

# Vorkurs – Vorlesung 13

## Beweisen II



# Laufende Fragensammlung



[https://padlet.com/DZLM\\_SiMa\\_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p](https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p)

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Einstieg – was ist das überhaupt?
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
  - a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

# Grundlegendes

- **Was ist alles wichtig im Zusammenhang mit Beweisen?**

Definition:

Satz (oder Theorem):

Beweis:

Vermutung:

Axiom:

# Grundlegendes

- **Anforderungen an Beweise**
- Lückenlosigkeit und Vollständigkeit
- Minimalität
- Formalisierung in Struktur, Sprache und Symbolik

# Grundlegendes

- **Funktionen von Beweisen**

Verifikation:

Erklärung:

Kommunikation:

Entdecken:

Systematisierung:

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
  - a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

# Beweistypen aus fachlicher Perspektive

Was kommt heraus, wenn man  
die Zahlen von  
1 bis 100 addiert?



# Beweistypen aus fachlicher Perspektive



Karl Friedrich Gauß

Carl Friedrich Gauß gehört zu den bedeutendsten Mathematikern, die je gelebt haben. Er wurde 1777 in Braunschweig geboren.

*Carl Friedrich Gauß (1777–1855)*



*Carl Friedrich Gauß (1777–1855)*

Carl Friedrich Gauß gehört zu den bedeutendsten Mathematikern, die je gelebt haben. Er wurde 1777 in Braunschweig geboren.

Als Carl Friedrich Gauß 10 Jahre alt war, stellte sein Lehrer der Klasse eine große Rechenaufgabe: Berechnet die Summe aller Zahlen von 1 bis 100. Viele Kinder rechneten  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ . Aber Carl Friedrich überlegte ein wenig und nannte als Ergebnis die Multiplikation  $50 \cdot 101$ . Warum passt die Multiplikation zur großen Rechenaufgabe?

Als Carl Friedrich Gauß 10 Jahre alt war, stellte sein Lehrer der Klasse eine große Rechenaufgabe:

*Berechnet die Summe aller Zahlen von 1 bis 100.*

Viele Kinder rechneten  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ .

Aber Carl Friedrich überlegte ein wenig und nannte als Ergebnis die Multiplikation  **$50 \cdot 101$** .

Warum passt die Multiplikation zur großen Rechenaufgabe?

Überlegen Sie gemeinsam:  
Wie sehen die unterschiedlichen Begründungsformen, die Sie gestern kennengelernt haben, für dieses Beispiel aus?

# Reminder: Beweistypen aus didaktischer Perspektive

<b>Darstellungsebene/ Formalisierungsgrad</b>	symbolisch	ikonisch
beispielgebunden	beispielgebunden symbolisch	beispielgebunden ikonisch
generell	generell symbolisch	generell ikonisch

# Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe der Zahlen 1 bis 100 entspricht 5050.

## Beispielgebunden symbolisch

Beispiel bereits  
vorhanden

Beweis:

$$\begin{array}{rclclcl} 1 & + & 100 & = & 101 \\ 2 & + & 99 & = & 101 \\ 3 & + & 98 & = & 101 \\ 4 & + & 97 & = & 101 \\ 5 & + & 96 & = & 101 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 49 & + & 52 & = & 101 \\ 50 & + & 51 & = & 101 \end{array}$$

Schlussfolgerung:

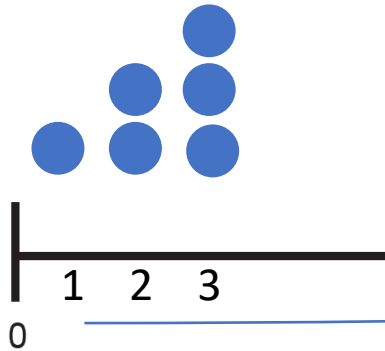
Da sich die Summe der aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 100 in 50 Teilsummen aufteilen lässt, die jeweils 101 ergeben, folgt daraus, dass das Ergebnis  $50 \cdot 101 = 5050$  ist.

# Beweistypen aus didaktischer Perspektive

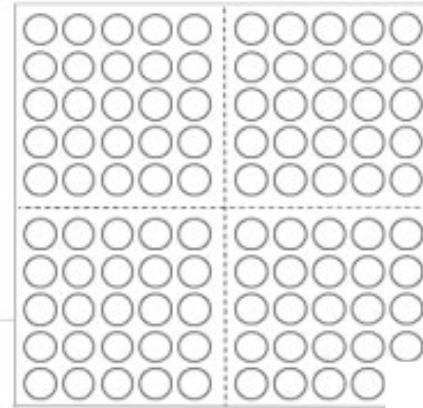
Die Summe der Zahlen 1 bis 100 entspricht 5050.

