

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel II – Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

1 Euklidischer Abstand ist besonders

Die Euklidische Norm ist von allen die schönste.

Warum? Weil sie von einem Skalarprodukt herkommt.

Definition (Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$)

Für $\vec{u}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{j=1}^n u_j v_j \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}$ hat ja n Komponenten, nämlich

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

und ebenso der Vektor $\vec{v}$. Damit ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

gegeben. Gilt für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

so heißen sie *senkrecht* oder *orthogonal* zueinander.

Das Skalarprodukt erfüllt die folgenden wichtigen Eigenschaften:

(1) **Symmetrie:** Für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j = \sum_{j=1}^n v_j u_j = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

(2) **Linearität:**

(2a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda u_j v_j = \lambda \sum_{j=1}^n u_j v_j = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

und genau so

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

(2b) Für beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{j=1}^n (u_j + v_j) w_j = \sum_{j=1}^n u_j w_j + \sum_{j=1}^n v_j w_j = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

und ähnlich

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

Daraus folgt, für beliebige $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \gamma \vec{w} + \delta \vec{z} \rangle = \alpha \gamma \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \alpha \delta \langle \vec{u}, \vec{z} \rangle + \beta \gamma \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \beta \delta \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle$$

1.1 Beziehung zur Euklidischen Norm

Damit gilt offensichtlich:

$$\|\vec{u}\| = \left(\sum_{j=1}^n u_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n u_j \cdot u_j \right)^{\frac{1}{2}} = (\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Also kann ich die Euklidische Norm durch das Skalarprodukt ausdrücken.

Damit gilt auch:

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \text{ und}$$

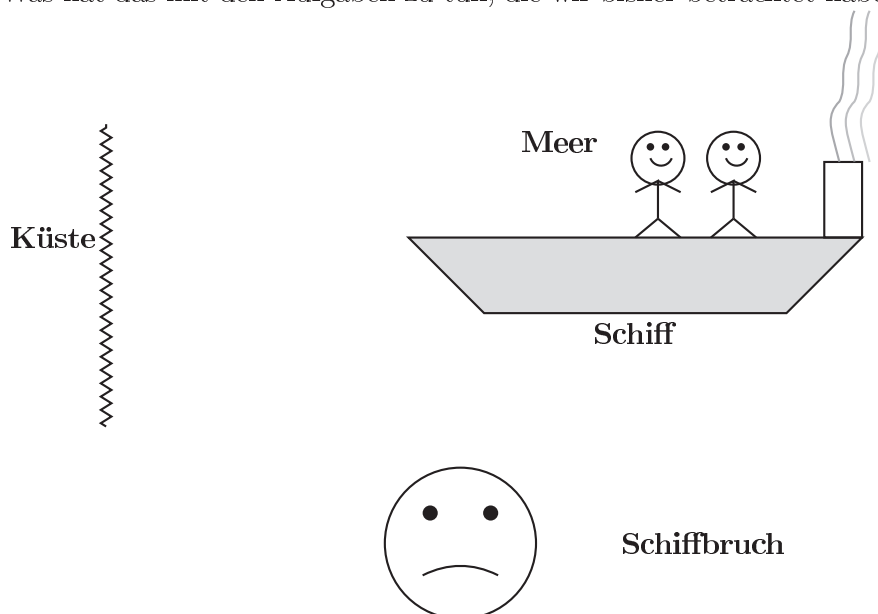
$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

