

Vorkurs – VL 12

Beweisen I



Vorkurs



https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Laufende Fragensammlung



Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Begründungen fokussieren
3. Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Argumentieren im Mathematikunterricht

Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler

- **stellen Vermutungen** über mathematische (auch algorithmische) Muster und Strukturen an,
- benennen Beispiele für vermutete Zusammenhänge,
- vergleichen mathematische Muster und Strukturen im Hinblick auf Zusammenhänge, Gemeinsamkeiten und Unterschiede,
- **bestätigen oder widerlegen** ihre Vermutungen anhand von Beispielen,
- **erklären** allgemeine Überlegungen in Bezug auf Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten anhand von Beispielen,
- **begründen** ihre Vorgehensweisen nachvollziehbar,
- **hinterfragen** eigene und fremde Vermutungen oder Aussagen,
- geben Begründungen anderer wieder,
- **beurteilen** die Nachvollziehbarkeit der Begründungen anderer

Argumentieren im Mathematikunterricht

Literatur

- „**Argumentative Situationen** sind der Ort, an dem Bedeutungen ausgehandelt werden, wozu ein **Begründungsbedarf** explizit angezeigt werden muss.“ (Schwarzkopf, 2000)
- Argumentieren ist ein wichtiges **Element des Entdeckenden Lernens**
- Mathematik befasst sich im wesentlichen mit **Mustern** (Regelhaftigkeiten, Ordnungsgesetzen oder Strukturen), diese sollen **argumentativ begründet** werden
- „Ausgangspunkte oder Auslöser für Argumentationen in Lehr-Lern-Situationen sind Koordinationsprobleme im Bemühen um gemeinsames Handeln, um Konsens.“ (Krummheuer, 1997)
- Rechenwege erklären ist nicht gleich Argumentieren, wichtig ist **wie miteinander gesprochen** wird, ist eine **Diskussion erkennbar?** (Krauthausen, 2018)

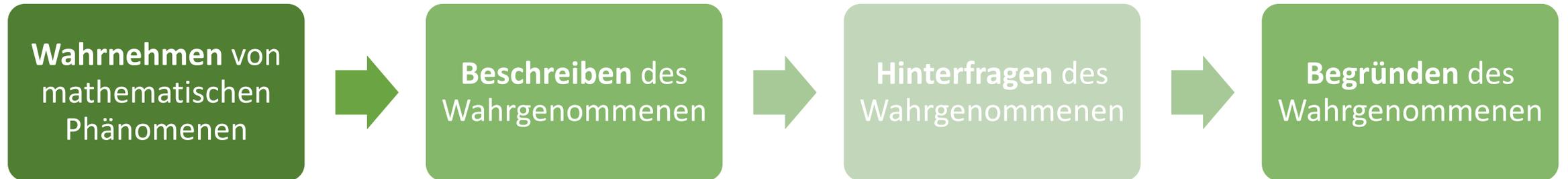
Argumentieren im Mathematikunterricht

Argumentationsanlässe

Argumentationsanlässe	mögliche Fragen bzw. Aufträge	Beispiele
elementare arithmetische Aussagen	»Wenn du eine gerade und eine ungerade Zahl zusammenzählst, erhältst du eine ungerade Zahl. Stimmt das? Begründe!«	$4 + 5 = 9$ $5 + 6 = 11$
Rechenwege / vorteilhaftes Rechnen	»Warum hast du das so gerechnet?« »Was fällt dir auf?« »Geht das auch noch anders?«	$6 + 5 = 11$ $6 + 6 - 1 = 11$ $5 + 5 + 1 = 11$
Rechengesetze	»Wer hat Recht?« »Gilt das immer?« »Warum ist das so?«	Marie: $3 + 5 = 8$ Paul: $5 + 3 = 8$ Kommutativgesetz

Argumentieren im Mathematikunterricht

Bausteine des Argumentierens



Argumentieren im Mathematikunterricht

Wahrnehmen von
mathematischen
Phänomenen



Beschreiben des
Wahrgenommenen

Aufgabe: Doppelreihe

Setzt die Folge fort!



Welche Muster und Strukturen entdeckt ihr? Warum ist das so?

