Vorkurs VL 14
Stochastik

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Was ist Stochastik
2. Kombinatorik
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung
4. Statistik

Laufende Fragensammlung

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Stochastik

Primarstufe

• stellen Daten und Häufigkeiten in Diagrammen und Tabellen dar,	• stellen Daten und Häufigkeiten in Diagrammen und Tabellen dar, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge,

Wahrscheinlichkeiten	
Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase Die Schülerinnen und Schüler	Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen zunehmend systematischer die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen,
- beschreiben die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (sicher, (un-)wahrscheinlich, (un-)möglich).

Gesamtschule Klasse 5/6

Inhaltliche Schwerpunkte:

- statistische Daten: Datenerhebung, Ur- und Strichlisten, Klasseneinteilung, Säulen- und Kreisdiagramme
- Begriffsbildung: relative und absolute Häufigkeit
- Kenngrößen: arithmetisches Mittel, Median, Minimum und Maximum, Spannweite

Stochastik

Gesamtschule 7/8

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: einstufige Zufallsversuche
- stochastische Regeln: empirisches Gesetz der großen Zahlen, Laplace-Wahrscheinlichkeit
- Begriffsbildung: Ereignis, Gegenereignis, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit
- **statistische Daten und Kenngrößen: Quartile und Boxplots**

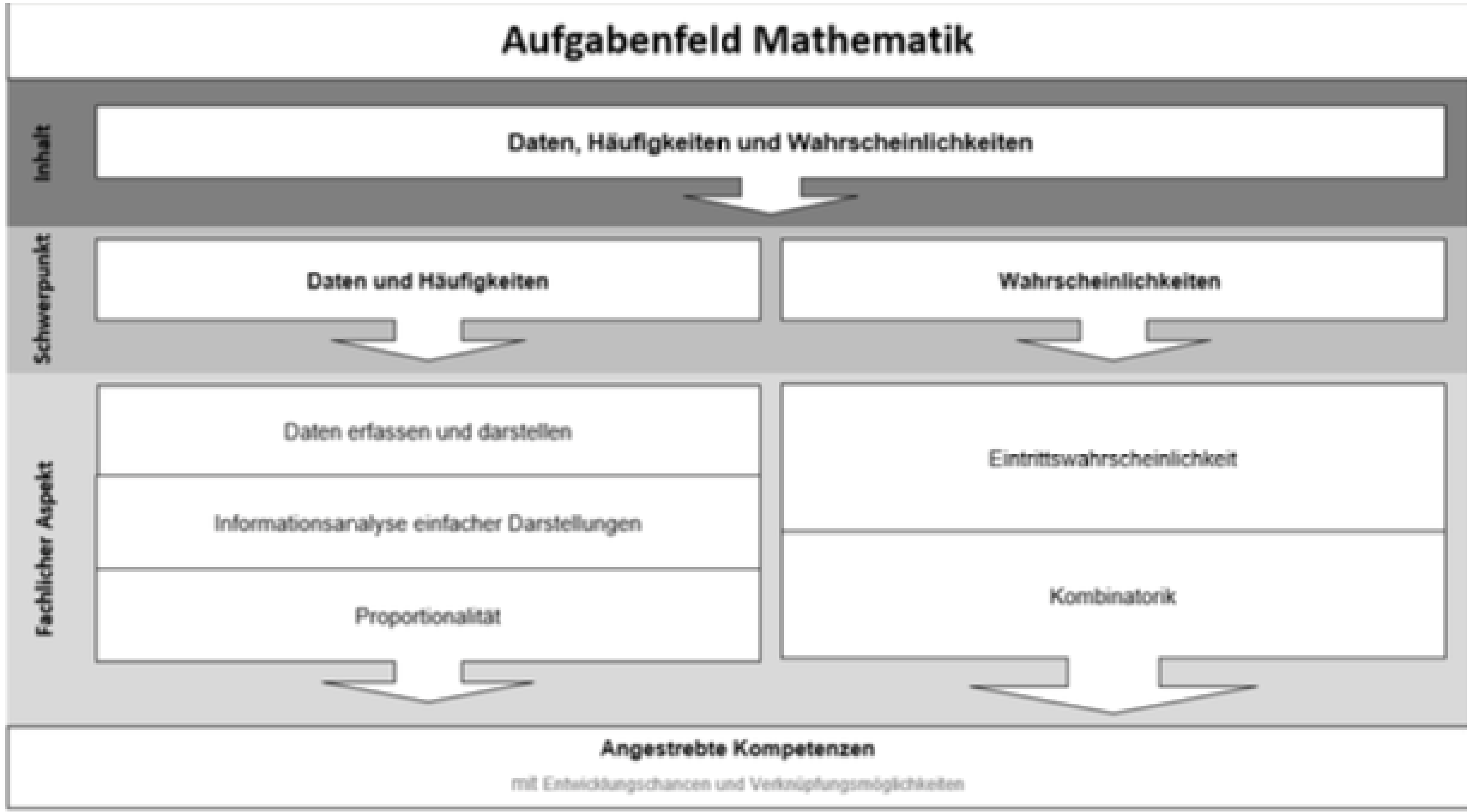
Gesamtschule 9/10

Inhaltliche Schwerpunkte:

- statistische Daten: Erhebung, Diagramm, Manipulation
- **Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: zweistufige Zufallsversuche, Baumdiagramme, Pfadregeln, bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel**