## Beispielgebunden Ikonisch

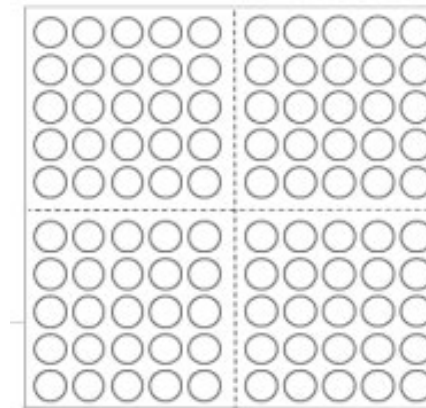
Oder ist das schon generell ikonisch?



$$2+99=101$$



$$1+100=101$$



...

100

### Schlussfolgerung:

Da sich die Summe der aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 100 in 50 Teilsummen aufteilen lässt, die jeweils 101 ergeben, folgt daraus, dass das Ergebnis  $50 \cdot 101 = 5050$  ist.

# Beweistypen aus didaktischer Perspektive

## generell ikonisch

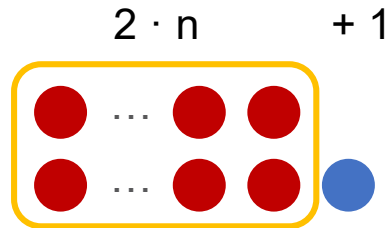
Voraussetzungen:

$a = n$  ● ... ● ●

$b = n + 1$  ● ... ● ● ● ●

Beweis:

$$a + b = n + (n + 1) = 2 \cdot n + 1$$



Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus  $a + b$  als immer Plättchen mit der Länge  $2n + 1$  darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Diese Beweisführung gilt analog für alle natürlichen Zahlen  $a, b$ , mit  $b = a + 1$ .

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Erinnerung:

# Beweistypen aus didaktischer Perspektive

## generell symbolisch

### Voraussetzungen:

$$a = n$$

$$b = n + 1$$

Betrachtung der Voraussetzungen

### Beweis:

$$a + b = n + (n + 1) = 2 \cdot n + 1$$

Behauptung mit Termumformungen herleiten

### Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus  $a + b$  als  $2n + 1$  darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Diese Beweisführung gilt analog für alle natürlichen Zahlen  $a, b$ , mit  $b = a + 1$ .

deduktive Schlussfolgerung

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Erinnerung:

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
  - a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

# Beweis durch vollständige Induktion

- Beweismethode, um eine Behauptung für alle natürlichen Zahlen nachzuweisen

## **Satz: Prinzip der vollständigen Induktion**

Es sei  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine unendliche Folge von Aussagen. Es gelte

- (1)  $A(n)$  ist wahr für ein  $n \in \mathbb{N}$  und
- (2)  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann ist  $A(n)$  wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- *Bemerkung*
- Die Prüfung von Bedingung (1) wird als der *Induktionsanfang* (I.A.) bezeichnet.
- Die Prüfung von Bedingung (2) wird als der *Induktionsschritt* (I.S.) bezeichnet.



# Beweis durch vollständige Induktion

- **Peano-Axiome**

**Axiom 1:** 1 ist eine natürliche Zahl

**Axiom 2:** Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.

**Axiom 3:** Es gibt keine natürliche Zahl, dessen Nachfolger 1 ist.

**Axiom 4:** Unterschiedliche natürliche Zahlen haben unterschiedliche Nachfolger.

**Axiom 5:** Es sei  $M$  eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften: 1 gehört zu  $M$  und wenn  $x$  zu  $M$  gehört, so gehört auch der Nachfolger von  $x$  zu  $M$ . Dann umfasst  $M$  alle natürlichen Zahlen.