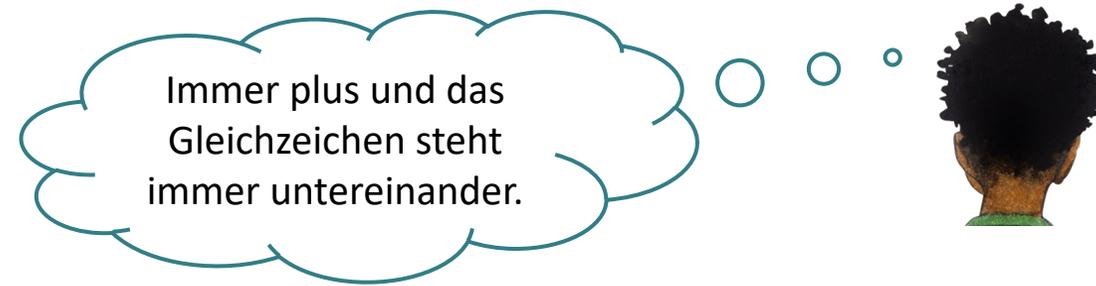
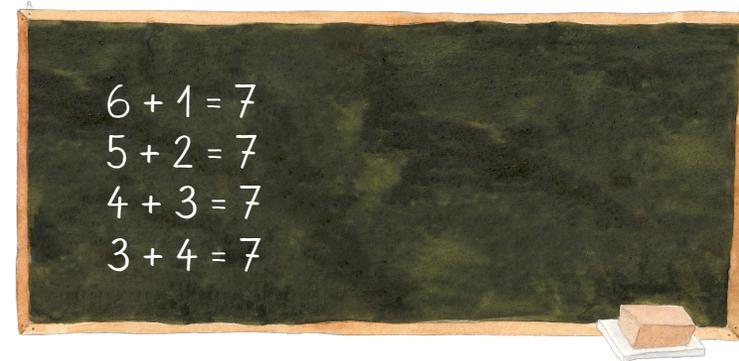
Bearbeiten Sie diese Aufgabe.
Beschreiben Sie Ihre
Entdeckungen, notieren Sie
diese stichpunktartig.

Argumentieren im Mathematikunterricht

Wahrnehmen von mathematischen Phänomenen



- Wahrnehmen mathematischer Sachverhalte (z. B. Wahrnehmen von Mustern, Aufgabenzusammenhängen, vorteilhaften Rechenwegen ...)
- Fokussierung auf relevante (und ggf. irrelevante) mathematische Zusammenhänge

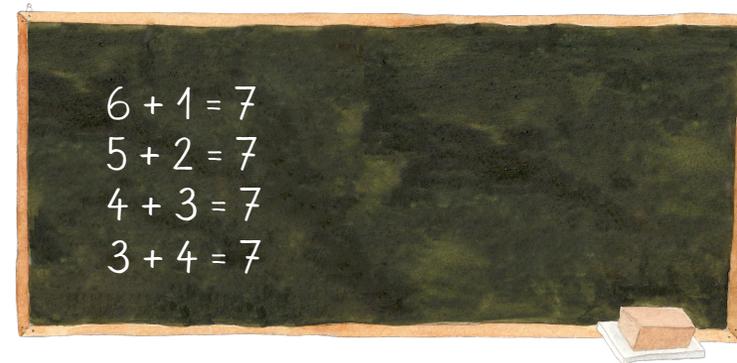


Argumentieren im Mathematikunterricht

Beschreiben des Wahrgenommenen



- Wahrgenommene mathematische Phänomene in eigenen Worten beschreiben
- Nicht allen Kindern fällt es leicht ihre Gedanken in Worte zu fassen
- Bestmögliche Unterstützung der Kinder durch Sprachspeicher



