Vorkurs – VL 12

Beweisen I

Vorkurs

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Laufende Fragensammlung

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Begründungen fokussieren
3. Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Argumentieren im Mathematikunterricht

Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler

- **stellen Vermutungen** über mathematische (auch algorithmische) Muster und Strukturen an,
- benennen Beispiele für vermutete Zusammenhänge,
- vergleichen mathematische Muster und Strukturen im Hinblick auf Zusammenhänge, Gemeinsamkeiten und Unterschiede,
- **bestätigen oder widerlegen** ihre Vermutungen anhand von Beispielen,
- **erklären** allgemeine Überlegungen in Bezug auf Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten anhand von Beispielen,
- **begründen** ihre Vorgehensweisen nachvollziehbar,
- **hinterfragen** eigene und fremde Vermutungen oder Aussagen,
- geben Begründungen anderer wieder,
- **beurteilen** die Nachvollziehbarkeit der Begründungen anderer

(MSW NRW, 2021)

Argumentieren im Mathematikunterricht

Literatur

- „Argumentative Situationen sind der Ort, an dem Bedeutungen ausgehandelt werden, wozu ein Begründungsbedarf explizit angezeigt werden muss.“ (Schwarzkopf, 2000)
- Argumentieren ist ein wichtiges Element des Entdeckenden Lernens
- Mathematik befasst sich im wesentlichen mit Mustern (Regelhaftigkeiten, Ordnungsgesetzen oder Strukturen), diese sollen argumentativ begründet werden
- „Ausgangspunkte oder Auslöser für Argumentationen in Lehr-Lern-Situationen sind Koordinationsprobleme im Bemühen um gemeinsames Handeln, um Konsens.“ (Krummheuer, 1997)
- Rechenwege erklären ist nicht gleich Argumentieren, wichtig ist wie miteinander gesprochen wird, ist eine Diskussion erkennbar? (Krauthausen, 2018)

Argumentieren im Mathematikunterricht

Argumentationsanlässe

Argumentationsanlässe	mögliche Fragen bzw. Aufträge	Beispiele
elementare arithmetische Aussagen	»Wenn du eine gerade und eine ungerade Zahl zusammenzählst, erhältst du eine ungerade Zahl. Stimmt das? Begründe!«	$4 + 5 = 9$ $5 + 6 = 11$
Rechenwege / vorteilhaftes Rechnen	»Warum hast du das so gerechnet?« »Was fällt dir auf?« »Geht das auch noch anders?«	$6 + 5 = 11$ $6 + 6 - 1 = 11$ $5 + 5 + 1 = 11$
Rechengesetze	»Wer hat Recht?« »Gilt das immer?« »Warum ist das so?«	Marie: $3 + 5 = 8$ Paul: $5 + 3 = 8$ Kommutativgesetz

(Bezold, 2010)

Argumentieren im Mathematikunterricht

Bausteine des Argumentierens

Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen → **Beschreiben** des Wahrgenommenen → **Hinterfragen** des Wahrgenommenen → **Begründen** des Wahrgenommenen

Argumentieren im Mathematikunterricht

Aufgabe: Doppeltreppe

Setzt die Folge fort!

Welche Muster und Strukturen entdeckt ihr? Warum ist das so?

Bearbeiten Sie diese Aufgabe. Beschreiben Sie Ihre Entdeckungen, notieren Sie diese stichpunktartig.

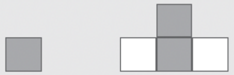
Argumentieren im Mathematikunterricht

Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen → **Beschreiben** des Wahrgenommenen

Aufgabe: Doppeltreppe

Setzt die Folge fort!

Welche Muster und Strukturen entdeckt ihr? Warum ist das so?



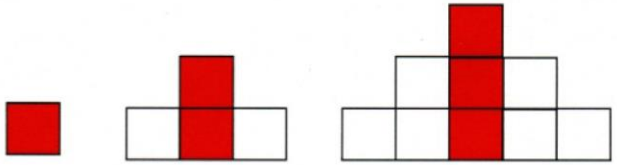
Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl	1	4								

Forschen	Sophie	

Wir forschen mit Doppeltreppen

1. Baue Doppeltreppen und fülle die Tabelle aus!

Vergleiche die Ergebnisse in der Tabelle!



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Anzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

Platz für Zeichnungen, Rechenwege und Entdeckungen

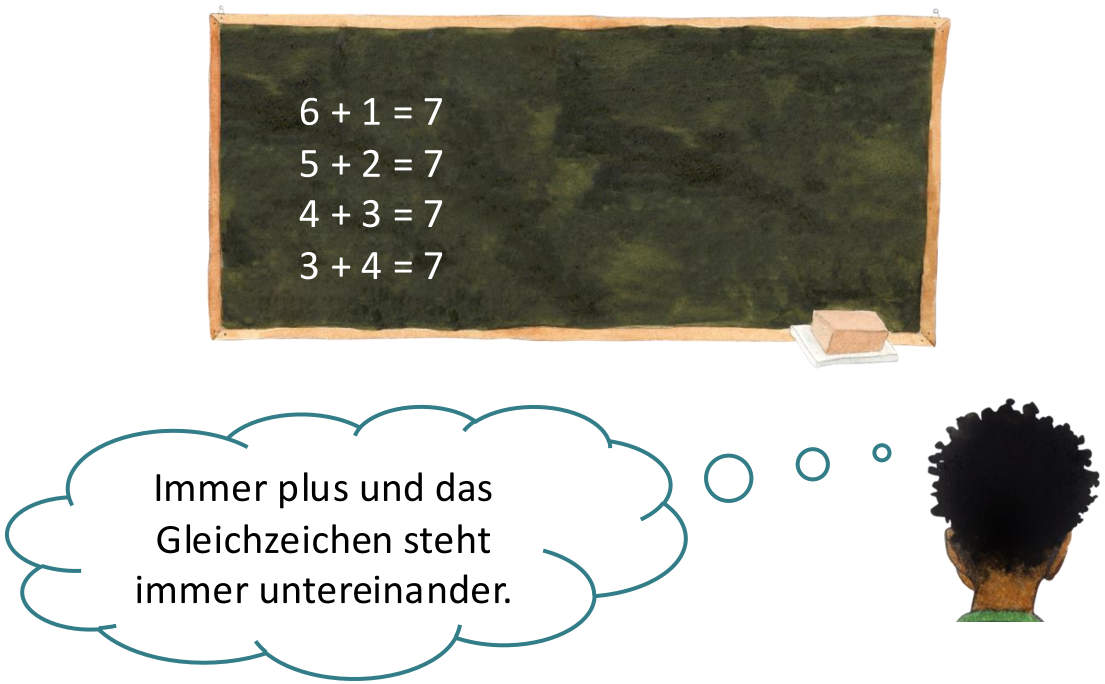
Die Anzahl ist immer eine Quadratzahl. Man muss die Höhe mal die Höhe nehmen.

