

Synopse zur 12. Vorlesung – 17.09.2024

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel II – Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten wieder die Funktion

$$f: D = [-12, 18) \mapsto \mathbb{R}, \\ f(x) = 2x,$$

Wir haben bereits gesehen, dass alle Werte die f annimmt kleinergleich 36 sind, d.h., der Bildbereich ist beschränkt von oben durch 36.

Frage: Besitzt der Bildbereich

$$B(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

eine kleinste obere Schranke?

Ja! Nämlich “ $f(18)$ ”, also genau 36. (Die Anführungszeichen stehen da, weil $f(18)$ ja nicht definiert ist!)

Definition

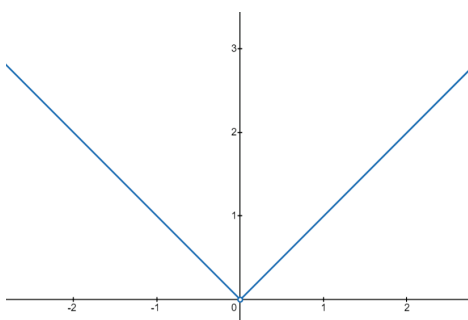
Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

- S ist eine *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A , falls $a \leq S$ für alle $a \in A$ und es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a = a_\varepsilon \in A$ gibt, sodass $a_\varepsilon > S - \varepsilon$. Wir Schreiben dann $S = \sup(A)$.
- S ist eine *größte untere Schranke* oder *Infimum* von A , falls $a \geq S$ für alle $a \in A$ und es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a = a_\varepsilon \in A$ gibt, sodass $a_\varepsilon < S + \varepsilon$. Wir Schreiben dann $S = \inf(A)$.

Beispiel Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x|.$$

Hier gilt: $B(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = (0, \infty)$
also $\inf B(f) = 0$



Satz (Kolmogorov Kriterium II)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Seien $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{v} \in A$. Dann sind äquivalent:

(a) $\langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle \geq 0$ für alle $\vec{u} \in A$

(b)

$$\|\vec{w} - \vec{v}\| = \min_{\vec{u} \in A} \|\vec{w} - \vec{u}\|$$

Beweis

(a) $\Rightarrow$ (b). Für alle $\vec{u} \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \|\vec{w} - \vec{u}\| &= \|\vec{w} - \vec{v} + \vec{v} - \vec{u}\| \\ &= \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{u} \rangle + \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 - \underbrace{2\langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle}_{<0} + \underbrace{\|\vec{v} - \vec{u}\|^2}_{>0} \\ &\geq \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a).

Zu $t \in [0, 1]$ setze $\vec{u}_t = (1-t)\vec{v} + t\vec{u}$. Wenn $\vec{u} \in A$, dann auch $\vec{u}_t \in A$ (wegen Konvexität). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 &\leq \|\vec{w} - \vec{u}_t\|^2 \\ &= \langle \vec{w} - \vec{u}_t, \vec{w} - (1-t)\vec{v} + t\vec{u} \rangle \\ &= \langle \vec{w} - \vec{v} + t(\vec{v} - \vec{u}), \vec{w} - \vec{v} + t(\vec{v} - \vec{u}) \rangle \\ &= \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 + 2t\langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{v} \rangle + t^2\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

daraus folgt $\langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{v} \rangle \leq \frac{t}{2}\|\vec{v} - \vec{u}\|^2$ für alle $t \in [0, 1]$. Also $\langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{v} \rangle = 0$, wie gewollt. $\square$

5 Einfache und weniger einfache reelle Zahlen

Einfache reelle Zahlen sind die natürlichen Zahlen. Die **Peano-Axiome** definieren *axiomatisch* die natürliche Zahlen. Das **Induktionsprinzip** folgt aus der Peano-Axiomen und ist eine wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Beispiel: In einem Gebäude gibt es einen Eingang, der ins Erdgeschoss führt. In jeder Etage befindet sich ein Fahrstuhl, der in die nächsthöhere Etage fährt.

Ist es möglich (mit Fahrstuhl) in die Etage n zu kommen?

Induktionsprinzip – Variante I

Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $1 \in M$
- (b) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.

- (a) wird *Induktionsanfang* genannt
- (b) wird *Induktionsschritt* genannt.

Induktionsprinzip – Variante II

Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $1 \in M$
- (b') $\{1, 2, \dots, n\} \subset M \Rightarrow n + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.

In dieser Variante ist der Schluss einfacher zu ziehen.

Induktionsprinzip – Variante III

Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

- (a'') $j \in M$ für ein $j \in \mathbb{N}$
- (b) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

dann ist $M \supset \{j, j + 1, j + 2, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq j\}$.