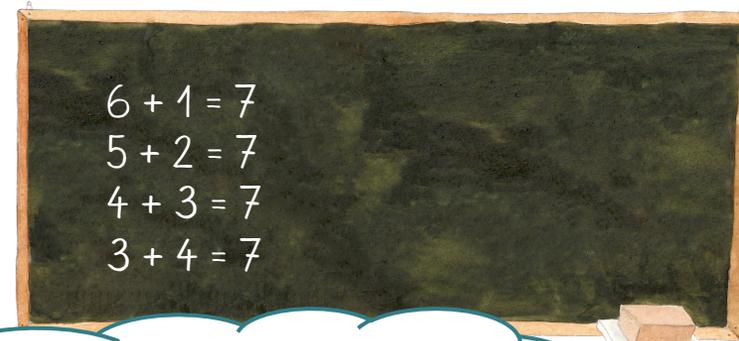
Immer plus. Die erste Zahl wird um eins kleiner, die zweite um eins größer. Das Ergebnis ist gleich.



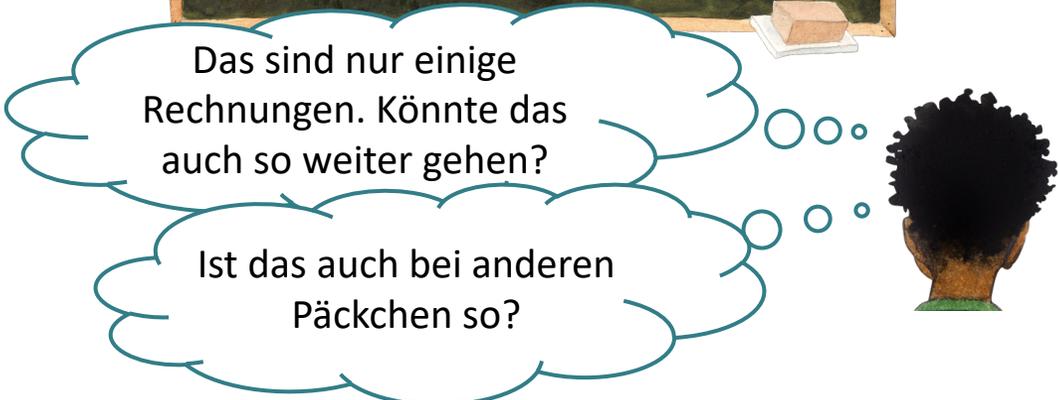
Argumentieren im Mathematikunterricht

Hinterfragen des Wahrgenommenen

- Ausgangspunkt: Das wahrgenommene Phänomen wird erstmal angenommen (von den anderen Kindern oder von sich selbst)
- Hinterfragen liefert Begründungsnotwendigkeit



Ist das immer so? Warum ist das so?

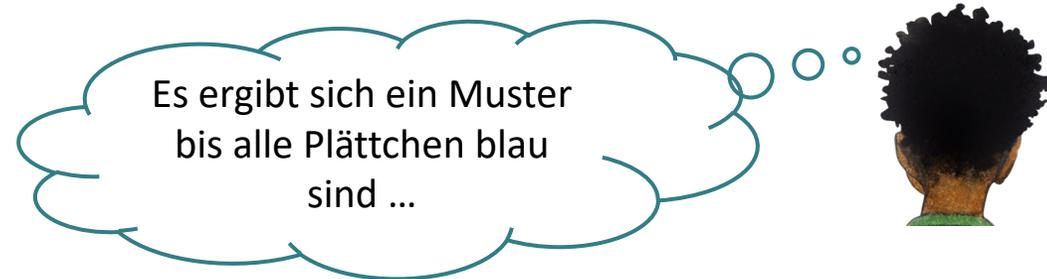
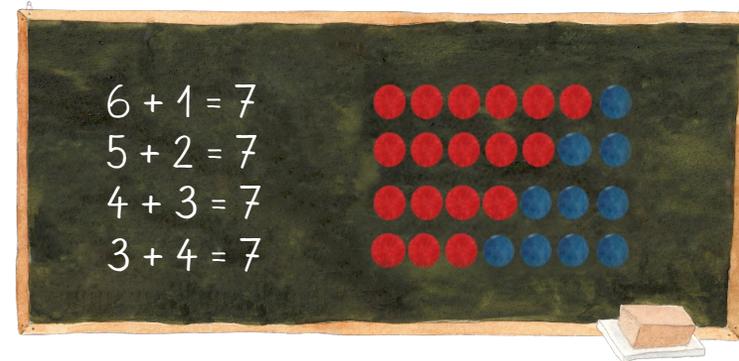


Argumentieren im Mathematikunterricht

Begründen des Wahrgenommenen



- Untersuchung des Wahrheitsgehalts der gewonnenen Vermutungen auf allgemeiner Ebene
- Dafür: Vermutungen an weiteren Beispielen positiv testen; dabei nichts Widersprüchliches entdecken



Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Begründungen fokussieren
3. Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Begründungen fokussieren

Was zeichnet eine gute Begründung aus?