Argumentieren im Mathematikunterricht

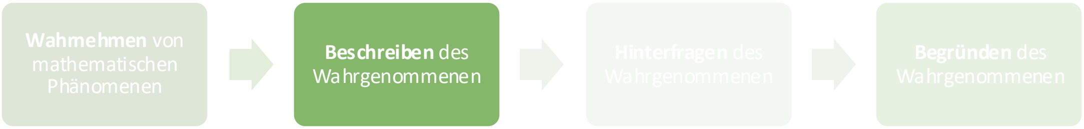
Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen

Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen → **Beschreiben** des Wahrgenommenen → **Hinterfragen** des Wahrgenommenen → **Begründen** des Wahrgenommenen

- Wahrnehmen mathematischer Sachverhalte (z. B. Wahrnehmen von Mustern, Aufgabenzusammenhängen, vorteilhaften Rechenwegen …)
- Fokussierung auf relevante (und ggf. irrelevante) mathematische Zusammenhänge

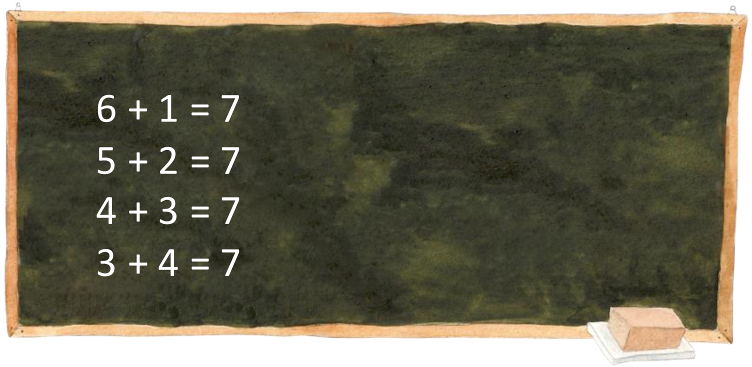


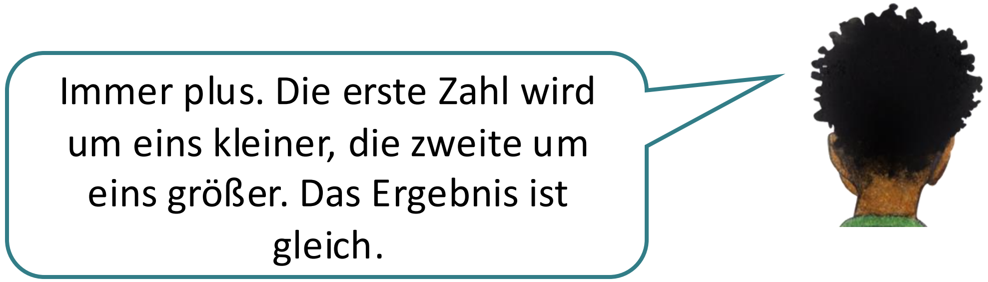
Argumentieren im Mathematikunterricht



Beschreiben des Wahrgenommenen

- Wahrgenommene mathematische Phänomene in eigenen Worten beschreiben
- Nicht allen Kindern fällt es leicht ihre Gedanken in Worte zu fassen
- Bestmögliche Unterstützung der Kinder durch Sprachspeicher



