technische universität
dortmund

Vorkurs – VL 11

Muster und Strukturen

Vorkurs

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Laufende Fragensammlung

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Muster und Strukturen sehen und beschreiben
2. Figurierte Zahlen
3. Arithmetische Folgen

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

Beschreiben Sie das Muster im folgenden Schönen Päckchen und begründen Sie Ihre Entdeckungen mit den zugrundeliegenden mathematischen Strukturen.

$6 \cdot 2 = 12$

$6 \cdot 3 = 18$

$6 \cdot 4 = 24$

$6 \cdot 5 = 30$

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

Welche Sprachmittel sind notwendig, um die Päckchen zu beschreiben?

Schöne Päckchen. Zeige mit dem Malwinkel und rechne. Beschreibe und erkläre.

a)	b)	c)	d)	f)
$2 \cdot 4$	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 5$	$3 \cdot 5$	$2 \cdot 3$
$3 \cdot 4$	$3 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$3 \cdot 6$	$3 \cdot 4$
$4 \cdot 4$	$5 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 7$	$4 \cdot 5$
$5 \cdot 4$	$7 \cdot 3$	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 8$	$5 \cdot 6$

Aus 2 Vierern werden 3 **Vierer**, 4 **Vierer** und 5 **Vierer**.
Es kommt immer ein **Vierer** dazu.
Es kommen immer 4 dazu.
Aus einem **Dreier** werden 3 **Dreier**.
Es kommen 2 **Dreier**, also 6 dazu….

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

Welche Sprachmittel sind notwendig, um die Päckchen zu beschreiben?

Schöne Päckchen. Zeige mit dem Malwinkel und rechne. Beschreibe und erkläre.

a)	b)	c)	d)	f)
$2 \cdot 4$	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 5$	$3 \cdot 5$	$2 \cdot 3$
$3 \cdot 4$	$3 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$3 \cdot 6$	$3 \cdot 4$
$4 \cdot 4$	$5 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 7$	$4 \cdot 5$
$5 \cdot 4$	$7 \cdot 3$	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 8$	$5 \cdot 6$

Aus 2 **Fünfern** werden 2 **Vierer**.
Von jedem **Fünfer** muss ich einen wegnehmen.
Ich nehme dann also 2 **Einer** weg.

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

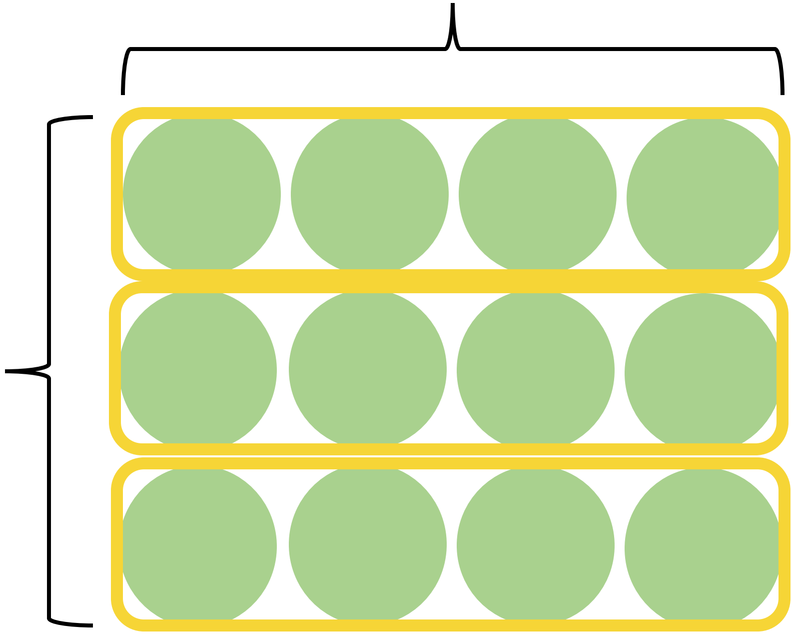
Welche Sprachmittel sind notwendig, um die Päckchen zu beschreiben?

Multiplikand:

Wie viele in einer Gruppe/ Zeile?

Multiplikator:

Wie viele Gruppen/ Zeilen?



3 · 4

3 mal 4

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

Schöne Päckchen

Die Lernenden…

- beschreiben das Muster eines Schönen Päckchens
  (z. B. „Die erste Zahl bleibt immer gleich, die zweite Zahl wird um eins größer, das Ergebnis wird auch immer um eins größer“)
- erkunden zugrunde liegende Strukturen
  (z. B. „wenn eine Anzahl immer um 1 vergrößert und zugleich die dazukommende Anzahl immer um dieselbe Menge verringert wird, dann verändert sich die Gesamtanzahl nicht“)
- stellen anschließend oder parallel das Päckchen mit Plättchen dar
  (z. B. „Lege die Aufgabe mit Plättchen. Was musst du verändern, um nun die zweite Aufgabe darzustellen?“)