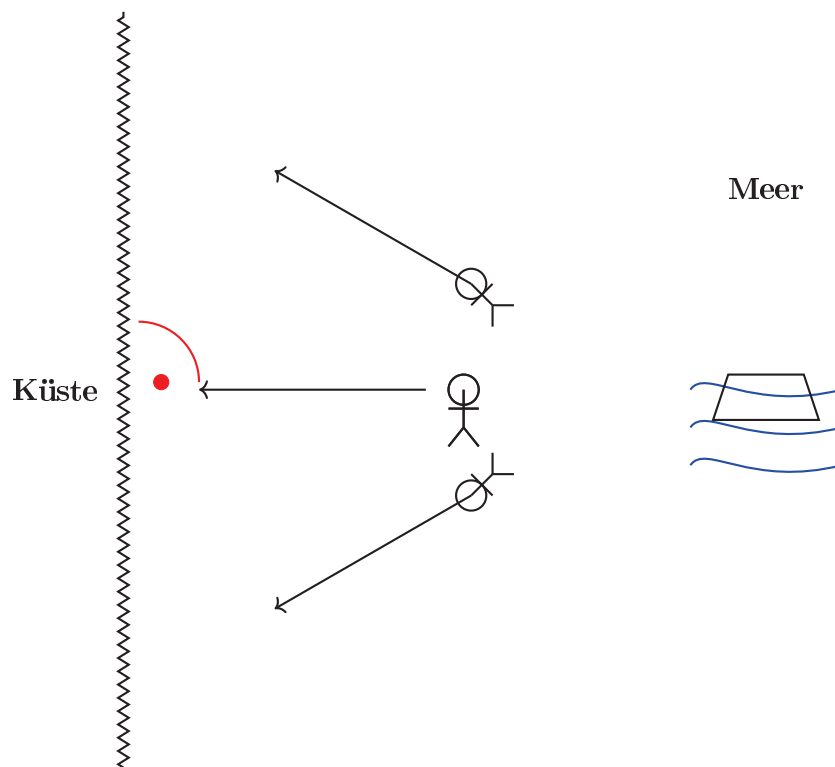
und ebenso

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

was eine Verallgemeinerung der binomischen Formel ist.

Was hat das mit den Aufgaben zu tun, die wir bisher betrachtet haben?





Welcher von den Schwimmern macht es richtig?

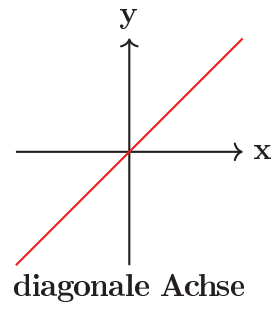
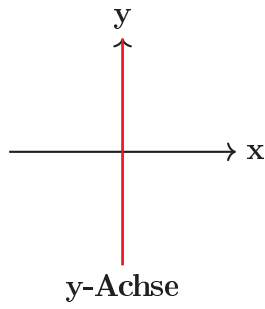
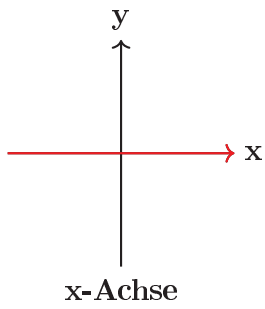
Der, der im rechten Winkel zur Küste schwimmt.

Definition (Untervektorraum)

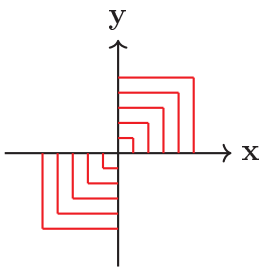
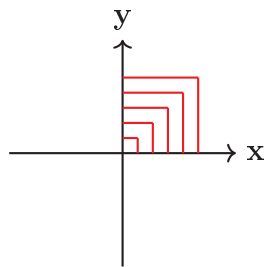
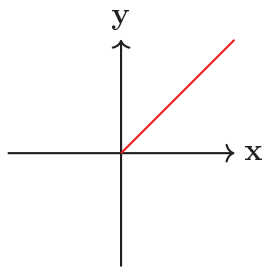
Eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Untervektorraum (von $\mathbb{R}^n$), falls

- i) $\vec{u}$ und $\vec{v} \in V$ impliziert $\vec{u} + \vec{v} \in V$ „Abgeschlossenheit unter Vektoraddition“
- ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in V$ impliziert $\lambda\vec{v} \in V$ „Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation“