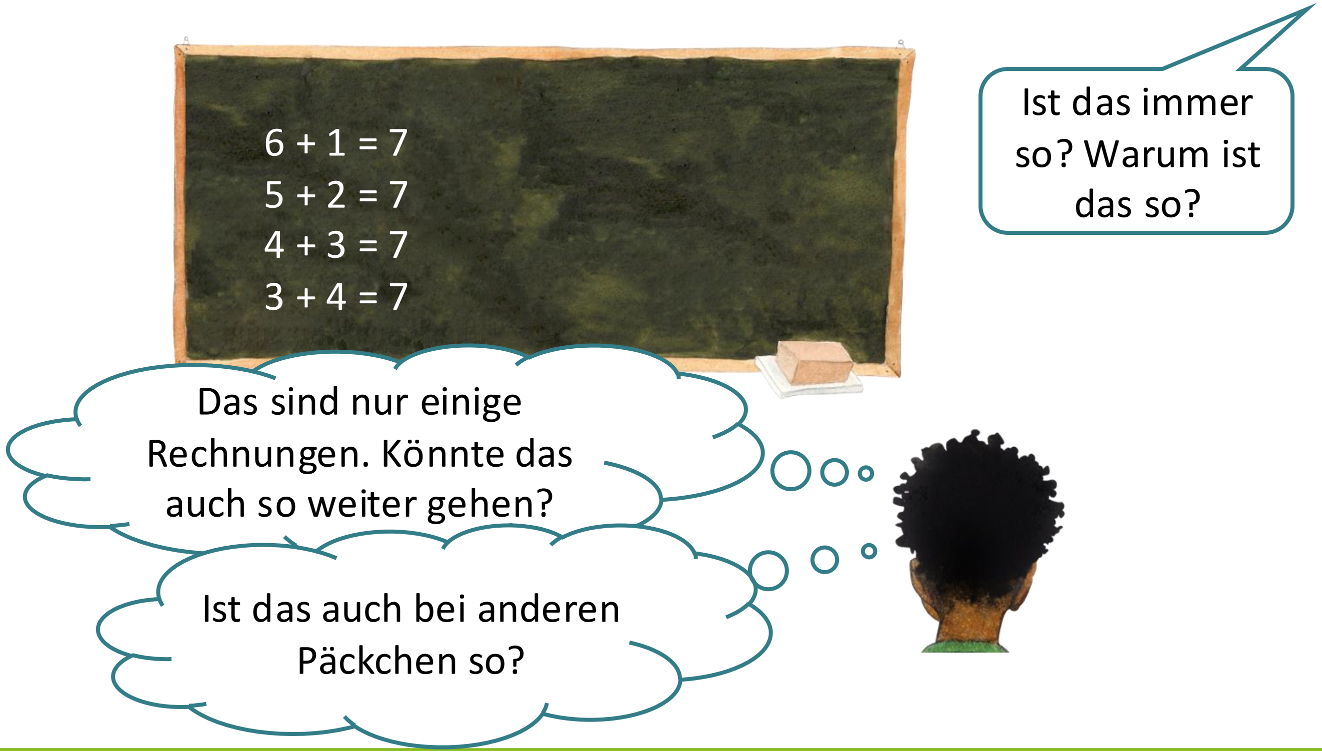


Argumentieren im Mathematikunterricht

Hinterfragen des Wahrgenommenen

Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen → Beschreiben des Wahrgenommenen → **Hinterfragen des Wahrgenommenen** → Begründen des Wahrgenommenen

- Ausgangspunkt: Das wahrgenommene Phänomen wird erstmal angenommen (von den anderen Kindern oder von sich selbst)
- Hinterfragen liefert Begründungsnotwendigkeit



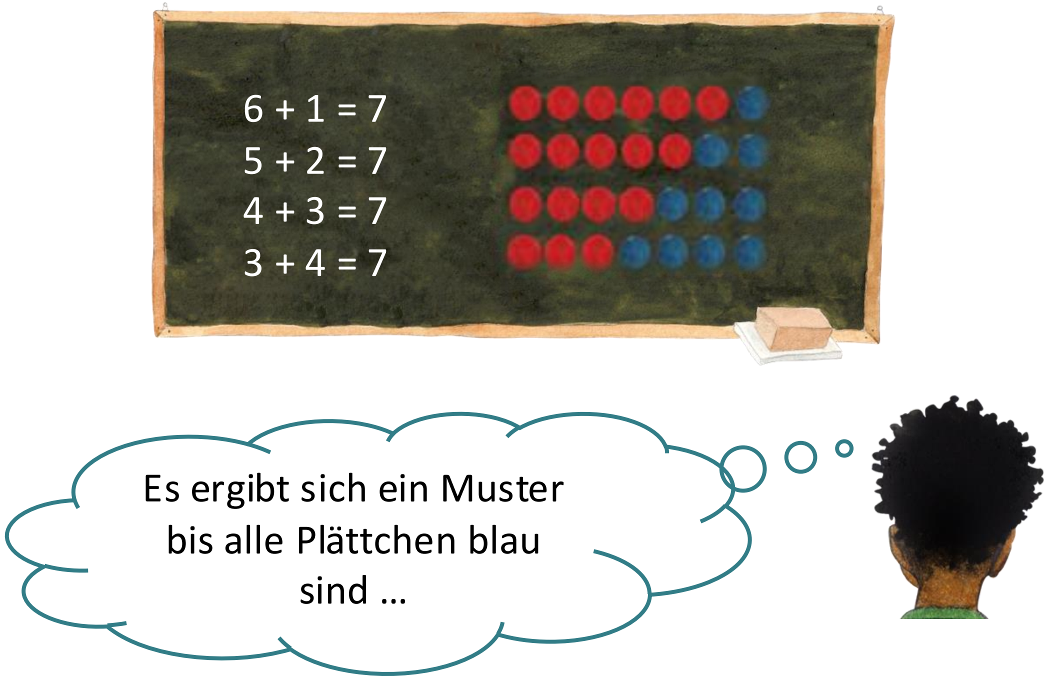
(in Anlehnung an Bezold, 2010)

Argumentieren im Mathematikunterricht

Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen → Beschreiben des Wahrgenommenen → Hinterfragen des Wahrgenommenen → **Begründen des Wahrgenommenen**

Begründen des Wahrgenommenen

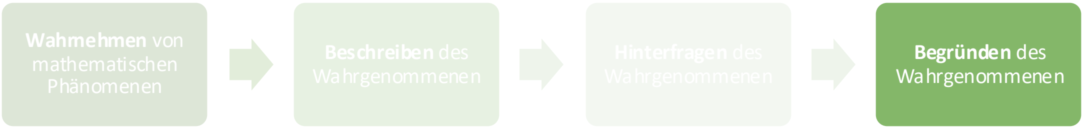
- Untersuchung des Wahrheitsgehalts der gewonnenen Vermutungen auf allgemeiner Ebene
- Dafür: Vermutungen an weiteren Beispielen positiv testen; dabei nichts Widersprüchliches entdecken



(in Anlehnung an Bezold, 2010)

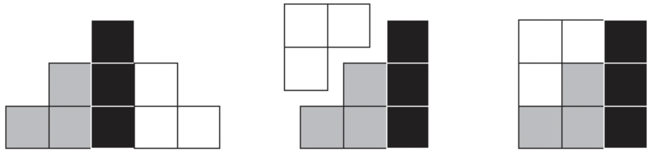
Argumentieren im Mathematikunterricht

Begründen des Wahrgenommenen



- Untersuchung des Wahrheitsgehalts der gewonnenen Vermutungen auf allgemeiner Ebene
- Dafür: Vermutungen an weiteren Beispielen positiv testen; dabei nichts Widersprüchliches entdecken
- Das Wahrgenommene nicht nur zu beschreiben sondern auch zu begründen stellt für die Lernenden in der Grundschule eine hohe Anforderung dar

→ in der Grundschule können nur ca. 1/3 der Lernenden begründen (Bezold, 2009)



Bei der obigen Darstellung gelang es, ein »Muster« zu finden, das die Eigenschaften der Doppeltreppe bzw. der Quadratzahl offenbart. Die Doppeltreppe kann durch eine Drehung der weißen Stufen und eine anschießende Verschiebung in ein Quadrat überführt werden.