Allen Begründungen im Mathematikunterricht ist gemeinsam:
Sie beantworten die Frage nach dem **Warum**.

Um diese beantworten zu können, müssen Lernende ...

- Zusammenhänge über Einzelbeispiele hinaus erklären.
- die Richtigkeit von Aussagen hinterfragen.
- einbeziehen, wie sie vorgegangen sind.

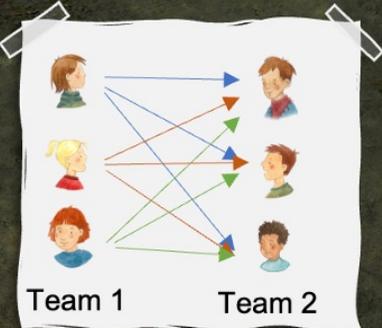
Worin unterscheiden sich
Begründungen im
Mathematikunterricht?



Begründungen fokussieren

Vollständigkeit begründen

Zwei Dreierteams geben sich zur Begrüßung die Hand. Wie viele Handschläge werden getauscht?



Team 1 Team 2

Es sind neun Handschläge, denn das erste Mädchen gibt erst allen drei Jungs die Hand, das kann man an den blauen Pfeilen sehen. Danach das Zweite und dann das Dritte. Die Jungs haben dann mit allen Mädchen die Hände geschüttelt.

Warum sind das alle Lösungen?



Begründungen fokussieren

Zusammenhänge begründen



Warum passt das?