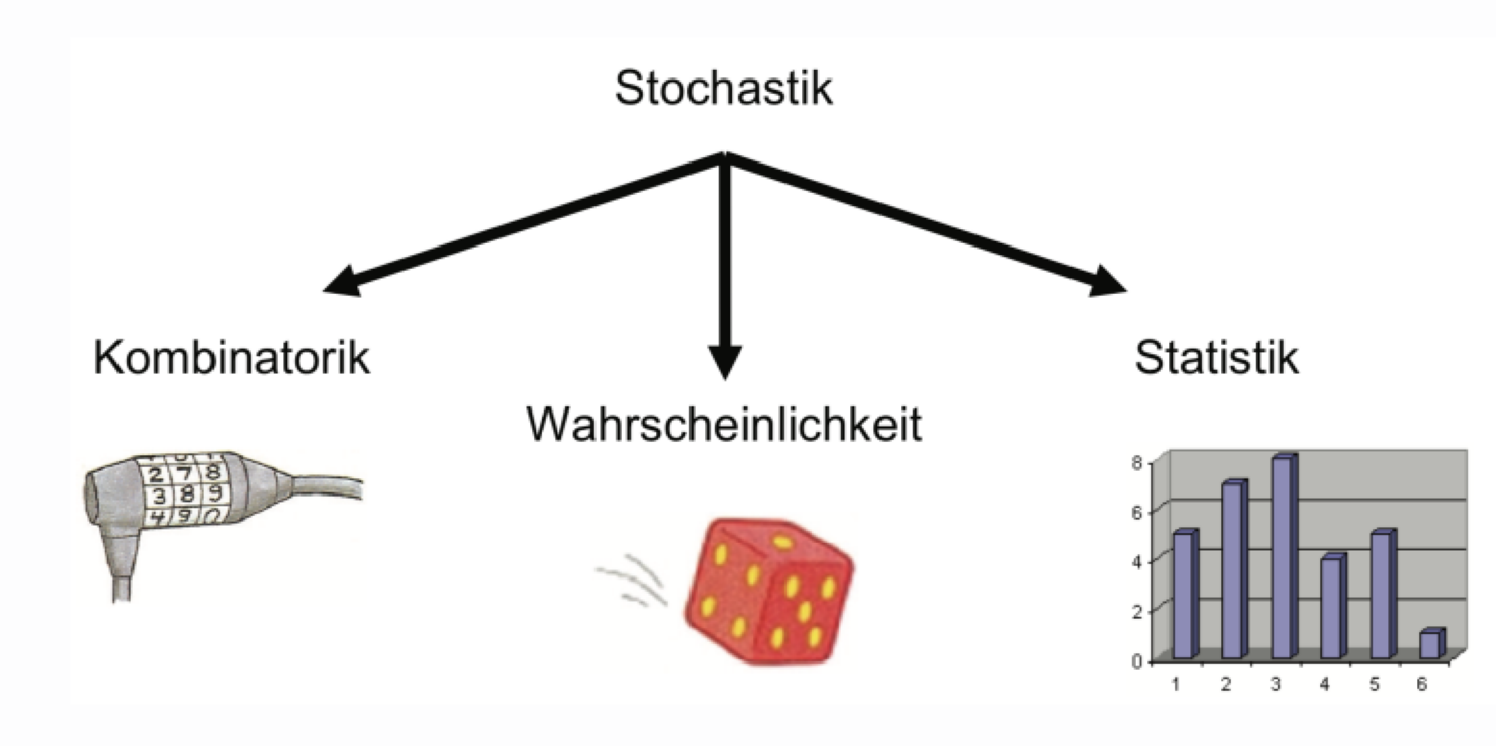
Stochastik

FSP GG



Zentrale Inhalte der Stochastik

Stochastik in der Schule (vgl. Ulm, 2010)



Systematisches Zählen von Möglichkeiten

„Zufall“

Erhebung, Darstellung und Interpretation von Daten

Zentrale Inhalte der Stochastik

Beschreibende Statistik

- absolute & relative Häufigkeiten
- grafische Darstellung von Daten und deren Manipulation
- Mittelwerte und Streuungsmaße
- Indexwerte
- Korrelation und Regression

Beurteilende Statistik

- Stichprobe & Grundgesamtheit
- Testen von Hypothesen
- Schätzen von Parametern
- Bayes-Statistik
- empirisches Arbeiten

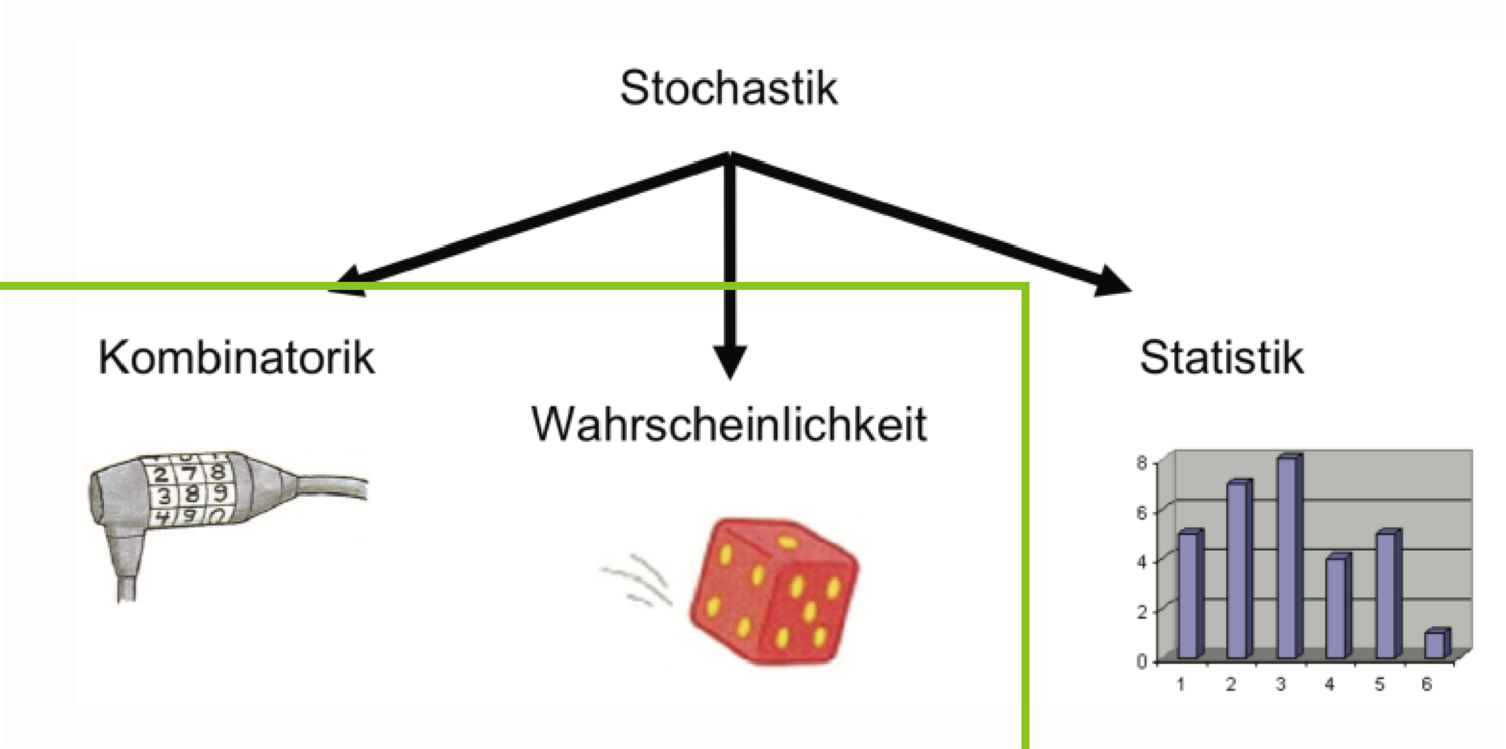
Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff:
  - frequentistische Wahrscheinlichkeit
  - Laplace-Wahrscheinlichkeit
  - subjektive Wahrscheinlichkeit
- Gesetz der großen Zahlen
- Baumdiagramme & Pfadregeln
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Bayes'sche Regel
- Chancen & Risiken
- Zufallsvariablen
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Zufall & Pseudozufall

aus: http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_stochastik/did_stochastik_1_ziele_und_inhalte.pdf