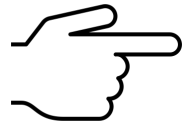
Induktionsaxiom  
(eines der grundlegenden  
Prinzipien der Mathematik)

# Beweis durch vollständige Induktion

- **Inhaltliche Vorstellung**

## Behauptung

Für alle passend aufgestellten Dominosteine gilt:  
werden die Dominosteine *angeschubst*, so fallen sie um



**I.A.** Die Aussage gilt für  $n = 1$

**I.A.** Der erste Stein fällt um

**I.V.** **WENN** die Aussage gilt für ein  $n$

**I.V.** **WENN** der Stein Nr.  $n$  fällt um

**I.B.** **DANN** die Aussage gilt für  $n + 1$

**I.B.** **DANN** Stein Nr.  $n + 1$  fällt um

→ Prüfen dieser Behauptung im Induktionsschritt

# Beweis durch vollständige Induktion

- **Ausgangsbeispiel: Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100**

$$\begin{array}{rclcl}
 1 & + & 100 & = & 101 \\
 2 & + & 99 & = & 101 \\
 3 & + & 98 & = & 101 \\
 4 & + & 97 & = & 101 \\
 5 & + & 96 & = & 101 \\
 & \vdots & & & \vdots \\
 49 & + & 52 & = & 101 \\
 50 & + & 51 & = & 101
 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100}{2} \cdot 101 = 5050$$

## Behauptung

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

# Beweis durch vollständige Induktion

## Behauptung

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

## Induktionsanfang

Die Behauptung gilt für  $n = 1$ , denn es gilt  $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1)$

**WENN** Annahme: Es gelte  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

**DANN** zu zeigen:  $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n + 1) \cdot ((n + 1) + 1)}{2}$

Induktionsannahme/  
voraussetzung (I.V.)

Induktionsbehauptung  
(I.B.)

# Beweis durch vollständige Induktion

zu zeigen:  $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot ((n+1) + 1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

*Induktionsschritt*

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1)$$

Anwenden der  
Induktionsannahme/  
voraussetzung

$$\stackrel{\text{i.v.}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{DG}}{=} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot (n+1)$$

$$= \left(\frac{n+2}{2}\right) \cdot (n+1)$$

$$\stackrel{\text{KG}}{=} \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

# Beweis durch vollständige Induktion

## Satz: Dreiecks und Quadratzahlen

Die Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl. Formal:

$$D_n + D_{n+1} = Q_{n+1}$$

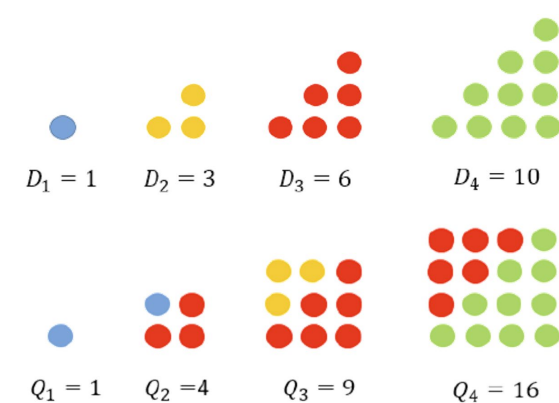
Legt man verschiedene Dreiecks- und Quadratzahlen mit Plättchen, wird der Zusammenhang zwischen ihnen schnell ersichtlich.  
Aber warum ist das so?

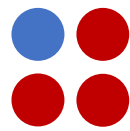
Legt man zwei gleiche Dreieckszahlen aneinander, so muss man, um ein Quadrat zu erhalten, die Diagonale doppelt belegen. Zieht man die Anzahl der sich überlappenden Plättchen ab, so erhält man die nächstkleinere Dreieckszahl.

Skizzieren Sie selbst die Aussage mithilfe von Punktemustern, um sich den Zusammenhang zu verdeutlichen.

# Beweis durch vollständige Induktion

## • Satz: Dreiecks- und Quadratzahlen



Behauptung:  $D_n + D_{n+1} = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)^2 = Q_{n+1}$  

Beweis: *I.A.* Für  $n = 1$  gilt:  $D_1 + D_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = Q_2$

*I.V.* Es gelte  $D_n + D_{n+1} = Q_{n+1}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

*I.B.* zu zeigen:  $D_{n+1} + D_{n+2} = (n+2)^2 = Q_{n+2}$

*I.S.*

$$\sum_{i=1}^{n+1} i + \sum_{i=1}^{n+2} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) + \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+2)$$

KG, I.V.

