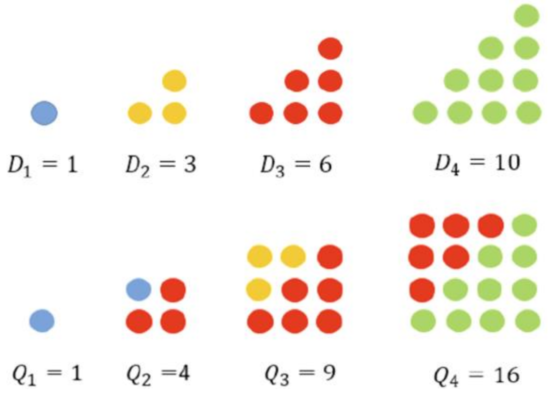
$$= (n^2 + 2n + 1) + (2n + 3)$$

AG, KG

$$= n^2 + 4n + 4$$

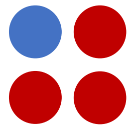
$$= (n+2)^2$$

Beweis durch vollständige Induktion



- **Satz: Dreiecks- und Quadtratzahlen**

Behauptung: $D_n + D_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)^2 = Q_{n+1}$



Beweis: *I.A.* Für $n = 1$ gilt: $D_1 + D_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = Q_2$

I.V. Es gelte $D_n + D_{n+1} = Q_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.B. zu zeigen: $D_{n+1} + D_{n+2} = (n+2)^2 = Q_{n+2}$

I.S.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i + \sum_{i=1}^{n+2} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) + \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+2)$$

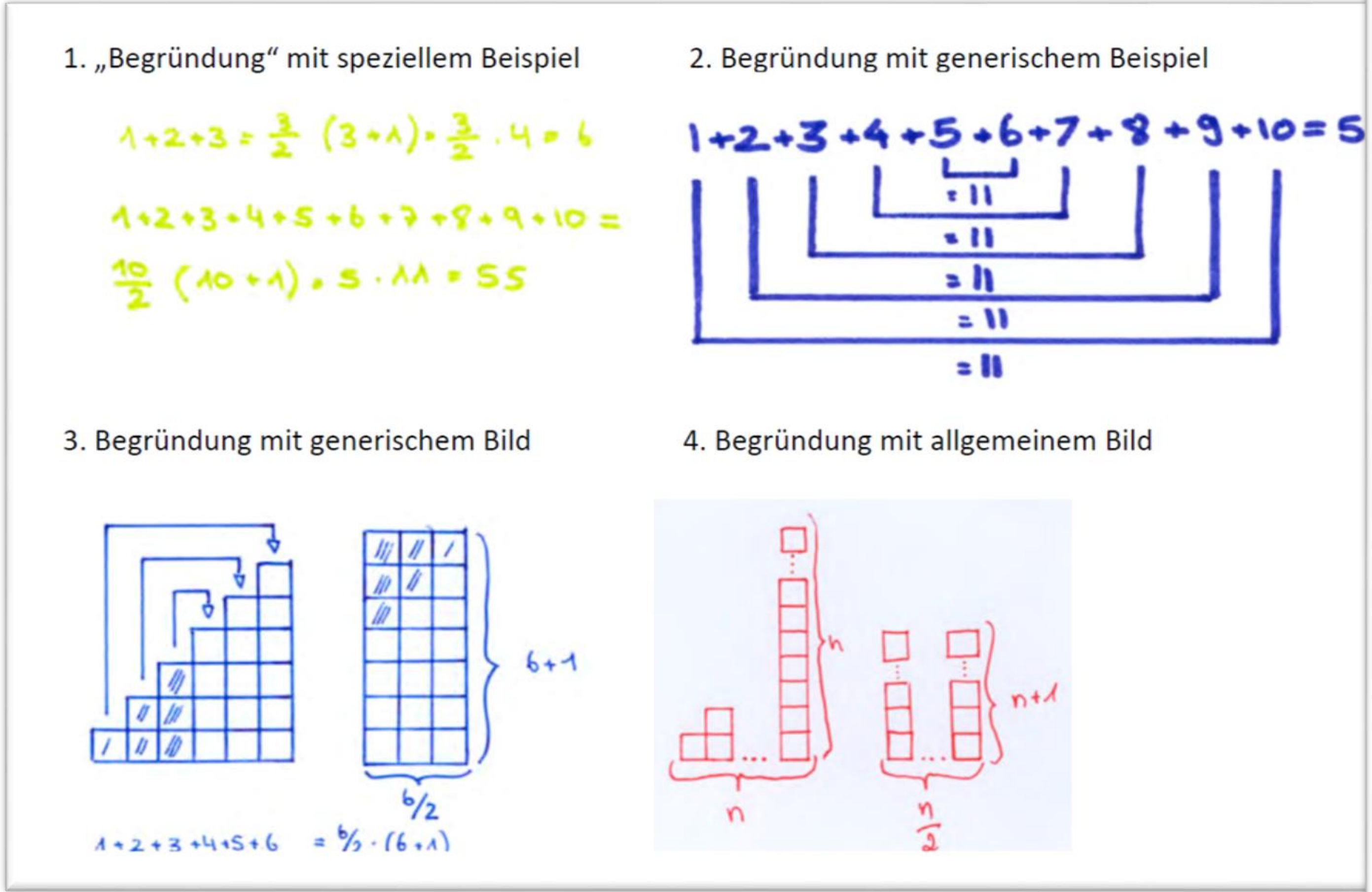
$$\overset{\text{KG, I.V.}}{=} (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)$$