Zentrale Inhalte der Stochastik

Stochastik in der Schule (vgl. Ulm, 2010)



Systematisches Zählen von Möglichkeiten

„Zufall“

Erhebung, Darstellung und Interpretation von Daten

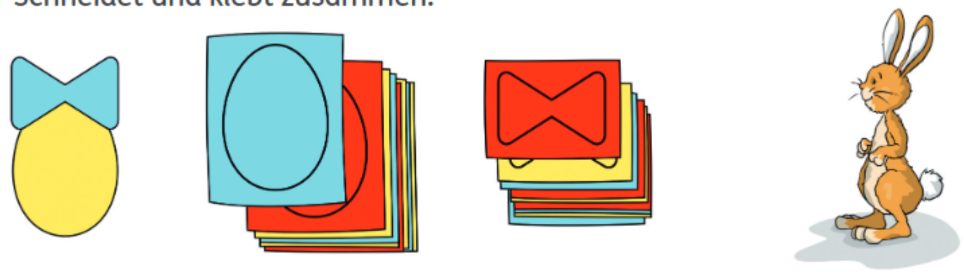
Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Was ist Stochastik
2. Kombinatorik
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung
4. Statistik

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

1 Es gibt rote, blaue und gelbe Eier und Schleifen.
Findet möglichst viele verschiedene Ostereier.

a) Schneidet und klebt zusammen.

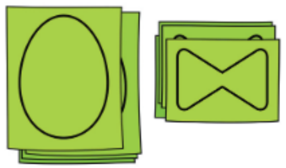


b) Ordnet und vergleicht.

2 Eine weitere Farbe für das Ei und die Schleife kommt hinzu.

a) Wie viele Ostereier werden es mehr? Vermutet.

b) Findet alle neuen Ostereier.
Wie viele Ostereier sind es insgesamt?



Generelle Überlegung:

3 Sophie ist mit ihrer Familie zum Essen in einem Restaurant.

a) Wie viele Möglichkeiten hat sie, um aus der Menükarte ein Menü aus Vorspeise, Hauptgericht und Dessert zusammenzustellen?

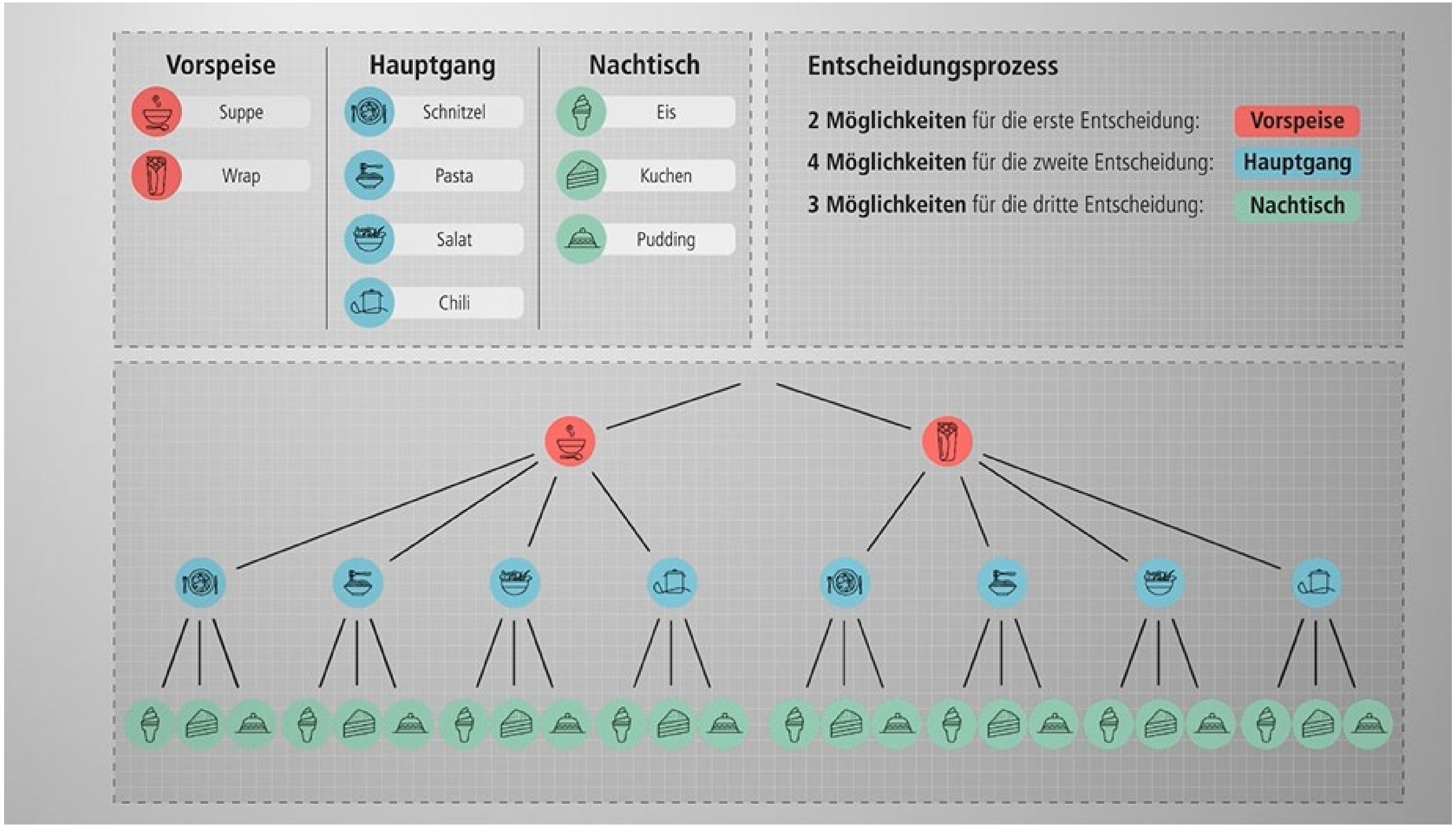
b) Der Kellner erklärt ihr, dass es heute auch noch Hühnchen mit Kartoffelecken als Hauptgericht gibt.