$$= (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)$$

$$= (n^2 + 2n + 1) + (2n + 3)$$

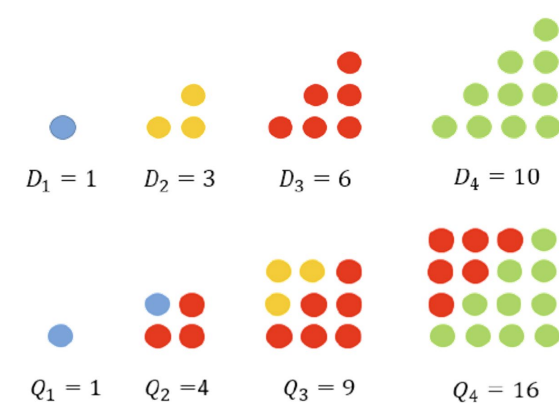
AG, KG

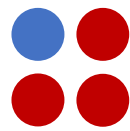
$$= n^2 + 4n + 4$$

$$= (n+2)^2$$

# Beweis durch vollständige Induktion

## • Satz: Dreiecks- und Quadratzahlen



Behauptung:  $D_n + D_{n+1} = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1)^2 = Q_{n+1}$  

Beweis: *I.A.* Für  $n = 1$  gilt:  $D_1 + D_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = Q_2$

*I.V.* Es gelte  $D_n + D_{n+1} = Q_{n+1}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

*I.B.* zu zeigen:  $D_{n+1} + D_{n+2} = (n+2)^2 = Q_{n+2}$

*I.S.*

$$\sum_{i=1}^{n+1} i + \sum_{i=1}^{n+2} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) + \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+2)$$

$$\stackrel{\text{KG, I.V.}}{=} (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)$$

$$= (n^2 + 2n + 1) + (2n + 3)$$

$$\stackrel{\text{AG, KG}}{=} n^2 + 4n + 4$$

$$= (n+2)^2$$



# Begründen oder Beweisen?

1. „Begründung“ mit speziellem Beispiel

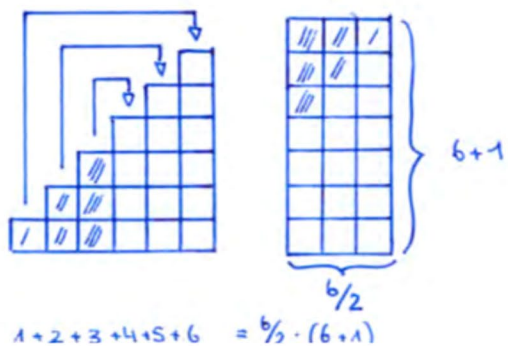
$$1+2+3 = \frac{3}{2} (3+1) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10}{2} (10+1) = 5 \cdot 11 = 55$$

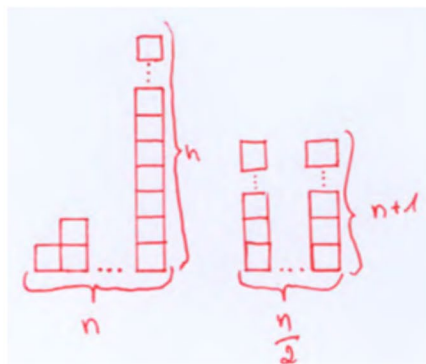
2. Begründung mit generischem Beispiel

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

3. Begründung mit generischem Bild



4. Begründung mit allgemeinem Bild



5. Begründung mit Algebraisierung

$$2 \cdot (1 + \dots + n) = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n + n + n - 1 + \dots + 2 + 1$$

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \cdot (n+1)}$$

Da also  $2 \cdot (1 + \dots + n) = n \cdot (n+1)$ , ist  $1 + \dots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$ .

6. Begründung mit vollständige Induktion

Induktionsanfang:

$$n=2: \text{ Es gilt } 1+2=3 = \frac{2}{2} (2+1) = \frac{2}{2} \cdot 3$$

Induktionsannahme:

Sei  $n$  eine beliebige Zahl, für die gilt:

$$1+2+\dots+m = \frac{m}{2} (m+1)$$

Induktionsschluss:

Zu zeigen, wenn dies für  $m$  gilt, gilt es auch für  $m+1$ :

$$1+2+\dots+m+(m+1) = \frac{m}{2} \cdot (m+1) + (m+1)$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2m+2}{2}$$

$$= \frac{m^2+m+2m+2}{2}$$

$$= \frac{(m+1)}{2} \cdot (m+1+1) \text{ q.e.d.}$$

Was überzeugt Sie am meisten?  
Was ist der Unterschied zwischen den unterschiedlichen Begründungen und Beweisen?