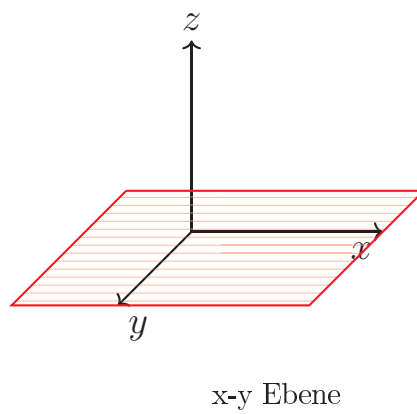
Beispiele von UVR im $\mathbb{R}^2$:



Beispiele von nicht-UVR in $\mathbb{R}^2$:



Beispiel von UVR in $\mathbb{R}^3$

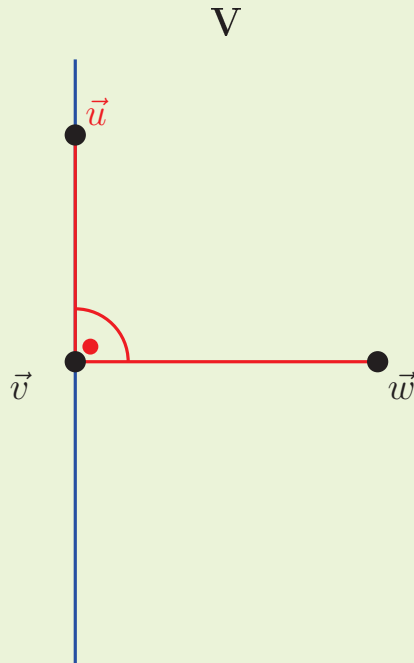


Satz (Kriterium von Kolmogorov)

Sei V ein UVR von $\mathbb{R}^n$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{v} \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Für alle $\vec{u} \in V$ ist

$$\langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = 0$$



ii) $\|\vec{w} - \vec{v}\| = \min_{\vec{u} \in V} \|\vec{w} - \vec{u}\|$

iii) Für alle $\vec{u} \in V$ gilt

$$\|\vec{w} - \vec{v}\| \leq \|\vec{w} - \vec{u}\|.$$

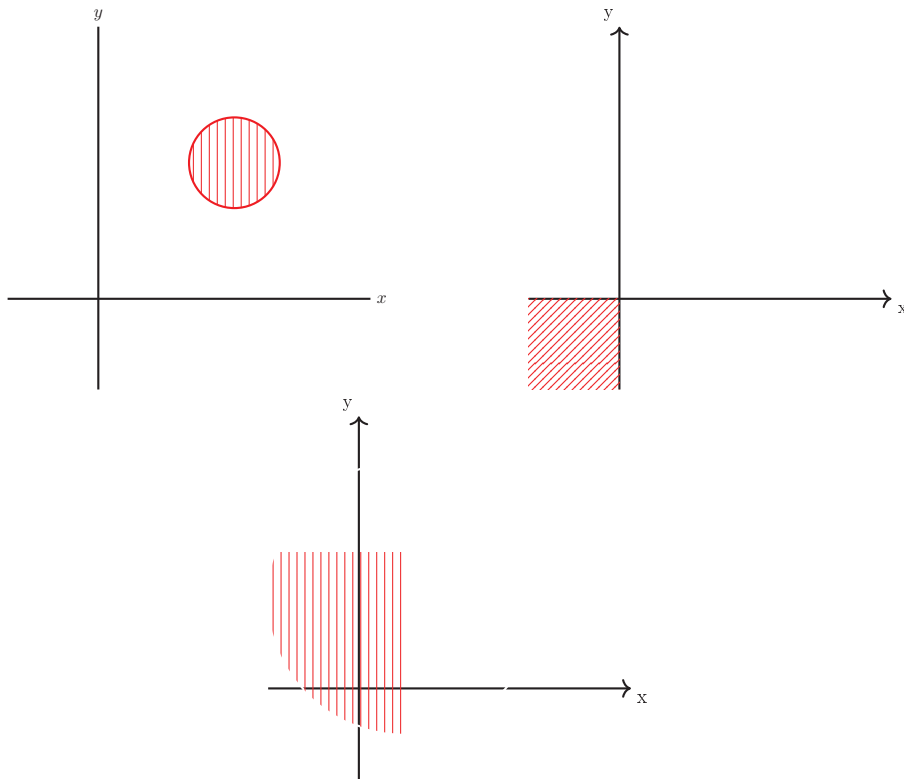
Es gibt noch allgemeinere Variante

Definition (Konvexe Menge)