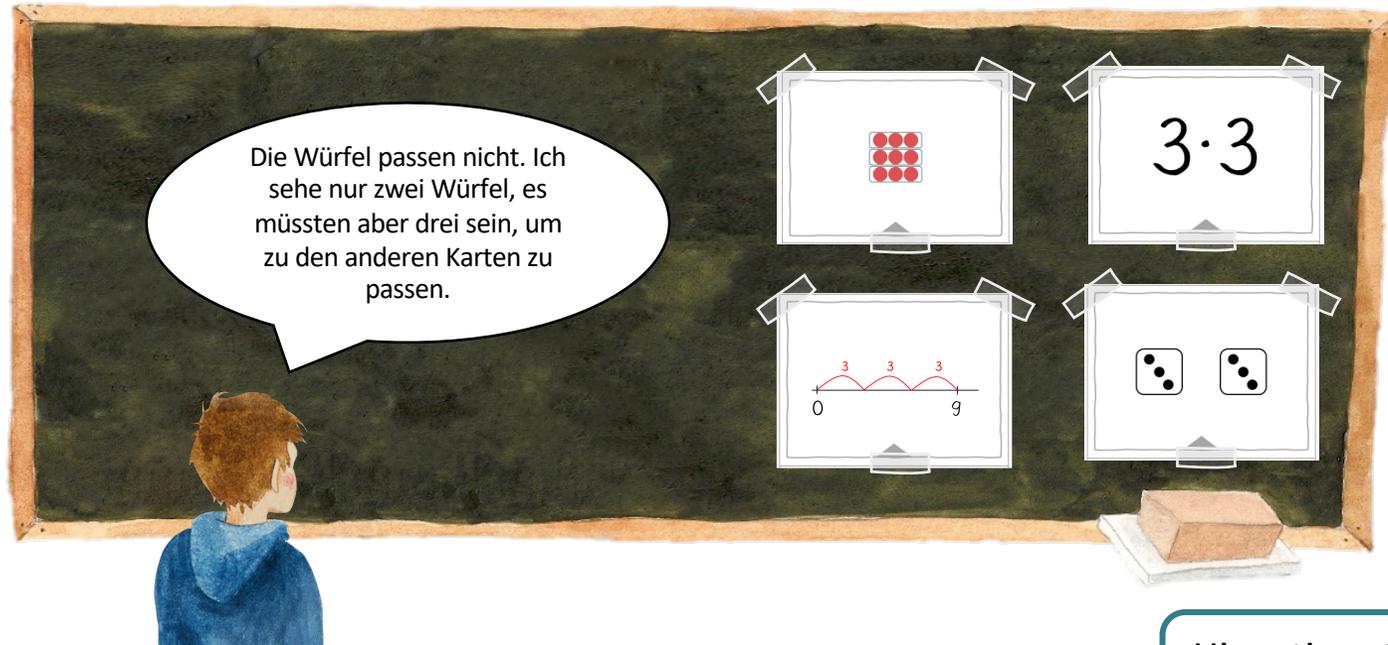
Begründungen fokussieren

Wirkungen von Operationen begründen



Begründungen fokussieren

Lösungen auf Stimmigkeit überprüfen, Fehllösungen begründen



Hier stimmt etwas nicht. Erkläre.



Begründungen fokussieren

Was zeichnet eine gute Begründung aus?

Allen Begründungen im Mathematikunterricht ist gemeinsam:
Sie beantworten die Frage nach dem **Warum**.

Um diese beantworten zu können, müssen Lernende ...

- Zusammenhänge über Einzelbeispiele hinaus erklären.
- die Richtigkeit von Aussagen hinterfragen.
- einbeziehen, wie sie vorgegangen sind.

Auch die Frage nach dem *Warum* ist abhängig vom jeweiligen Unterrichtsgegenstand und der Art der Begründung:

- ‚Warum ist das (immer) so?‘
- ‚Warum kannst du so rechnen?‘
- ‚Warum gehört etwas zusammen?‘
- ‚Stimmt das? Warum? Warum nicht?‘ ...

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Begründungen fokussieren
3. Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

„We accuse students of the high crime of ‚not even knowing what a proof is‘. Yet we, the math teachers, don't know it either [...]“. (Hersh 1997 , S. 49)

Wann ist ein Beweis ein Beweis?

- **keine** generell akzeptierten **Kriterien**
- **sozialer Prozess** der Akzeptanz innerhalb der mathematischen Community entscheidend
- **formaler Beweis** als ein **Idealbild** eines mathematischen Beweises (ausgehend von Axiomen und bereits bewiesenen Sachverhalten wird das zu Zeigende deduktiv mithilfe spezifizierter Schlussregeln nachgewiesen)
- **Vollständige formale Beweise** in der Unterrichtspraxis zu lang, unübersichtlich und damit unlesbar und unerreichbar



Die in der mathematischen Praxis gängigen Beweise sollen die Betrachter davon **überzeugen**, dass ein **vollständiger Beweis** für den gegebenen Sachverhalt **prinzipiell existiert**.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Beweistypen in der Vorlesung Arithmetik und ihre Didaktik

Darstellungsebene/ Formalisierungsgrad	symbolisch	ikonisch
beispielgebunden	beispielgebunden symbolisch	beispielgebunden ikonisch
generell	generell symbolisch	generell ikonisch

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Die Summe von zwei
aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen
ist immer ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden symbolisch

$$a = 3, b = 4$$

geeignetes Zahlenbeispiel

Voraussetzungen:

$$a = 3$$

Betrachtung der Voraussetzungen

$$b = a + 1 = 3 + 1 = 4$$

Beweis:

$$3 + 4 = 7$$

Behauptung mit Termumformungen herleiten

$$7 = 3 + (3 + 1) = (2 \cdot 3) + 1 \rightarrow 7 \text{ ist ungerade}$$

Schlussfolgerung:

deduktive Schlussfolgerung

Da sich die Summe 7 aus 3 und 4 als ein Vielfaches von 2 addiert mit 1 darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden ikonisch

Voraussetzungen:

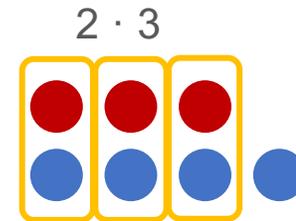
Die beiden aufeinanderfolgenden Zahlen werden als Plättchenreihen dargestellt, wobei die zweite Plättchenreihe um ein Plättchen länger ist, als die erste Reihe.

$$a = 3, b = 4$$



Beweis:

Legt man die beiden Plättchenreihe untereinander, lassen sich immer zwei übereinanderliegende Plättchen als Zweiergruppen zusammenfassen, dabei bleibt ein Plättchen übrig.



Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus $3 + 4$ als zwei Plättchenreihen der Länge 3 und einem zusätzlichen Plättchen darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

generell symbolisch

Voraussetzungen:

a

$$b = a + 1$$

$a, b \in \mathbb{N}$

Beweis:

$$a + b = a + (a + 1) = 2 \cdot a + 1$$

Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus $a + b$ als $2a + 1$ darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

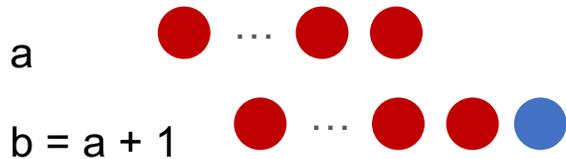
Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

generell ikonisch

Voraussetzungen:

Die beiden aufeinanderfolgenden Zahlen werden als Plättchenreihen dargestellt, wobei die zweite Plättchenreihe um ein Plättchen länger ist, als die erste Reihe.



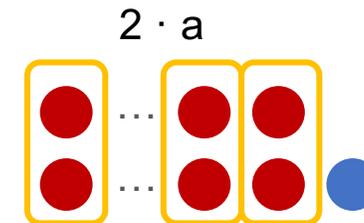
Beweis:

Legt man die beiden Plättchenreihe untereinander, lassen sich immer zwei übereinanderliegende Plättchen als Zweiergruppen zusammenfassen, dabei bleibt ein Plättchen übrig.

Schlussfolgerung:

Da sich die Summe aus $a + b$ immer als zwei Plättchenreihen der Länge a und einem zusätzlichen Plättchen darstellen lässt, ist die Summe ungerade.

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.



Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a , b und c ,
mit $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt:
$$a : b = (a : c) : (b : c)$$

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden symbolisch

$$a = 32, b = 8, c = 2$$

geeignetes Zahlenbeispiel

Voraussetzungen:

$$2 \mid 32 \rightarrow 2 \cdot 16 = 32$$

Betrachtung der Voraussetzungen

$$2 \mid 8 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8$$

Beweis:

$$((2 \cdot 16) : 2) : ((2 \cdot 4) : 2) =$$

Behauptung mit Termumformungen herleiten

Schlussfolgerung:

Die gleichsinnigen Veränderungen heben sich gegenseitig auf, deshalb bleiben nur der ursprüngliche Dividend und Divisor übrig. Der Quotient bleibt also der Gleiche.

deduktive Schlussfolgerung

Konstanzgesetz der Division
Für drei natürliche Zahlen a , b und c , mit $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt:
$$a : b = (a : c) : (b : c)$$

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden symbolisch

$$a = 32, b = 8, c = 2$$

geeignetes Zahlenbeispiel

Voraussetzungen:

$$2 \mid 32 \rightarrow 2 \cdot 16 = 32$$

Betrachtung der Voraussetzungen

$$2 \mid 8 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8$$

Beweis:

$$((2 \cdot 16) : 2) : ((2 \cdot 4) : 2) = \frac{\frac{2 \cdot 16}{2}}{\frac{2 \cdot 4}{2}} = \frac{2 \cdot 16}{2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 4} = \frac{32}{8} = 32 : 8$$

Behauptung mit Termumformungen herleiten

Schlussfolgerung:

Die gleichsinnigen Veränderungen heben sich gegenseitig auf, deshalb bleiben nur der ursprüngliche Dividend und Divisor übrig. Der Quotient bleibt also der Gleiche.

deduktive Schlussfolgerung

Konstanzgesetz der Division
Für drei natürliche Zahlen a, b und c, mit $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt:
 $a : b = (a : c) : (b : c)$

