technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Michele Serra

13. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Definition (Rationale Zahl)

Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *rational*, falls sie sich als Bruch zweier ganzen Zahlen darstellen läßt, d.h., wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $b \neq 0$ und $\alpha = \frac{a}{b}$.
Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.
Die reelle Zahlen, die nicht rational sind, also die der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gehören heißen *irrationale Zahlen.*

Aufgabe 1) ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

In dieser Aufgaben werden Sie per Widerspruch beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:
ist n gerade, dann teilt 4 die Zahl n^2.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: wenn 2 ein Teiler von n^2 ist, dann ist 2 bereits ein Teiler von n.

(c) Angenommen es existieren $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wir können annehmen, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler haben. Erreichen Sie einen Widerspruch, indem Sie zeigen, dass a und b beide gerade sind.

Aufgabe 2)

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen. Zeigen Sie, dass $\alpha + \beta$ sowie $\alpha\beta$ auch rational sind, nach der obigen Definition.

Seien im folgenden $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Für die nächsten beiden Fragen geben Sie einen Beweis (falls die Antwort positiv ist) oder ein Gegenbeispiel an.

(b) Ist $\alpha\beta$ immer irrational?

(c) Ist $\alpha + \beta$ immer irrational?

(d) **(Bonus)** Zeigen Sie, dass mindestens eine der beiden Zahlen $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ irrational ist.

Aufgabe 3)

Zeigen Sie: für $n \in \mathbb{N}$:

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq 1,\ y \geq 1$ gilt

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x^k}\ \sqrt[n]{y^{n-1-k}}} = \frac{|x-y|}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k\ (\sqrt[n]{y})^{n-1-k}}$$

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, eine obere Schranke, die kleinste obere Schranke, das Maximum der Funktion:

$$f\colon [1,\infty) \times [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k\ (\sqrt[n]{y})^{n-1-k}\right)^{-1}$$

(c) Bestimmen Sie, falls möglich, eine obere Schranke, die kleinste obere Schranke, das Maximum für sämtliche Differenzenquotienten der Funktion:

$$W\colon D := [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$W(x) = \sqrt[n]{x}$$

(d) **(Diskussionsfrage)** Warum haben wir bei (c) den Definitionsbereich der Wurzelfunktion nicht als $D := (0,\infty)$ gewählt?