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Begründungen fokussieren
3. Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Begründungen fokussieren

Was zeichnet eine gute Begründung aus?

Allen Begründungen im Mathematikunterricht ist gemeinsam:
Sie beantworten die Frage nach dem **Warum**.

Um diese beantworten zu können, müssen Lernende …
- Zusammenhänge über Einzelbeispiele hinaus erklären.
- die Richtigkeit von Aussagen hinterfragen.
- einbeziehen, wie sie vorgegangen sind.

Worin unterscheiden sich Begründungen im Mathematikunterricht?

Begründungen fokussieren

Vollständigkeit begründen

Begründungen fokussieren

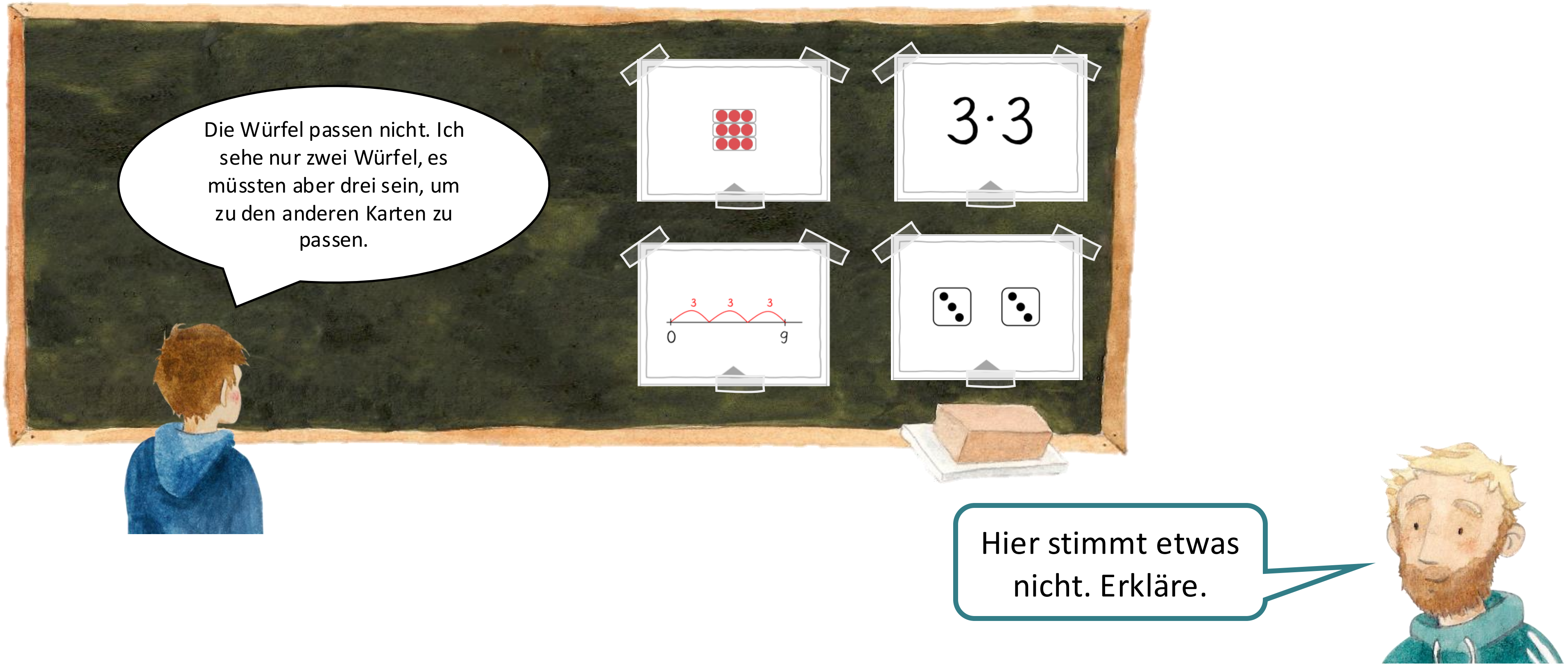
Zusammenhänge begründen

Begründungen fokussieren

Wirkungen von Operationen begründen

Begründungen fokussieren

Lösungen auf Stimmigkeit überprüfen, Fehllösungen begründen



Begründungen fokussieren

Was zeichnet eine gute Begründung aus?

Allen Begründungen im Mathematikunterricht ist gemeinsam:
Sie beantworten die Frage nach dem **Warum**.

Um diese beantworten zu können, müssen Lernende …

- Zusammenhänge über Einzelbeispiele hinaus erklären.
- die Richtigkeit von Aussagen hinterfragen.
- einbeziehen, wie sie vorgegangen sind.

Auch die Frage nach dem *Warum* ist abhängig vom jeweiligen Unterrichtsgegenstand und der Art der Begründung:

- ‚Warum ist das (immer) so?‘
- ‚Warum kannst du so rechnen?‘
- ‚Warum gehört etwas zusammen?‘
- ‚Stimmt das? Warum? Warum nicht?‘…

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Begründungen fokussieren
3. Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

„We accuse students of the high crime of ‚not even knowing what a proof is‘. Yet we, the math teachers, don’t know it either [...]“. (Hersh 1997 , S. 49)

Wann ist ein Beweis ein Beweis?