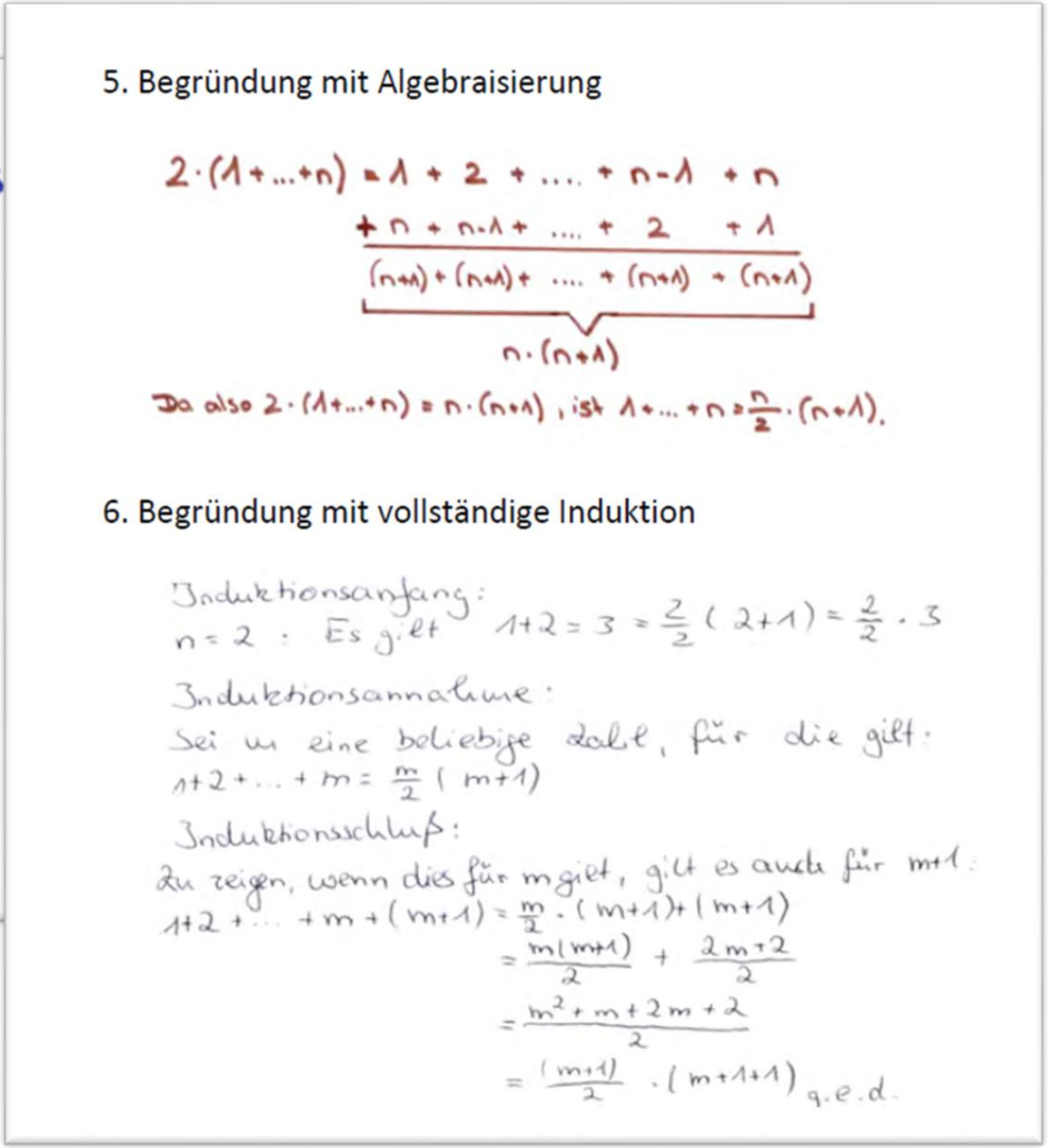
$$= (n^2 + 2n + 1) + (2n + 3)$$

$$\overset{\text{AG, KG}}{=} n^2 + 4n + 4$$

$$= (n+2)^2$$

Begründen oder Beweisen?





Was überzeugt Sie am meisten?