Menükarte
Salatteller
Tomatensuppe
*****
Spagetti Bolognese
Pizza quattro stagioni
Schnitzel mit Pommes
*****
Obstsalat
Himbeereis
Rote Grütze

Überlegen Sie gemeinsam: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Menü zusammenzustellen?

Wie können Sie Ihre Überlegungen begründen? Welche Darstellung würde sich eignen?

Begründung am Baumdiagramm – Produktregel der Kombinatorik



Beispiel Kombinatorik

Wenn die Bundesliga auf 20 Mannschaften vergrößert werden soll, wie viele Spiele finden dann in jeder Saison statt, wenn jede Mannschaft gegen jede andere spielt? Beachte, dass es Hin- und Rückspiel gibt, also je zwei Mannschaften zwei mal gegeneinander spielen.

$$2 \cdot \binom{20}{2} = 380$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{20!}{2! \cdot (20-2)!}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{20!}{2 \cdot (18)!}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{20 \cdot 19}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{380}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot 190 = 380$$

Oder aber:
20 Heimmannschaften spielen 19 mal zuhause gegen andere Mannschaften
→ $20 \cdot 19 = 380$

Schauen wir uns dazu zunächst einmal ein Video an.

Binomialkoeffizient

- **Definition *Binomialkoeffizient*:**
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}$ $,\mathrm{n},\mathrm{k} \in \mathbb{N}_0, \mathrm{n} \geq k$

- Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen an (*die Reihenfolge der Elemente interessiert uns dabei nicht*).

Beispiel

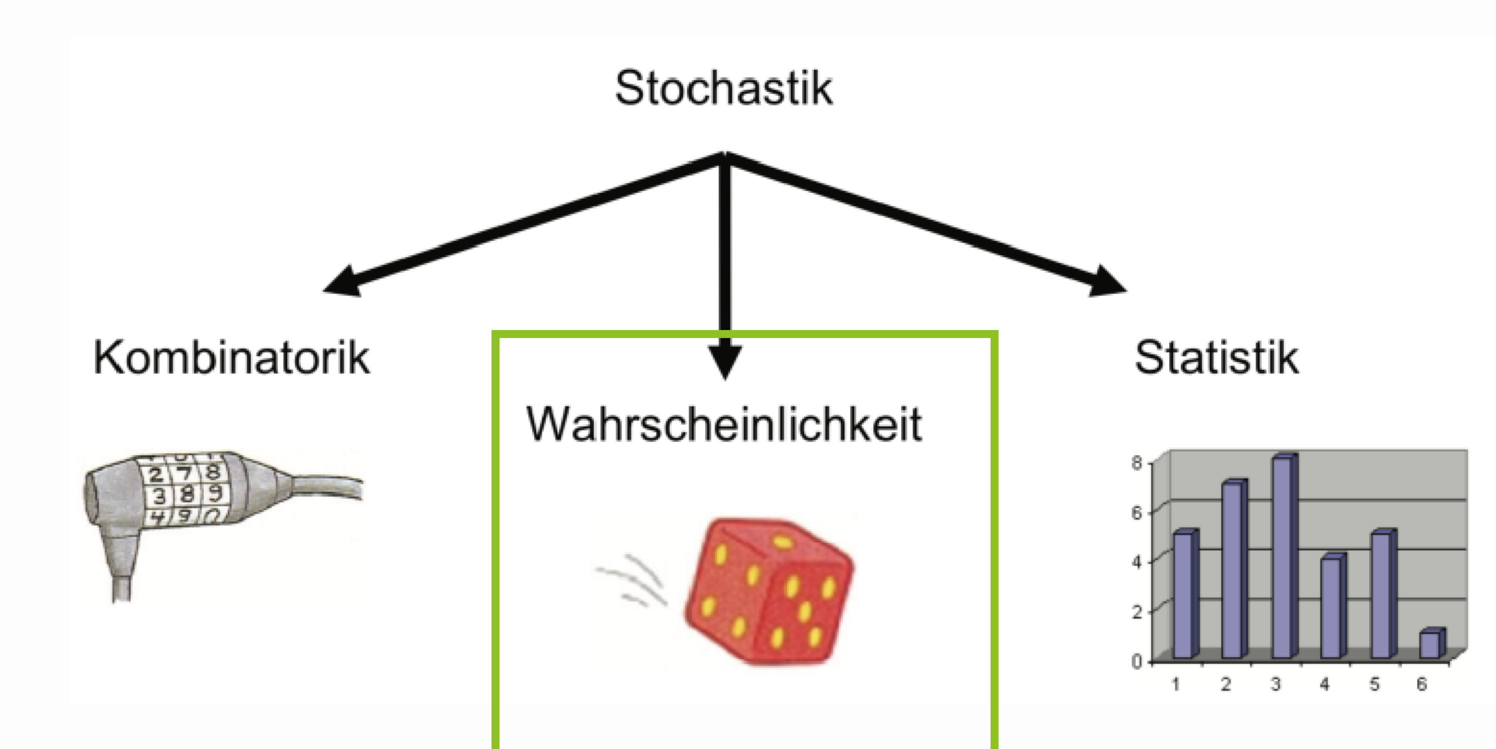
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot(1\cdot2\cdot3)} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = \frac{20}{2} = 10$$

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Was ist Stochastik
2. Kombinatorik
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung
4. Statistik

Zentrale Inhalte der Stochastik

Stochastik in der Schule (vgl. Ulm, 2010)