Beweisen Sie nun das Konstanzgesetz der Division generell symbolisch.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden ikonisch

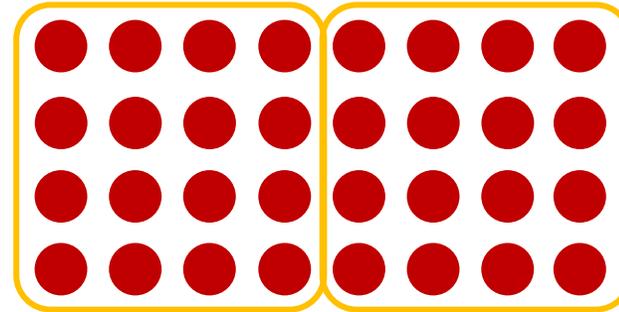
$$a = 32, b = 8, c = 2$$

Voraussetzungen:

$$2 \mid 32 \rightarrow 2 \cdot 16 = 32$$

$$2 \mid 8 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8$$

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in zwei gleich große Gruppen unterteilen lassen.



Konstanzgesetz der Division
Für drei natürliche Zahlen a , b
und c , mit $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt:
$$a : b = (a : c) : (b : c)$$

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden ikonisch

$$a = 32, b = 8, c = 2$$

Beweis

Die 32 Plättchen lassen sich in vier 8er Gruppen einteilen.

Betrachten wir nur die Hälfte der Plättchen, also 16 und halbieren gleichzeitig die Größe der Gruppen, so ist zu erkennen, dass sich 16 Plättchen ebenfalls in vier gleich große Gruppen einteilen lassen.

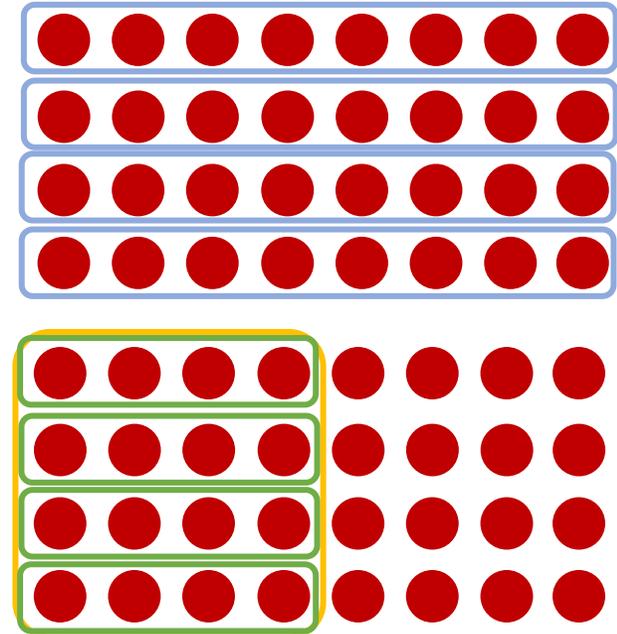
Schlussfolgerung:

Bei der gleichsinnigen Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Konstanzgesetz der Division

Für drei natürliche Zahlen a , b und c , mit $c \mid a$ und $c \mid b$ gilt:

$$a : b = (a : c) : (b : c)$$



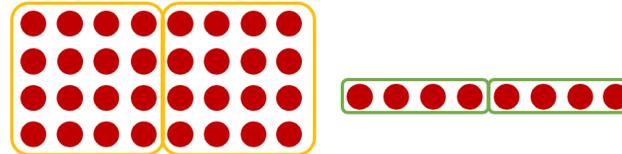
Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden ikonisch

$$a = 32, b = 8, c = 2$$

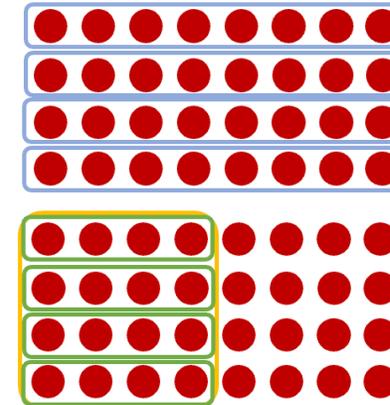
Voraussetzungen:

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in zwei gleich große Gruppen unterteilen lassen.