# Grundlegendes

## • Funktionen von Beweisen

- **Verifikation:**  
Die Wahrheit einer Aussage soll bewiesen (verifiziert) werden.
- **Erklärung:**  
Die Leser\*innen sollen verstehen, warum eine Behauptung gilt.
- **Kommunikation:**  
Ein Beweis vermittelt mathematisches Wissen und erlaubt es, die Wahrheit einer Aussage zu prüfen (und sich darüber auszutauschen).
- **Entdecken:**  
Gründe für die Richtigkeit einer Aussage werden beim Beweisen entdeckt.
- **Systematisierung:**  
Beweise stellen Zusammenhänge zwischen Sätzen her. (Welche bekannten Sätze und Definitionen spielen bei einem Beweis eine Rolle? Wie hängen die Sätze einer Theorie miteinander zusammen?)

Welche Funktionen von Beweisen werden hier berücksichtigt? Was ist für Sie am wichtigsten?

### 5. Begründung mit Algebraisierung

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1 + \dots + n) &= 1 + 2 + \dots + n-1 + n \\
 &+ n + n-1 + \dots + 2 + 1 \\
 &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \cdot (n+1)} = n \cdot (n+1)
 \end{aligned}$$

Da also  $2 \cdot (1 + \dots + n) = n \cdot (n+1)$ , ist  $1 + \dots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$ .

### 6. Begründung mit vollständige Induktion

Induktionsanfang:  
 $n = 2$ : Es gilt  $1+2 = 3 = \frac{2}{2} \cdot (2+1) = \frac{2}{2} \cdot 3$

Induktionsannahme:  
 Sei  $m$  eine beliebige Zahl, für die gilt:  
 $1+2+\dots+m = \frac{m}{2} \cdot (m+1)$

Induktionsschluss:  
 zu zeigen, wenn dies für  $m$  gilt, gilt es auch für  $m+1$ :  
 $1+2+\dots+m+(m+1) = \frac{m}{2} \cdot (m+1) + (m+1)$   
 $= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2}$   
 $= \frac{m^2 + m + 2m + 2}{2}$   
 $= \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)}{2} \cdot (m+1+1) = \frac{(m+1)}{2} \cdot (m+2)$

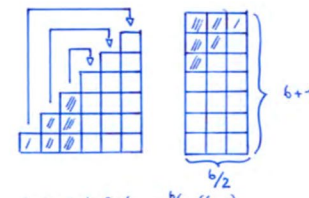
### 1. „Begründung“ mit speziellem Beispiel

$$\begin{aligned}
 1+2+3 &= \frac{3}{2} \cdot (3+1) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6 \\
 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 &= \frac{10}{2} \cdot (10+1) = 5 \cdot 11 = 55
 \end{aligned}$$

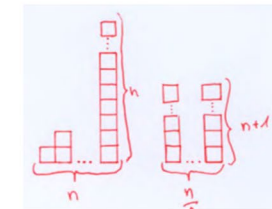
### 2. Begründung mit generischem Beispiel

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 5 \cdot 11$$

### 3. Begründung mit generischem Bild



### 4. Begründung mit allgemeinem Bild



(Villiers, 1990)

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
  - a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

# Weitere Beweistypen

## 1. Widerlegen durch Gegenbeispiel (Widerlegen einer Vermutung)

Ein Gegenbeispiel zur Implikation  $A \Rightarrow B$  ist ein Sachverhalt, bei dem  $A$  wahr und  $B$  falsch ist. Dadurch wird die Vermutung  $A \Rightarrow B$  widerlegt, d.h. gezeigt, dass  $A \Rightarrow B$  kein Satz ist.

## 2. Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow \emptyset)$$

## 3. Kontraposition

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlegendes
2. Beweistypen aus fachlicher Perspektive
  - a. Beweis durch vollständige Induktion
3. weitere Beweistypen
4. Beweis-Check

# Beweis-Check

Behauptung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $2 \mid (2n + 2)^2 + 2n = (4n^2 + 8n + 4) + 2n$

Beweis:

*I.A.* Für  $n = 1$  gilt:

*I.V.* Es gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

*I.B.* zu zeigen:

*Induktionsschritt*

$$(2(n + 1) + 2)^2 + 2(n + 1) =$$

$$= (2n + 2)^2 + 2n + 2(4n + 7)$$

# Fragen? Vielen Dank!

