

Prinzip der vollständigen Induktion

Wir wissen, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (\star)$$

Lemma

Für $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=1}^m |a_k|$$

Beweis

- Induktionsanfang: $m = 1$. Zu prüfen $|a_1| \leq |a_1|$. Gilt ✓.
- Induktionsschritt: $m \rightarrow m + 1$. Wir dürfen die Induktionsvoraussetzung

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=1}^m |a_k| \quad (\text{IV})$$

annehmen und wir wollen

$$\left| \sum_{k=1}^{m+1} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{m+1} |a_k|, \quad (\text{IK})$$

die Induktionskonklusion, schliessen. Wir führen Umformungen durch:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m+1} a_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \right| \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \left| \sum_{k=1}^m a_k \right| + |a_{m+1}| \\ &\stackrel{(\text{IV})}{\leq} \sum_{k=1}^m |a_k| + |a_{m+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} |a_k| \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Lemma

Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1 - q) \sum_{j=0}^m q^j = 1 - q^{m+1}$$

Beweis

$$(1 - q) \sum_{j=0}^m q^j = \sum_{j=0}^m q^j - q \sum_{j=0}^m q^j = \sum_{j=0}^m q^j - \sum_{j=0}^m q^{j+1}$$

Indexverschiebung in der 2. Summe

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^m q^j - \sum_{j=1}^{m+1} q^j \\ &= 1 + q + q^2 + \dots + q^m \\ &\quad \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^m} - q^{m+1} \\ &= 1 - q^{m+1} \end{aligned}$$

□

Korollar

Für $x \neq y \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{j=0}^m x^{m-j} y^j = \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y}$$

Beweis

Fallunterscheidung:

- $x = 0$. Dann $y \neq 0$. Also:

$$\sum_{j=0}^m x^{m-j} y^j = \sum_{j=0}^m 0^{m-j} y^j = \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} 0^{m-j} y^j}_{=0} + \underbrace{0^0}_{=1} y^m = y^m$$

nun mit weiteren Umformungen

$$y^m = \frac{0^{m+1} - y^{m+1}}{0 - y} \stackrel{x=0}{=} \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y}$$

□

- $x \neq 0$. Setze im Lemma $q = y/x$ ein. Dann

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right) \sum_{j=0}^m \left(\frac{y}{x}\right)^j \stackrel{\text{Lemma}}{=} 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{m+1}$$

Dies ist äquivalent zu

$$x \cdot x^m \left(1 - \frac{y}{x}\right) \sum_{j=0}^m \left(\frac{y}{x}\right)^j = x \cdot x^m \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{m+1}\right)$$

und somit

$$(x - y) \sum_{j=0}^m x^{m-j} y^j = x^{m+1} - y^{m+1}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar. □

Nach den natürlichen Zahlen und ihrer wichtigen Eigenschaft (das Induktionsprinzip), schauen wir komplizierteren reellen Zahlen an: die irrationalen Zahlen. Unter den irrationalen Zahlen gehören Wurzeln zu den einfacheren.

5.2 Irrationale Zahlen: Wurzeln

Satz

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $x^m = a$. Diese Zahl bezeichnen wir als m -te Wurzel aus a und schreiben dafür

$$x = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

Beweis

In zwei Schritten: Zeige zunächst, dass es höchstens eine Lösung der Gleichung gibt und danach, dass es mindestens eine gibt.

- Eindeutigkeit. Hier machen wir einen Widerspruchsbeweis.

Seien x, y positive reelle Zahlen, mit $x^m = y^m = a$ und $x \neq y$. ObdA kann ich annehmen $0 < y < x$. Vollständige Induktion über m liefert dann, dass $0 < y^n < x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist $x^m \neq y^m$, also dürfen sie nicht beide gleich a sein.

- Existenz. Betrachte die Menge

$$A := \{b \in \mathbb{R} \mid b > 0 \text{ und } b^n < a\}$$

und $t := \frac{a}{a+1} < 1$ und $t > 0$.