

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel V – Reelle Zahlen

5.3 Irrationale Zahlen: Wurzeln

Satz

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $x^m = a$. Diese Zahl bezeichnen wir als m -te Wurzel aus a und schreiben dafür

$$x = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

Beweis

Für $m = 1$ ist das klar, einfach $x = a$ wählen. Also können wir $m \geq 2$ annehmen. Wir führen den Beweis in zwei Schritten aus: Zeige zunächst, dass es höchstens eine Lösung der Gleichung gibt und danach, dass es mindestens eine gibt.

- Eindeutigkeit. Hier machen wir einen Widerspruchsbeweis.

Seien x, y positive reelle Zahlen, mit $x^m = y^m = a$ und $x \neq y$. ObdA kann ich annehmen $0 < y < x$. Vollständige Induktion über m liefert dann, dass $0 < y^n < x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist $x^m \neq y^m$, also können sie nicht beide gleich a sein.

- Existenz. Betrachte die Menge

$$A := \{b \in \mathbb{R} \mid b > 0 \text{ und } b^n < a\}$$

und $t := \frac{a}{a+1} < 1$. Damit $t \in (0, 1)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$:

$$t^m = t \cdot t^{m-1} < t = \frac{a}{a+1} < a \implies t \in A$$

Sei $y \geq 1 + a > 1$. Dann gilt:

$$y^m = y \cdot \underbrace{y^{m-1}}_{>1} > y \geq 1 + a > a > b^m \quad \text{für alle } b \in A, \quad \text{nach Def. von } A.$$

Daraus folgt:

einerseits $y \notin A$;

andererseits $y > b$ für alle $b \in A$, sonst wäre $y \leq b$, dann wäre induktiv auch $y^m \leq b^m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $y^m > b^m$.

Dies gilt für alle $y \geq a + 1$, insbesondere auch für $y = a + 1$. Jedes $y \geq a + 1$ ist somit eine obere Schranke an die Menge A .

Die kleinste obere Schranke ist somit nicht größer als $1 + a$, insbesondere eine endliche Zahl, nenne sie $x := \sup A$.

Behauptung: Es gilt $x^m = a$ (“Kandidat identifiziert”).

Beweis durch Widerspruch:

- Angenommen $x^m > a$. Dann $x^m - a > 0$. Setze dann

$$0 < h := \frac{x^m - a}{mx^{m-1}} < \frac{x^m}{mx^{m-1}} = \frac{x}{m} \leq x \quad \text{da ja } m \in \mathbb{N}.$$

Wegen $x = \sup A$ ist die “Verkleinerung” $x - h$ keine obere Schranke mehr von A . Daher existiert ein Element $b = b_h \in A$ mit $b > x - h > 0$.

Für allgemeine $0 < s < r$ liefert die Summenformel aus dem Korollar

$$r^m - s^m = (r - s) \sum_{j=0}^{m-1} r^j \underbrace{s^{m-1-j}}_{\leq r^{m-1-j}} \leq (r - s)r^{m-1}m$$

Setze ein in der Summenformel $s := x - h < x =: r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^m - (x - h)^m &\leq (x + h - x) \cdot m \cdot x^{m-1} \\ &= hm \cdot x^{m-1} \\ &= \frac{x^m - a}{mx^{m-1}} \cdot m \cdot x^{m-1} \\ &= x^m - a \end{aligned}$$

Also $a \leq (x - h)^m$. Wegen $x - h < b$ gilt auch $(x - h)^m < b^m$ und insgesamt:

$$a \leq (x - h)^m < b^m \Rightarrow b \notin A, \quad \text{nach Def. von } A.$$

Widerspruch.

- Angenommen $x^m < a$. Also $a - x^m > 0$. Wähle ein $h \in \mathbb{R}$ mit:

$$0 < h < \min \left\{ 1, \frac{a - x^m}{m(x + 1)^{m-1}} \right\}$$

Setze $s := x < x + h =: r$. Dann

$$\begin{aligned} (x + h)^m - x^m &< (x + h - x)m(x + h)^{m-1} \\ &= hm(x + h)^{m-1} \\ &< hm(x + 1)^{m-1} \\ &< \frac{a - x^m}{m(x + 1)^{m-1}}m(x + 1)^{m-1} \\ &= a - x^m \end{aligned}$$

Damit folgt $(x + h)^m < a$ und damit $x + h \in A$. Dann ist die größere Zahl $x + h$ als $x = \sup A$ auch in A enthalten. Dies widerspricht, dass x ein Supremum an A ist.

Da wir nun $x^m < a$ und $x^m > a$ ausgeschlossen haben, muss gelten $x^m = a$.

Definition

- Eine *Folge* (reeller Zahlen) ist eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a(n)$ (Statt $a(n)$ schreibt man oft a_n).
- Sei $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge, auch als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geschrieben. Dann heißt sie:
 - *isoton* (oder *monoton steigend* oder *monoton wachsend*), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \geq x_n$.
 - *streng isoton*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} > x_n$.
 - *antiton* (oder *monoton fallend*), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \leq x_n$.
 - *streng antiton*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} < x_n$.
 - *(streng) monoton*, falls sie (streng) isoton oder (streng) antiton ist.

Genauso wie die Funktionen definieren wir die Summe der beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als

$$a + b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, (a + b)_n = a_n + b_n$$

Beispiel

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist streng antiton
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{2}$ ist isoton und antiton gleichzeitig. Aber nicht streng!
- Für ein festes $q \in \mathbb{R}$ sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $c_n = q^n$. Sie ist
 - Streng isoton, falls $q > 1$;
 - Streng antiton, falls $q \in (0, 1)$;
 - (nicht streng) isoton und antiton, falls $q \in \{0, 1\}$;
 - Nichts davon, falls $q < 0$. Weil $q^n \begin{cases} > 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ < 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Satz

Jede isotone (bzw. antitione) und von oben (bzw. von unten) beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert.