Systematisches Zählen von Möglichkeiten

„Zufall“

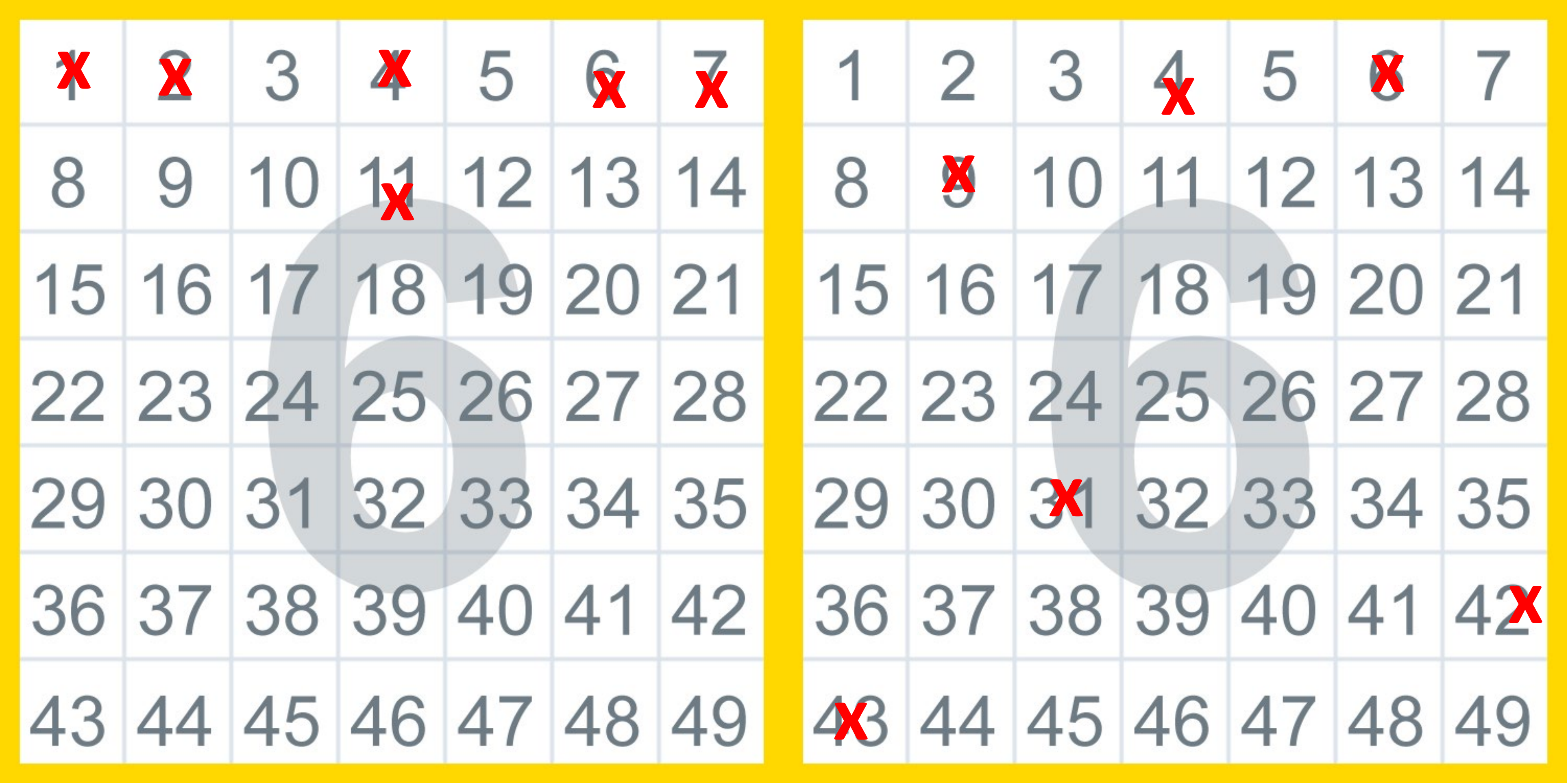
Erhebung, Darstellung und Interpretation von Daten

Füllen Sie folgenden Lottoschein zufällig aus

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

https://www.lottobay.de/partner/computerbild/index.php?action=lotto_normal

Was ist zufälliger?



https://www.lottobay.de/partner/computerbild/index.php?action=lotto_normal https://www.lottobay.de/partner/computerbild/index.php?action=lotto_normal

Welche Ausgänge eines Münzwurfs halten Sie für wahrscheinlicher?

- K, K, K, Z, Z, Z
- K, Z, K, Z, K, Z
- Z, Z, Z, Z, Z, Z
- Z, Z, K, Z, K, Z

Aussagen zum Zufall: Y/N??

- Beim Roulette fiel die Kugel seit 10 Runden ausschließlich in rote Felder. „Jetzt ist es ja ziiiemlich wahrscheinlich, dass schwarz kommt. Da sehe ich gute Chancen.“
- „Mein Nachbar hat im Lotto gewonnen. Jetzt brauche ich vorläufig wohl nicht mehr zu spielen – wie wahrscheinlich ist es schon, dass zwei direkt nebeneinander wohnende Menschen nacheinander im Lotto gewinnen?“
- Werbespruch: jedes 10. Los gewinnt ☺
  „Wenn ich 11 Lose kaufe, dann wird schon ein Gewinn dabei sein.“

Der Zufall im Schulbuch

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Zufall

Wahrscheinlichkeit

Relative Häufigkeit

Sicher und unsicher

Absolute Häufigkeit

Gesetz der großen Zahlen

Zufall?

„Mensch ärgere dich nicht brauche ich gar nicht erst zu spielen. Ich hab einfach kein Glück beim Würfeln, ich kann einfach keine 6 würfeln.“

Zufall ist zufällig – da brauche ich doch gar nicht über Wahrscheinlichkeit nachzudenken.

„Das ist ja ein Zufall, dass wir uns hier treffen – fast wie Schicksal.“

Zufall?

„Mensch ärgere dich nicht brauche ich gar nicht erst zu spielen. Ich hab einfach kein **Glück** beim Würfeln, ich kann einfach keine 6 würfeln.“

„Das ist ja ein Zufall, dass wir uns hier treffen – fast wie **Schicksal**.“

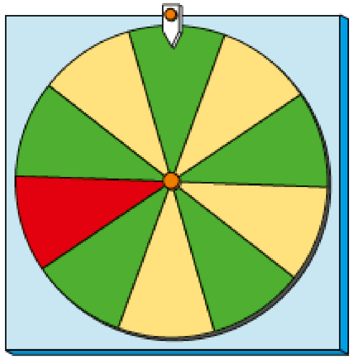
Zufall ist zufällig – da brauche ich doch gar nicht über **Wahrscheinlichkeit** nachzudenken.

