technische universität dortmund
fakultät für mathematik

PROF. DR. IVAN VESELIĆ DR. MICHELE SERRA

12. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Aufgabe 1) (Induktion)

Beweisen Sie mit Induktion:
a) Für $0 < x < y$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt: $0 < x^m < y^m$;
b)

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Aufgabe 2) (Minimum einer Menge)

Definition (Minimum/Maximum einer Menge)

Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

- X besitzt ein Minimum, falls ein $m \in X$ existiert, sodass $x \geq m$ für alle $x \in X$. Die Zahl m heißt ein *Minimum* von X.
- X besitzt ein Maximum, falls ein $M \in X$ existiert, sodass $x \leq M$ für alle $x \in X$. Die Zahl M heißt ein *Maximum* von X.
- Für Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Minima und Maxima, falls existierend, eindeutig!

Seien im folgenden $A, B, C \subset \mathbb{R}$ mit $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie:

(a) Ist s eine obere Schranke an A und r eine obere Schranke an B, so ist $s + r$ eine obere Schranke an C.

(b) Ist m das Minimum von A und u das Minimum von B, so ist $m + u$ das Minimum von C.

(c) Besitzen sowohl A als auch B ein Minimum, so besitzt auch C ein Minimum.

Aufgabe 3) (Minimum einer Summe von Funktionen)

Seine im folgenden $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h = f + g$. Zeigen Sie:

(a) Besitzt f eine obere Schranke und g ebenfalls, dann besitzt auch h eine obere Schranke.

(b) Auch wenn f, g und h alle ein Minimum besitzen, muss nicht gelten

$$\min_{x\in\mathbb{R}} h(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \min_{x\in\mathbb{R}} g(x),$$

aber es gilt zumindest

$$\min_{x\in\mathbb{R}} h(x) \geq \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \min_{x\in\mathbb{R}} g(x).$$

(c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem weder f noch g ein Minimum besitzt, aber h trotzdem ein Minimum besitzt.