Beweis

Die 32 Plättchen lassen sich in vier 8er Gruppen einteilen. Betrachten wir nur die Hälfte der Plättchen, also 16 und halbieren gleichzeitig die Größe der Gruppen, so ist zu erkennen, dass sich 16 Plättchen ebenfalls in vier gleich große Gruppen einteilen lassen.



Schlussfolgerung:

Bei der gleichsinnigen Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Wie kann eine passende lineare Darstellung aussehen?
Inwiefern ändert sich dann die Sprache?

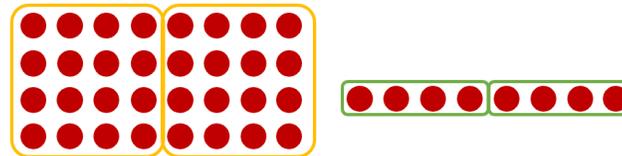
Beweistypen aus didaktischer Perspektive

beispielgebunden ikonisch

$$a = 32, b = 8, c = 2$$

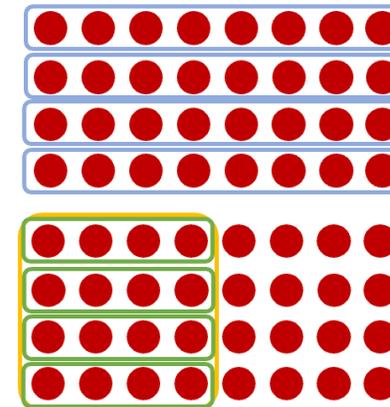
Voraussetzungen:

Beide Zahlen 32 und 8 lassen sich durch Plättchenbilder darstellen, die sich jeweils in zwei gleich große Gruppen unterteilen lassen.



Beweis

Die 32 Plättchen lassen sich in vier 8er Gruppen einteilen. Betrachten wir nur die Hälfte der Plättchen, also 16 und halbieren gleichzeitig die Größe der Gruppen, so ist zu erkennen, dass sich 16 Plättchen ebenfalls in vier gleich große Gruppen einteilen lassen.



Schlussfolgerung:

Bei der gleichsinnigen Veränderung der Gesamtanzahl sowie der Gruppengröße bleibt die Anzahl der Gruppen gleich.

Beweisen Sie nun das Konstanzgesetz der Division generell ikonisch.

Beweistypen aus didaktischer Perspektive

Beweis-Check

Beweisstruktur:

- Beweise **beginnen bei der Voraussetzung** und **enden bei der Behauptung**. Sie enthalten keine Zirkelschlüsse.
- Die Schritte der Beweisführung sind erkennbar (**Voraussetzung, Beweis, Schlussfolgerung**).

Argumentationsbasis:

- Beweise beruhen nicht nur auf einzelnen Beispielen, sondern auf **deduktiven Schlussfolgerungen**.
- Alle verwendeten **Variablen werden definiert**.

Beweiskette:

- Jeder Beweisschritt folgt aus dem Vorhergehenden und wird durch eine **Begründung** gestützt. Ein erläuternder Text sorgt bei Bedarf für die Nachvollziehbarkeit der Beweisschritte.
- Herleitung der Aussage mithilfe von **Termumformungen** und/oder **logischen Schlussfolgerungen**, verwendete Rechengesetze werden dabei notiert.

Fragen? Vielen Dank!



Literatur

- Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote - ein Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Verlag Dr. Kovac.
- Bezold, A. (2010). Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern. Verfügbar unter: https://primakom.dzlm.de/primafiles/uploads/Dokumente/Arg_Handreichung_Mathe_Bezold.pdf
- Biehler, R., Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *J Math Didakt* 37, 141–179. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1>
- PIKAS-Team (im Erscheinen). *Mathematik sprachbildend unterrichten*. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.).

Internetlinks

- Arithmetik digital (2024). Konstanz des Quotienten. Verfügbar unter: <https://adi.dzlm.de/node/118>