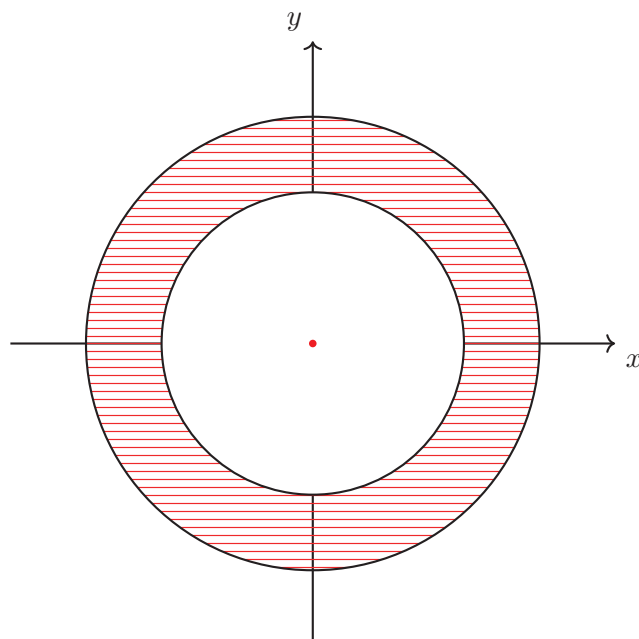
Sei K Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. K heißt konvex, falls für alle $\lambda \in [0, 1]$ und alle $\vec{u}, \vec{v} \in K$ gilt:

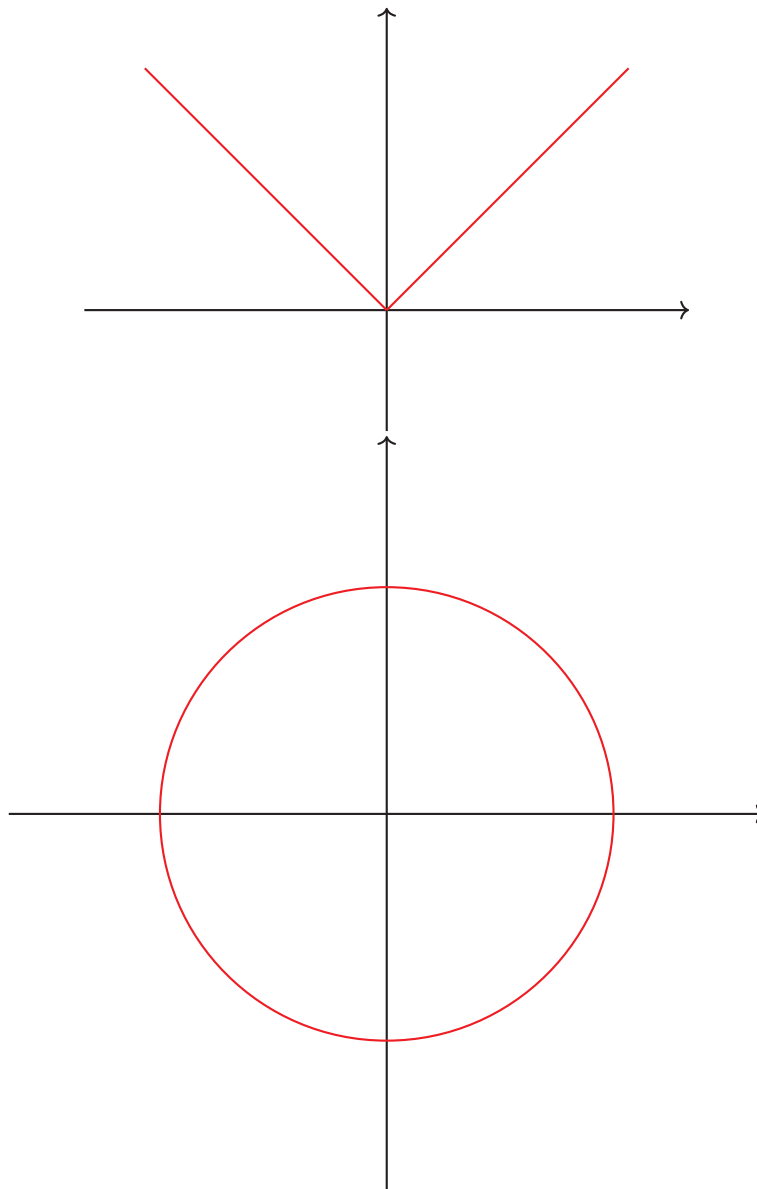
$$\lambda \vec{u} + (1 - \lambda) \vec{v} \in K$$