Was ist der Unterschied zwischen den unterschiedlichen Begründungen und Beweisen?

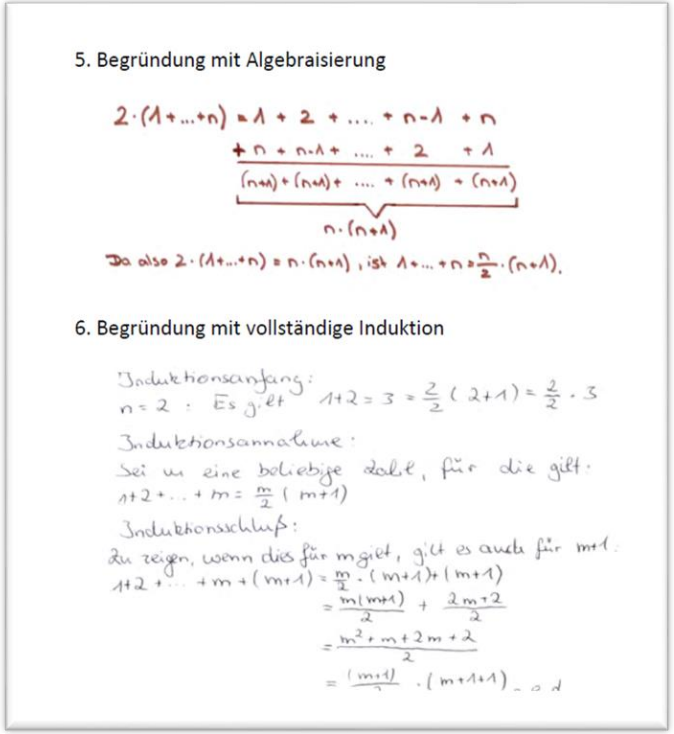
Meyer, Michael und Susanne Prediger
Vorversion des in PM-Heft 30 erschienenen Artikels. Praxis der Mathematik in der Schule 51(30), S