Gesetz der großen Zahlen

Ordnen B

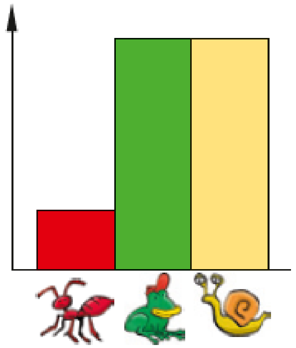
Welche Regelmäßigkeiten findet man beim Zufall?

2 Vorhersagen auf unterschiedlichen Wegen

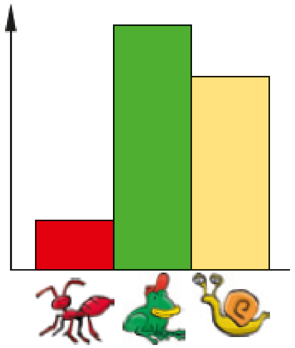


a) Ole hat das Computerspiel „Wettkönig“ auch für sein Glücksrad genutzt und unterschiedlich oft gedreht.
Welches seiner Bilder gehört zu welcher Drehzahl? Ordne die Bilder den Kärtchen zu.

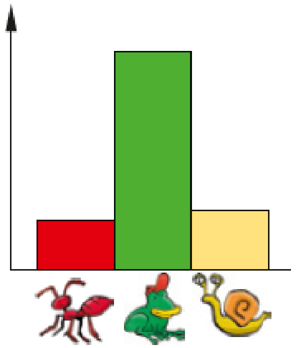
(1)



(2)



(3)



Ⓐ 10-mal gedreht	Ⓑ 100-mal gedreht	Ⓒ 1000-mal gedreht

Tipp

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Zufall

Wahrscheinlichkeit

Relative Häufigkeit

Sicher und unsicher

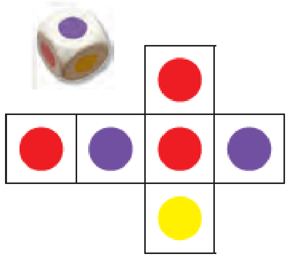
Absolute Häufigkeit

Gesetz der großen Zahlen

Gewinnchancen und Wahrscheinlichkeit

Überlegen Sie zunächst, mit welcher der Regeln (1), (2) oder (3) Sie die besten Chancen hätten.

Überlegen Sie dann, wie Ole seine Gewinnchance gezeichnet hat.
Wie könnte man das noch zeigen?

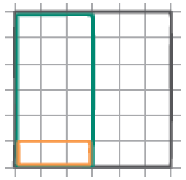


9 Spiel mit zwei Würfeln

Till hat ein neues Spiel erfunden. Es wird mit einem Farbwürfel wie am linken Rand und einem normalen Spielwürfel gespielt. Jeder Spieler kann sich zuerst eines der folgenden Ergebnisse aussuchen:
(1) Rot und 5 (2) Lila und eine Zahl kleiner als 3 (3) Gelb und eine gerade Zahl
Dann wird zehnmal mit beiden Würfeln gewürfelt.

a) Wer gewinnt am häufigsten? Spielt das Spiel einige Male und formuliert Vermutungen.

b) Bevor Ole weiterspielt, überlegt er sich theoretisch, wann er eher gewinnt. Er zeichnet ein Bild zu Ereignis (1).



- Erkläre, was Ole sich überlegt hat und wie er mit dem Bild die Chance bestimmt.
- Zeichne auch zu den anderen Ereignissen ein passendes Bild und bestimme das Ereignis mit den besten Chancen.

nachgedacht

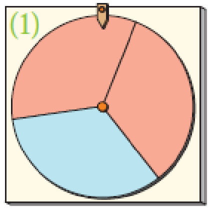
c) Beschreibt, wie ihr vorgegangen seid, um die Gewinnchancen für einen Wurf mit zwei Zufallsgeräten auszurechnen.

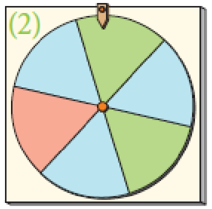
Mehrstufige Zufallsexperimente

5 Wahrscheinlichkeiten für zwei Zufallsgeräte

** Neues Wort*
*Ein Versuch heißt **zweistufig**, wenn man ein Zufallsgerät zweimal nacheinander oder zwei Zufallsgeräte nacheinander oder gleichzeitig verwendet.*

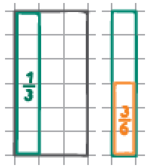
Die vier Freunde untersuchen einen *zweistufigen Zufallsversuch**.
Sie bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass bei beiden Glücksrädern rechts „blau“ gedreht wird. Dabei nutzen sie verschiedene Darstellungen.





a) Ole zeichnet die Anteile in ein Bild:

Beim ersten Glücksrad hat „blau“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.
Immer wenn beim ersten Rad „blau“ gedreht wurde,
ist die Wahrscheinlichkeit beim zweiten Rad $\frac{3}{6}$.



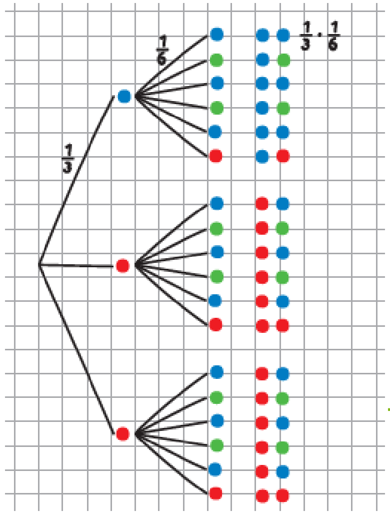
wiederholen
Wissensspeicher
Brüche 12

Erkläre, wie Ole die Wahrscheinlichkeit bestimmt.
Überlege dazu, wo man das Ergebnis im Bild erkennen kann und warum Ole hier die Brüche multiplizieren kann.