Beispiele für konvexe Mengen in $\mathbb{R}^2$:



Beispiele für nicht-konvexe Mengen





Pseudodefinition (Abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls der gesamte Rand, d.h. die Oberfläche von A zu A dazu gehört. Anders ausgedrückt

$\vec{v}$ ist Randpunkt von $A \Rightarrow \vec{v}$ ist Element von A .

Z.B. sind $[a, b]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, (a, ∞) dagegen nicht.

Sie haben bereits gesehen, dass diese Eigenschaft relevant ist

Frage: Besitzt

$$f: D = [-12, 18) \mapsto \mathbb{R},$$

$$f(x) = 2x,$$

ein Minimum und/oder Maximum?

$x = -12$ ist Minimum von f mit Wert $f(-12) = -24$.

f besitzt dagegen kein Maximum.

Beweis mit Widerspruch: Angenommen f nimm Maximum in $x \in D$ an.

$\Rightarrow x < 18$, da 18 nicht in D , sondern „rechts davon“, insbes $x \neq 18$.

$\Rightarrow \varepsilon := 18 - x > 0$.

Sei $y = x + \frac{\varepsilon}{2}$. Dann

$$x < y < x + \varepsilon = 18$$

also $y \in D$.

$$f(y) = 2(y) = 2\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2x + \varepsilon = f(x) + \varepsilon > f(x)$$

$\Rightarrow$ Widerspruch.

f nimmt kein Maximum an, weil das Intervall $[-12, 18)$ nicht abgeschlossen ist.

Untere/obere Schranke

Es seien $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.

- Eine „untere Schranke“ von A ist eine Zahl $s \in \mathbb{R}$, sodass für alle $a \in A$ gilt $a \geq s$.
- Eine „untere Schranke“ (für den Bildbereich) von f ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in D$ gilt $f(x) \geq c$.

Die beide Definitionen passen folgendermassen zusammen: c ist genau dann eine untere Schranke von f , wenn es eine untere Schranke der Menge

$$A = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\} \text{ ist.}$$

- Eine „obere Schranke“ von A ist eine Zahl $s \in \mathbb{R}$, sodass für alle $a \in A$ gilt $a \leq s$.
- Eine „obere Schranke“ (für den Bildbereich) von f ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in D$ gilt $f(x) \leq c$.

Die beide Definitionen passen folgendermassen zusammen: c ist genau dann eine obere Schranke von f , wenn es eine obere Schranke der Menge

Bemerkung: Untere bzw. obere Schranken sind nicht eindeutig: Ist c eine untere Schranke für f , dann ist auch jedes $y < c$ eine untere Schranke.

- S ist eine *kleinste obere Schranke* von A , falls $a \leq S$ für alle $a \in A$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a = a_\varepsilon > 0 \in A$ sodass $a_\varepsilon > S - \varepsilon$.

Es gibt also keine obere Schranke kleiner als S .

Kann man (in manchen Fälle) die obere/untere Schranke optimieren?