- keine generell akzeptierten Kriterien
- sozialer Prozess der Akzeptanz innerhalb der mathematischen Community entscheidend
- formaler Beweis als ein Idealbild eines mathematischen Beweises (ausgehend von Axiomen und bereits bewiesenen Sachverhalten wird das zu Zeigende deduktiv mithilfe spezifizierter Schlussregeln nachgewiesen)
- Vollständige formale Beweise in der Unterrichtspraxis zu lang, unübersichtlich und damit unlesbar und unerreichbar

$\Rightarrow$ Die in der mathematischen Praxis gängigen Beweise sollen die Betrachter davon überzeugen, dass ein vollständiger Beweis für den gegebenen Sachverhalt prinzipiell existiert.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Beweistypen in der Vorlesung Arithmetik und ihre Didaktik

Darstellungsebene/ Formalisierungsgrad	symbolisch	ikonisch
beispielgebunden	beispielgebunden symbolisch	beispielgebunden ikonisch
generell	generell symbolisch	generell ikonisch

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

beispielgebunden symbolisch

a = 3, b = 4

geeignetes Zahlenbeispiel

Voraussetzungen:

a = 3

b = a + 1 = 3 + 1 = 4

Betrachtung der Voraussetzungen

Beweis:

3 + 4 = 7

7 = 3 + (3 + 1) = (2· 3) + 1 → 7 ist ungerade

Behauptung mit Termumformungen herleiten

Schlussfolgerung:

deduktive Schlussfolgerung

Da sich die Summe 7 aus 3 und 4 als ein Vielfaches von 2 addiert mit 1 darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

beispielgebunden Ikonisch

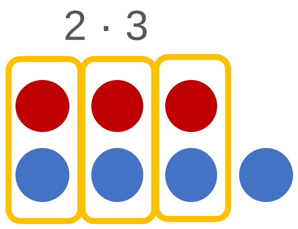
Voraussetzungen:

Die beiden aufeinanderfolgenden Zahlen werden als Plättchenreihen dargestellt, wobei die zweite Plättchenreihe um ein Plättchen länger ist, als die erste Reihe.

a = 3, b = 4

Beweis:

Legt man die beiden Plättchenreihe untereinander, lassen sich immer zwei übereinanderliegende Plättchen als Zweiergruppen zusammenfassen, dabei bleibt ein Plättchen übrig.



Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus 3 + 4 als zwei Plättchenreihen der Länge 3 und einem zusätzlichen Plättchen darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

generell symbolisch

Voraussetzungen:

a

$b = a + 1$

$a, b \in \mathbb{N}$

Beweis:

$a + b = a + (a + 1) = 2 \cdot a + 1$

Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus $a + b$ als $2a + 1$ darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

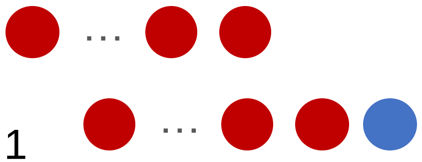
generell ikonisch

<u>Voraussetzungen:</u>

Die beiden aufeinanderfolgenden Zahlen werden als Plättchenreihen dargestellt, wobei die zweite Plättchenreihe um ein Plättchen länger ist, als die erste Reihe.

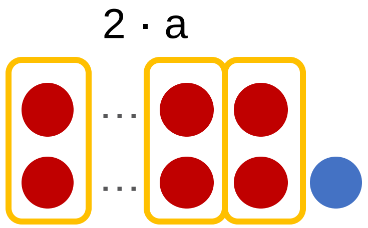
a

$b = a + 1$



<u>Beweis:</u>

Legt man die beiden Plättchenreihe untereinander, lassen sich immer zwei übereinanderliegende Plättchen als Zweiergruppen zusammenfassen, dabei bleibt ein Plättchen übrig.



<u>Schlussfolgerung:</u>

Da sich die Summe aus a + b immer als zwei Plättchenreihen der Länge a und einem zusätzlichen Plättchen darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c,
mit c I a und c I b gilt:
$a : b = (a : c) : (b : c)$

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

beispielgebunden symbolisch

a = 32, b = 8, c = 2

geeignetes Zahlenbeispiel

Voraussetzungen:

2 | 32 → 2 · 16 = 32

2 | 8 → 2 · 4 = 8

Betrachtung der Voraussetzungen

Beweis:

Behauptung mit Termumformungen herleiten

((2 · 16) : 2) : ((2 · 4) : 2) =

Schlussfolgerung:

deduktive Schlussfolgerung

Die gleichsinnigen Veränderungen heben sich gegenseitig auf,
deshalb bleiben nur der ursprüngliche Dividend und Divisor übrig. Der Quotient bleibt also der Gleiche.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

beispielgebunden symbolisch

a = 32, b = 8, c = 2

geeignetes Zahlenbeispiel

Voraussetzungen:

2 | 32 → 2 · 16 = 32

2 | 8 → 2 · 4 = 8

Betrachtung der Voraussetzungen

Beweisen Sie nun das Konstanzgesetz der Division generell symbolisch.

Beweis:

$$((2 \cdot 16) : 2) : ((2 \cdot 4) : 2) = \frac{\frac{2\cdot 16}{2}}{\frac{2\cdot 4}{2}} = \frac{2\cdot 16}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{2\cdot 4} = \frac{32}{8} = 32 : 8$$

Behauptung mit Termumformungen herleiten

Schlussfolgerung:

Die gleichsinnigen Veränderungen heben sich gegenseitig auf,
deshalb bleiben nur der ursprüngliche Dividend und Divisor übrig. Der Quotient bleibt also der Gleiche.

deduktive Schlussfolgerung

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

generell symbolisch

a, b, c $\in \mathbb{N}$

Voraussetzungen:

c | a → $c \cdot n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$

c | b → $c \cdot m = b$ mit $m \in \mathbb{N}$

Beweis

$$((c \cdot n) : c) : ((c \cdot m) : c) = \frac{\frac{c \cdot n}{c}}{\frac{c \cdot m}{c}} = \frac{c \cdot n}{c} \cdot \frac{c}{c \cdot m} = \frac{c \cdot n}{c \cdot m} = \frac{a}{b} = a : b$$