** Neues Wort*
*Mit einem **Baumdiagramm** kann man die Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Versuchen darstellen.*

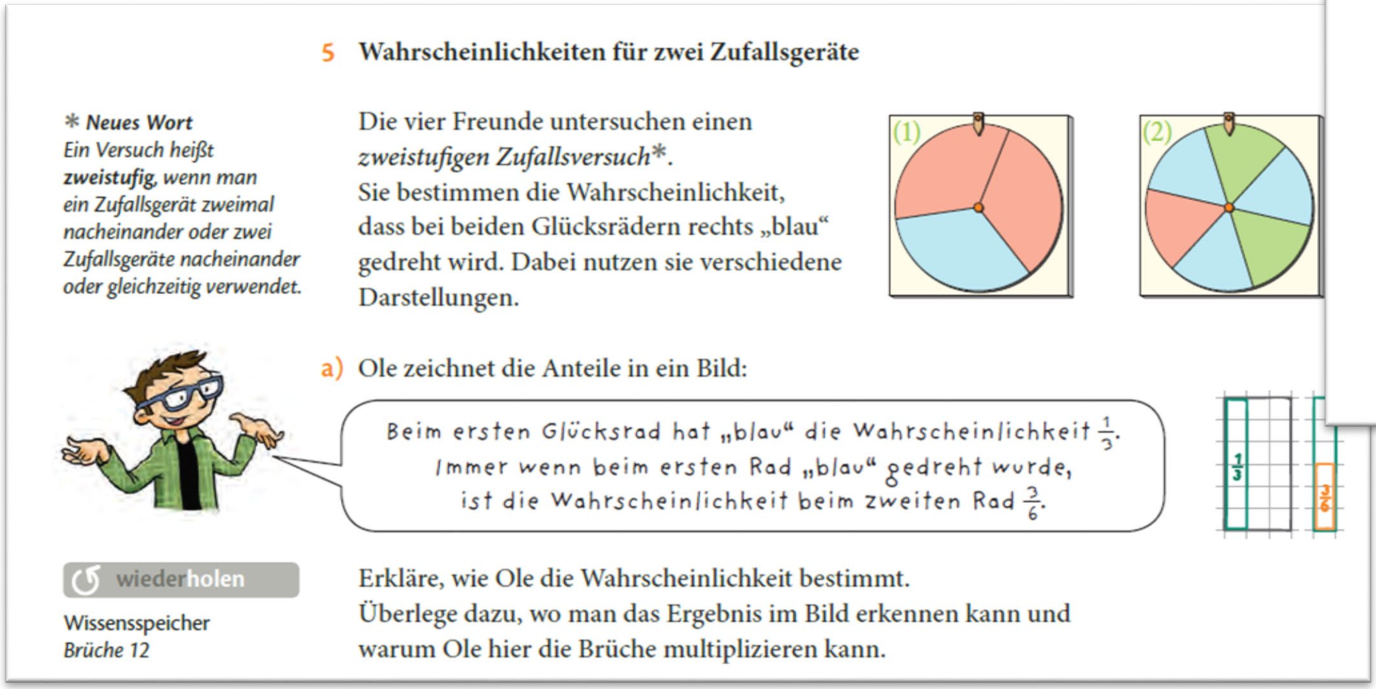
b) Till stellt die beiden einzelnen Zufallsversuche mit einem *Baumdiagramm** dar.

Man kann die
Wahrscheinlichkeiten an
den Ästen erkennen.



- Erkläre, wie Till die Wahrscheinlichkeit für „zweimal blau“ bestimmen kann.
- Bestimme auch die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Farbkombinationen.

Mehrstufige Zufallsexperimente



5 Wahrscheinlichkeiten für zwei Zufallsgeräte

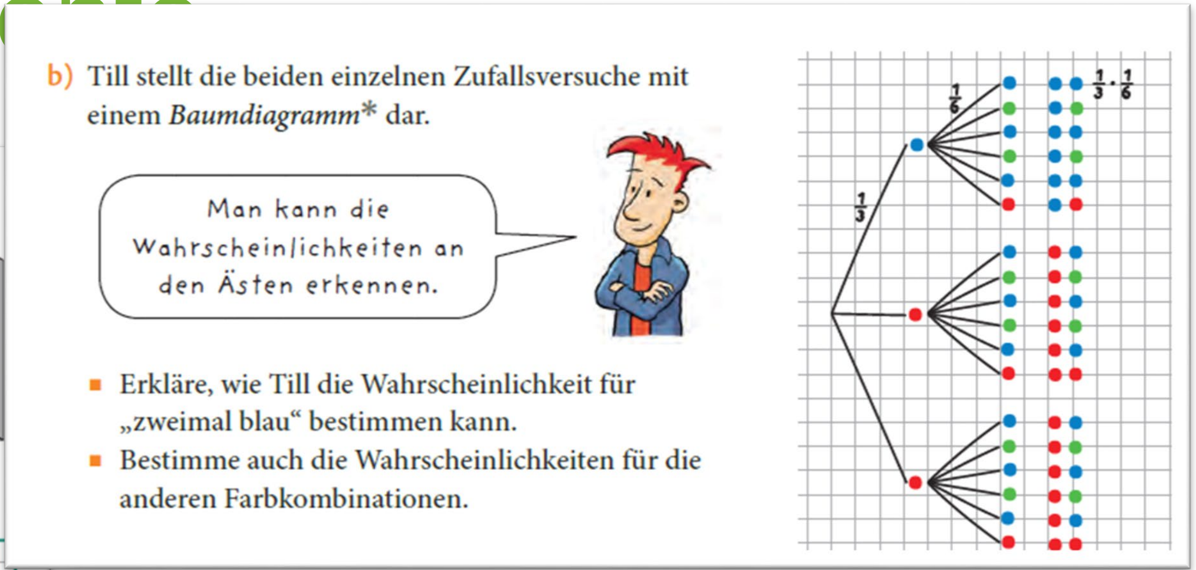
** Neues Wort*
*Ein Versuch heißt **zweistufig**, wenn man ein Zufallsgerät zweimal nacheinander oder zwei Zufallsgeräte nacheinander oder gleichzeitig verwendet.*

Die vier Freunde untersuchen einen *zweistufigen Zufallsversuch**.
Sie bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass bei beiden Glücksrädern rechts „blau“ gedreht wird. Dabei nutzen sie verschiedene Darstellungen.

a) Ole zeichnet die Anteile in ein Bild:

wiederholen
Wissensspeicher
Brüche 12

Erkläre, wie Ole die Wahrscheinlichkeit bestimmt.
Überlege dazu, wo man das Ergebnis im Bild erkennen kann und warum Ole hier die Brüche multiplizieren kann.



b) Till stellt die beiden einzelnen Zufallsversuche mit einem *Baumdiagramm** dar.

- Erkläre, wie Till die Wahrscheinlichkeit für „zweimal blau“ bestimmen kann.
- Bestimme auch die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Farbkombinationen.