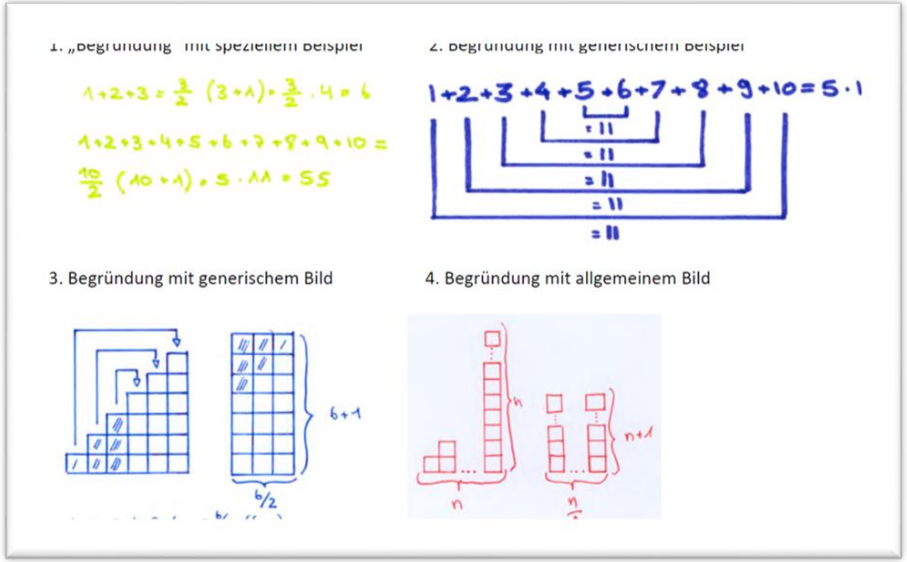
Grundlegendes

- **Funktionen von Beweisen**

Welche Funktionen von Beweisen werden hier berücksichtigt? Was ist für Sie am wichtigsten?

- Verifikation:
  Die Wahrheit einer Aussage soll bewiesen (verifiziert) werden.
- Erklärung:
  Die Leser*innen sollen verstehen, warum eine Behauptung gilt.
- Kommunikation:
  Ein Beweis vermittelt mathematisches Wissen und erlaubt es, die Wahrheit einer Aussage zu prüfen (und sich darüber auszutauschen).
- Entdecken:
  Gründe für die Richtigkeit einer Aussage werden beim Beweisen entdeckt.
- Systematisierung:
  Beweise stellen Zusammenhänge zwischen Sätzen her. (Welche bekannten Sätze und Definitionen spielen bei einem Beweis eine Rolle? Wie hängen die Sätze einer Theorie miteinander zusammen?)





(Villiers, 1990)

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
   a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

Weitere Beweistypen

1. **Widerlegen durch Gegenbeispiel (Widerlegen einer Vermutung)**

   Ein Gegenbeispiel zur Implikation $A \Rightarrow B$ ist ein Sachverhalt, bei dem A wahr und B falsch ist. Dadurch wird die Vermutung $A \Rightarrow B$ widerlegt, d.h. gezeigt, dass $A \Rightarrow B$ kein Satz ist.

2. **Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)**

   $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} \Rightarrow \emptyset)$

3. **Kontraposition**

   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
   a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

Beweis-Check

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \mid (2n+2)^2 + 2n = (4n^2 + 8n + 4) + 2n$

Beweis:

I.A. Für $n = 1$ gilt:

I.V. Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.B. zu zeigen:

Induktionsschritt

$$(2(n+1)+2)^2 + 2(n+1) =$$

$$= (2n+2)^2 + 2n + 2(4n+7)$$

Beweis-Check

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \mid (2n+2)^2 + 2n = (4n^2 + 8n + 4) + 2n$

Beweis:

I.A. Für $n = 1$ gilt: $2 \mid (2 \cdot 1 + 2)^2 + 2 \cdot 1 = 16 + 2 = 18$

I.V. Es gelte $2 \mid (2n+2)^2 + 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.B. zu zeigen: $2 \mid (2(n+1)+2)^2 + 2(n+1)$

Induktionsschritt

$(2(n+1)+2)^2 + 2(n+1) =$

$$
\begin{aligned}
&(2(n+1)+2)^2 + 2(n+1) \\
&= (2n+2+2)^2 + 2n + 2 \\
&= (2n+4)^2 + 2n + 2 \\
&= 4n^2 + 16n + 16 + 2n + 2 \\
&= 4n^2 + 18n + 18 \\
&= (4n^2 + 8n + 4) + 2n + 8n + 14 \\
&= (2n+2)^2 + 2n + 8n + 14 \\
&= (2n+2)^2 + 2n + 2(4n+7)
\end{aligned}
$$

$= (2n+2)^2 + 2n + 2(4n+7)$

Beweis-Check

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen a, b, c, d gilt: Aus $a \mid b$ und $c \mid d$ folgt $a^2 \cdot c^2 \mid b^2 \cdot d^2$

Voraussetzungen: $a \mid b \Rightarrow b =$ ______ $mit\ n \in \mathbb{N}$

$c \mid d \Rightarrow d =$ ______ $mit\ m \in \mathbb{N}$

Beweis: $b^2 \cdot d^2 =$ ______

$= a^2 \cdot c^2 \cdot ($ ______ $)$

Schlussfolgerung: Da ______ eine natürliche Zahl ist, kann nach der Teilbarkeitsbeziehung gefolgert werden, dass ______ gilt.

Fragen? Vielen Dank!