Schlussfolgerung:

Die gleichsinnigen Veränderungen heben sich gegenseitig auf,
deshalb bleiben nur der ursprüngliche Dividend und Divisor übrig. Der Quotient bleibt also der Gleiche.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
$a : b = (a : c) : (b : c)$

beispielgebunden ikonisch

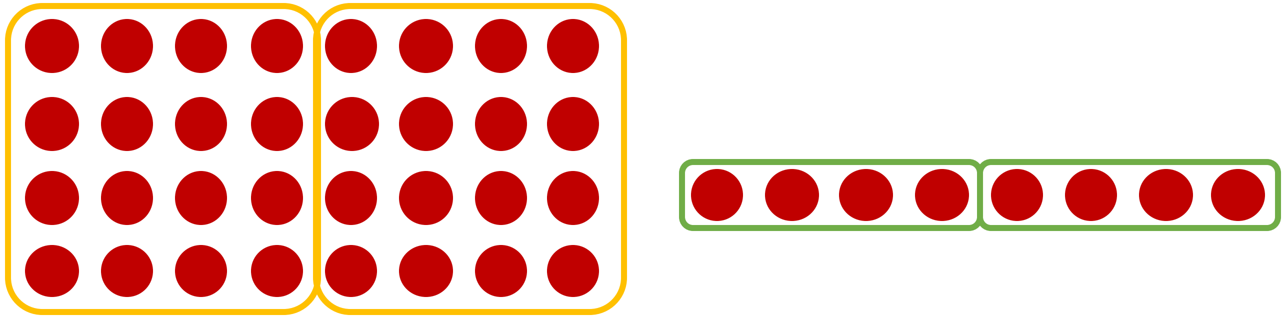
$a = 32$, $b = 8$, $c = 2$

<u>Voraussetzungen:</u>

$2 \mid 32 \rightarrow \quad 2 \cdot 16 = 32$

$2 \mid 8 \rightarrow \quad 2 \cdot 4 = 8$

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in zwei gleich große Gruppen unterteilen lassen.



Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

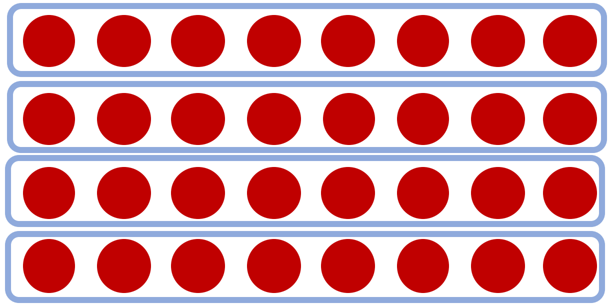
Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt:
$a : b = (a : c) : (b : c)$

beispielgebunden ikonisch

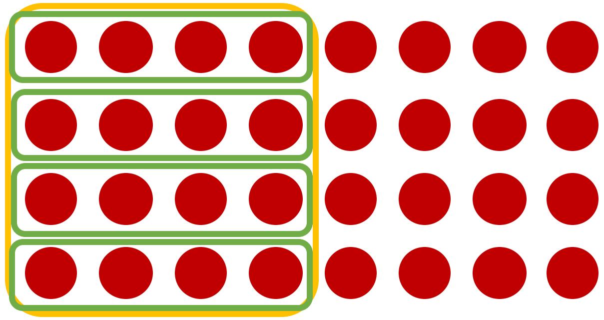
$a = 32$, $b = 8$, $c = 2$

<u>Beweis</u>

Die 32 Plättchen lassen sich in vier 8er Gruppen einteilen.



Betrachten wir nur die Hälfte der Plättchen, also 16 und halbieren gleichzeitig die Größe der Gruppen, so ist zu erkennen, dass sich 16 Plättchen ebenfalls in vier gleich große Gruppen einteilen lassen.



<u>Schlussfolgerung:</u>

Bei der <u>gleichsinnigen</u> Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

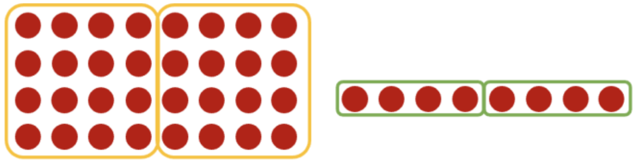
Wie kann eine passende lineare Darstellung aussehen?
Inwiefern ändert sich dann die Sprache?

beispielgebunden ikonisch

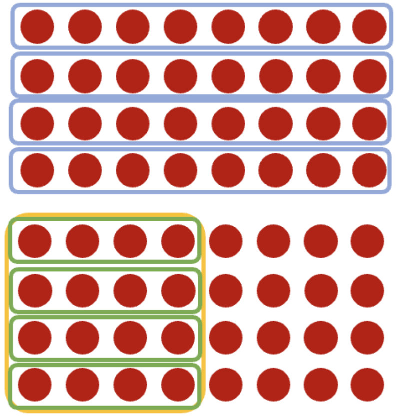
a = 32, b = 8, c = 2

<u>Voraussetzungen:</u>

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in zwei gleich große Gruppen unterteilen lassen.



<u>Beweis</u>



Die 32 Plättchen lassen sich in vier 8er Gruppen einteilen. Betrachten wir nur die Hälfte der Plättchen, also 16 und halbieren gleichzeitig die Größe der Gruppen, so ist zu erkennen, dass sich 16 Plättchen ebenfalls in vier gleich große Gruppen einteilen lassen.