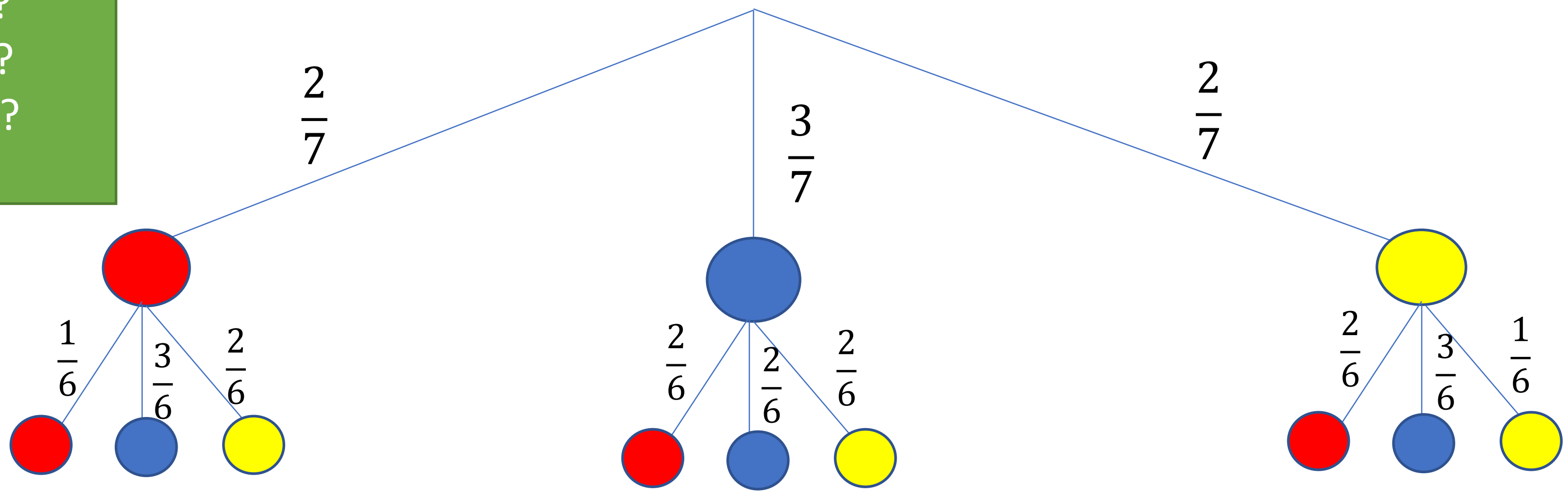
Was hat Oles Erklärung mit der Multiplikation von Brüchen zu tun?

Wie argumentiert Ole? Welche Argumentation ist leichter nachzuvollziehen?

Mehrstufige Zufallsexperimente

Vor ihnen steht eine Urne mit 2 roten, 3 blauen und 2 gelben Kugeln. Sie dürfen nun 2 mal hintereinander aus der Urne ziehen.
Sie gewinnen, wenn Sie zwei gleichfarbige Kugeln nacheinander ziehen. Wie hoch ist Ihre Gewinnchance?

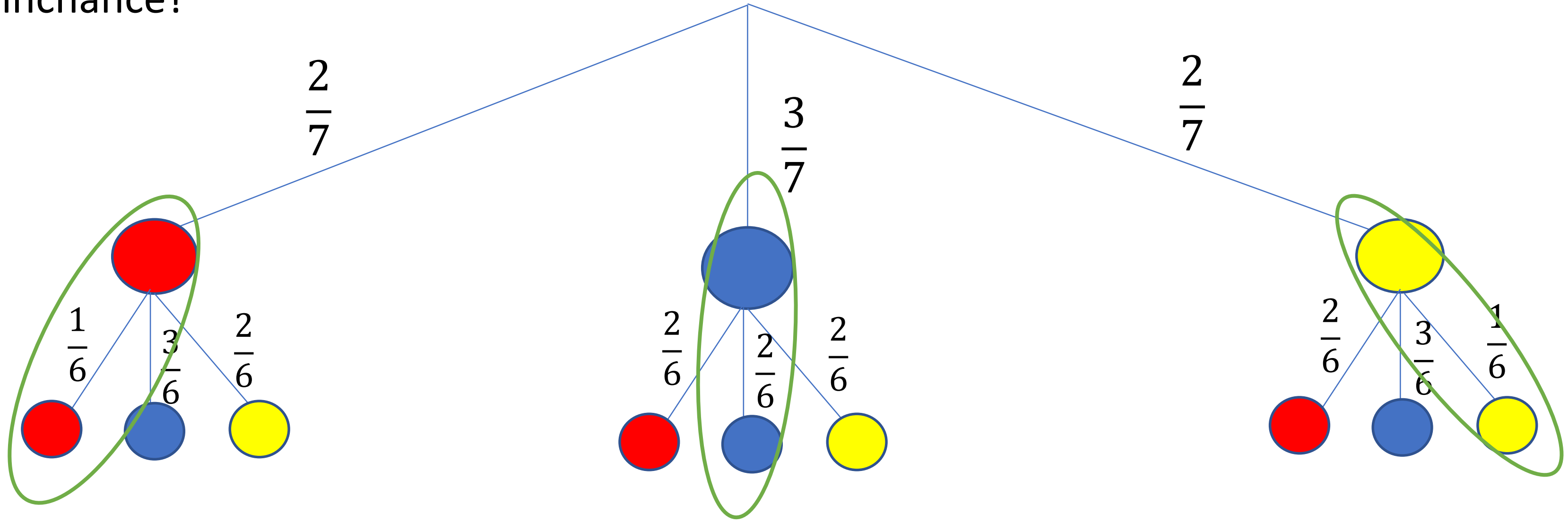
Relative Häufigkeit?
Wahrscheinlichkeit?
Absolute Häufigkeit?



Wo finden Sie hier Begriffe wieder, die wir bereits benutzt haben?

Mehrstufige Zufallsexperimente

Vor ihnen steht eine Urne mit 2 roten, 3 blauen und 2 gelben Kugeln. Sie dürfen nun 2 mal hintereinander aus der Urne ziehen.
Sie gewinnen, wenn Sie zwei gleichfarbige Kugeln nacheinander ziehen (A := zwei gleichfarbige Kugeln). Wie hoch ist Ihre Gewinnchance?



$P(r,r) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$

$P(b,b) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{3}{21}$

$P(g,g) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$

$P(A) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$

Überlegen Sie gemeinsam: Warum wird in der ersten Rechnung multipliziert, in der zweiten aber addiert?

Fragen? Vielen Dank!