<u>Schlussfolgerung:</u>

Bei der <u>gleichsinnigen</u> Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

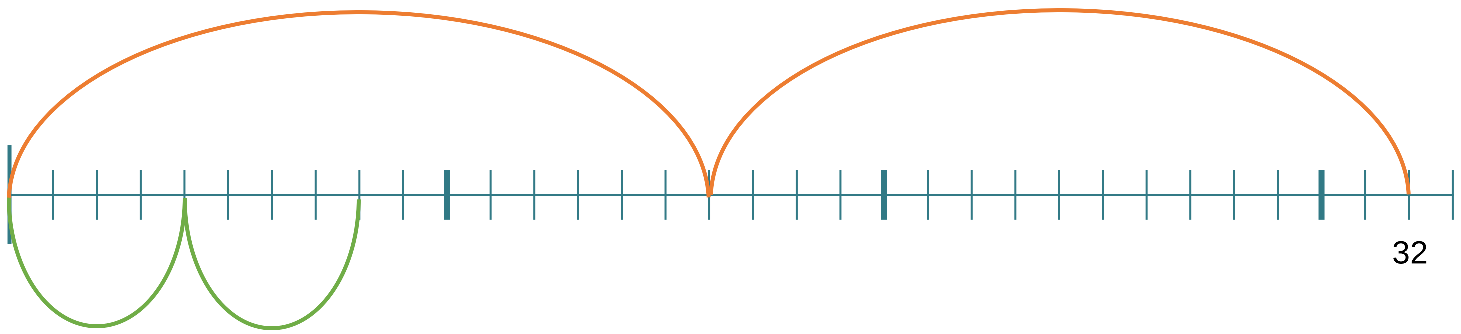
Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

beispielgebunden ikonisch

a = 32, b = 8, c = 2

<u>Voraussetzungen:</u>

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich jeweils durch zwei gleichlange Sprünge darstellen.



Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

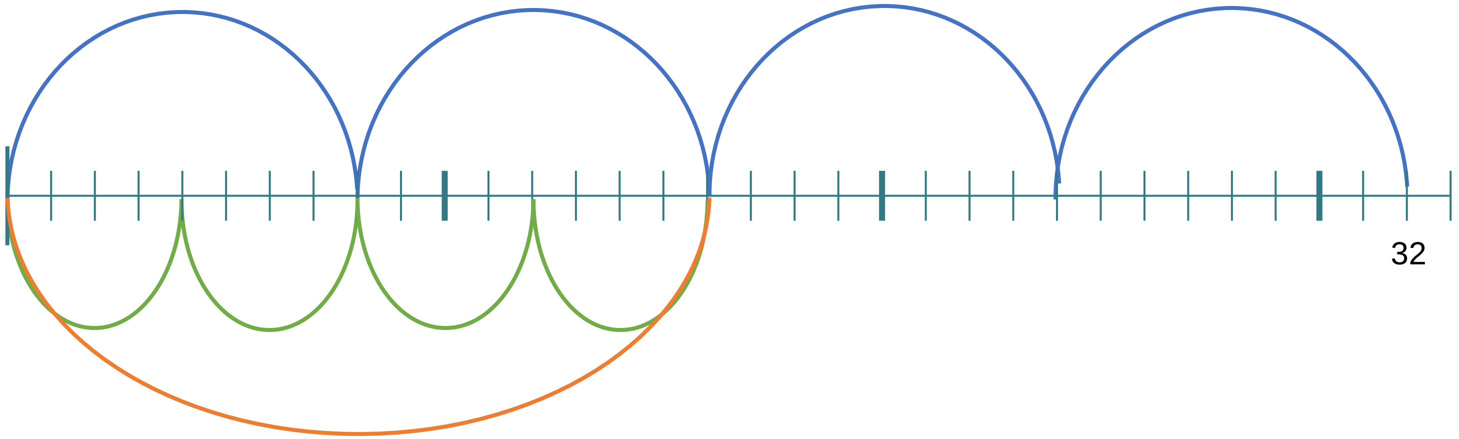
Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

beispielgebunden ikonisch

a = 32, b = 8, c = 2

<u>Beweis</u>

Eine Strecke der Länge 32 lässt sich mit vier Sprüngen der Länge 8 restlos ausmessen. Betrachten wir nur die halbe Strecke, der Länge 16 und halbieren gleichzeitig die Länge der Sprünge, so ist zu erkennen, dass sich die Strecke der Länge 16 ebenfalls mit vier Sprüngen restlos ausmessen lässt.



<u>Schlussfolgerung:</u>

Bei der <u>gleichsinnigen</u> Veränderung der Gesamtstrecke sowie der Sprunglänge bleibt die Anzahl der Sprünge gleich.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

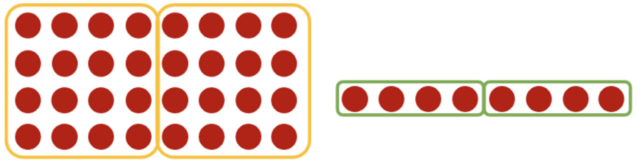
beispielgebunden ikonisch

Beweisen Sie nun das Konstanzgesetz der Division generell ikonisch.

a = 32, b = 8, c = 2

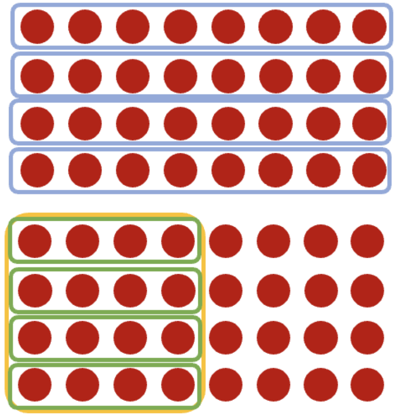
<u>Voraussetzungen:</u>

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in zwei gleich große Gruppen unterteilen lassen.



<u>Beweis</u>

Die 32 Plättchen lassen sich in vier 8er Gruppen einteilen. Betrachten wir nur die Hälfte der Plättchen, also 16 und halbieren gleichzeitig die Größe der Gruppen, so ist zu erkennen, dass sich 16 Plättchen ebenfalls in vier gleich große Gruppen einteilen lassen.



<u>Schlussfolgerung:</u>

Bei der <u>gleichsinnigen</u> Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

generell ikonisch

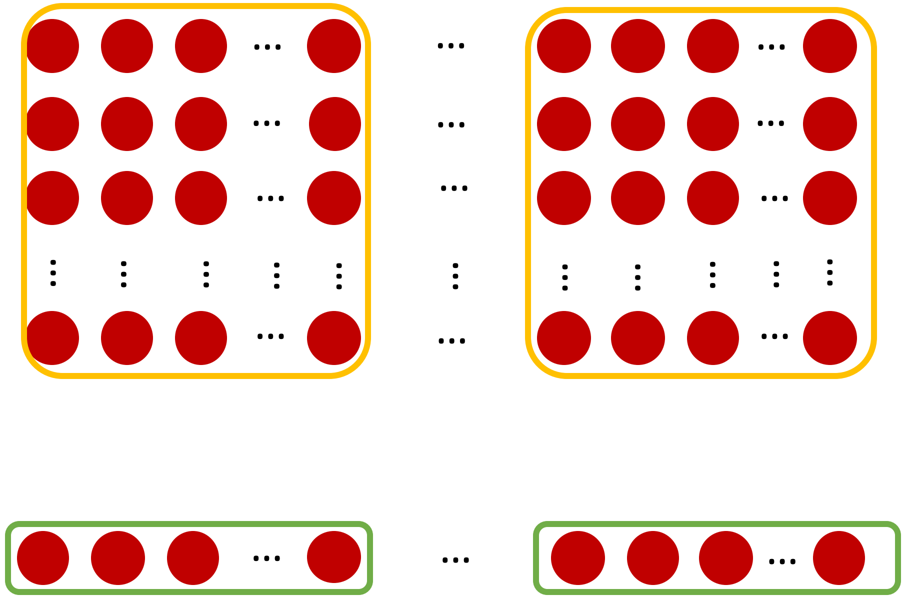
a, b, c ∈ ℕ

<u>Voraussetzungen:</u>

c | a → c · n = a mit n ∈ ℕ

c | b → c · m = b mit m ∈ ℕ

Beide Zahlen a und b lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in c gleich große Gruppen unterteilen lassen.



Beweistypen aus didaktischer Perspektive

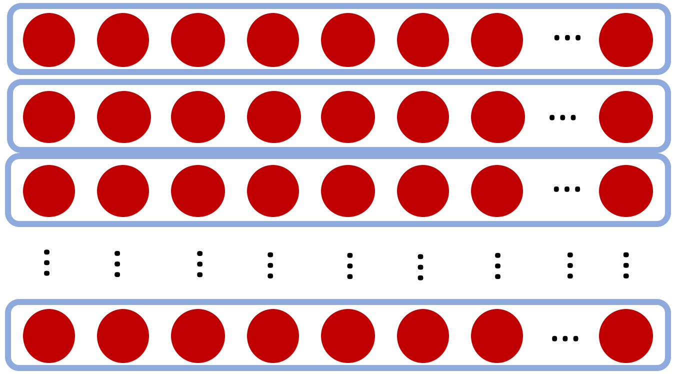
Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit c I a und c I b gilt:
a : b = (a : c) : (b : c)

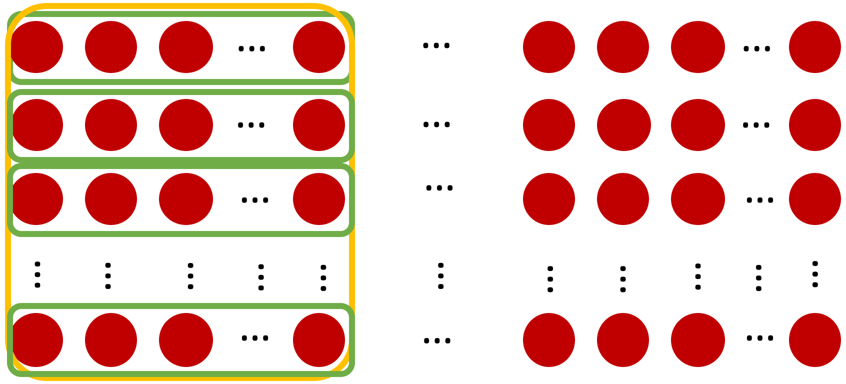
generell ikonisch

<u>Beweis</u>

a Plättchen lassen sich in x Gruppen der Größe b einteilen.



Teilen wir nun die Gesamtanzahl der Plättchen in c Gruppen und teilen wir gleichzeitig die Anzahl der Plättchen in jeder Gruppe durch c, so ist zu erkennen, dass sich die Plättchen innerhalb der Gruppe c ebenfalls in x gleich große Gruppen einteilen lassen.



<u>Schlussfolgerung:</u>

Bei der <u>gleichsinnigen</u> Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Beweis-Check

Beweisstruktur:

- Beweise beginnen bei der Voraussetzung und enden bei der Behauptung. Sie enthalten keine Zirkelschlüsse.
- Die Schritte der Beweisführung sind erkennbar (Voraussetzung, Beweis, Schlussfolgerung).

Argumentationsbasis:

- Beweise beruhen nicht nur auf einzelnen Beispielen, sondern auf deduktiven Schlussfolgerungen.
- Alle verwendeten Variablen werden definiert.

Beweiskette:

- Jeder Beweisschritt folgt aus dem Vorhergehenden und wird durch eine Begründung gestützt. Ein erläuternder Text sorgt bei Bedarf für die Nachvollziehbarkeit der Beweisschritte.
- Herleitung der Aussage mithilfe von Termumformungen und/oder logischen Schlussfolgerungen, verwendete Rechengesetze werden dabei notiert.

Fragen? Vielen Dank!

Literatur

- Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote - ein Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Verlag Dr. Kovac.
- Bezold, A. (2010). Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern. Verfügbar unter: https://primakom.dzlm.de/primafiles/uploads/Dokumente/Arg_Handreichung_Mathe_Bezold.pdf
- Biehler, R., Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *J Math Didakt* 37, 141–179. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1
- PIKAS-Team (im Erscheinen). *Mathematik sprachbildend unterrichten*. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.).

Internetlinks

- Arithmetik digital (2024). Konstanz des Quotienten. Verfügbar unter: https://adi.dzlm.de/node/118