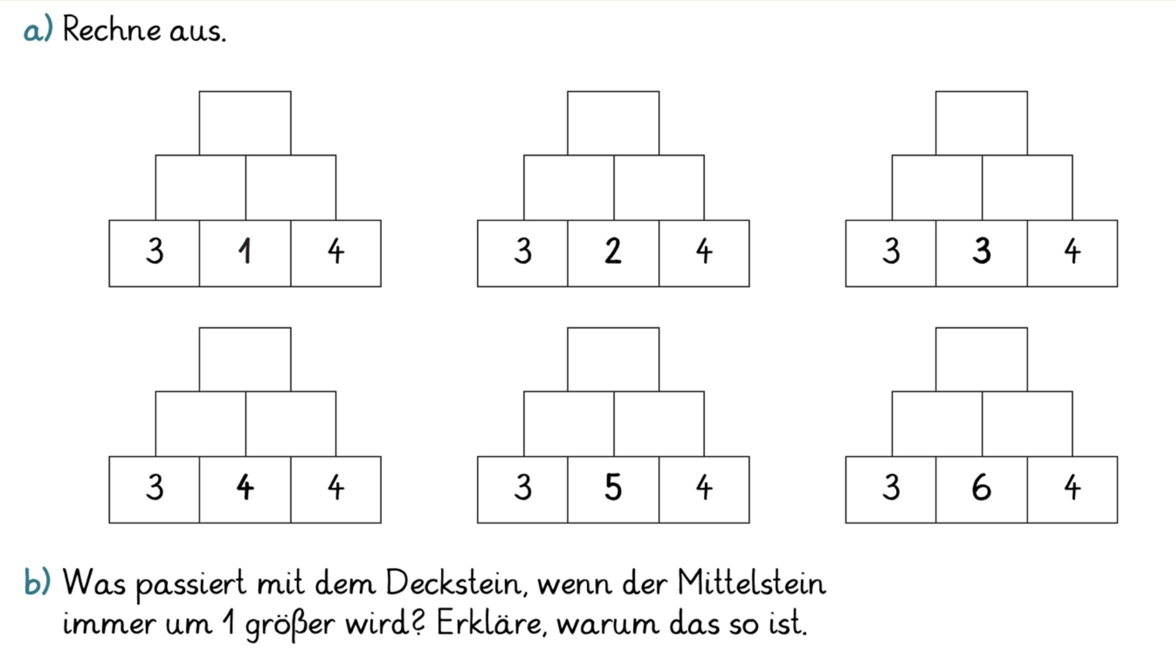
  → Darstellungsvernetzung erhöht das Verständnis der Struktur

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

KMK-Bildungsstandards	NRW-LP	
Muster und Strukturen	**Inhaltsbereiche**	**Kompetenzerwartungen**
Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	Zahlen und Operationen	strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hundertertafel) verstehen und nutzen
	Zahlen und Operationen Raum und Form	die Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
	Zahlen und Operationen Raum und Form	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	Größen und Messen Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit	funktionale Beziehungen in Sachaufgaben erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge – Preis) und entsprechende Aufgaben lösen
	Größen und Messen Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen
	Größen und Messen	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

a) Lösen Sie folgende Schulbuchaufgaben. Beziehen Sie sich in Ihrer Erklärung in Aufgabenteil b) auf eine anschauliche Darstellung mit Plättchen.



b) Sammeln Sie die verwendeten Sprachmittel aus Aufgabenteil b) in Mentimeter.

Mentimeter

Code: **6345 3913**

Muster und Strukturen sehen und beschreiben

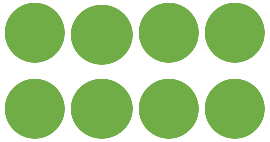
Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Muster und Strukturen sehen und beschreiben
2. Figurierte Zahlen
3. Arithmetische Folgen

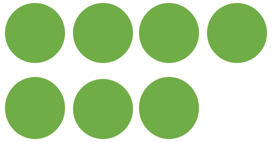
Figurierte Zahlen

Ein Überblick

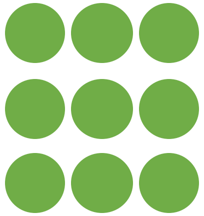
Gerade Zahlen



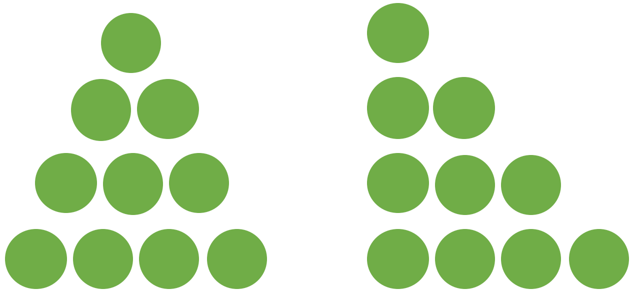
ungerade Zahlen



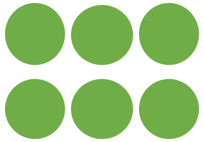
Quadratzahlen



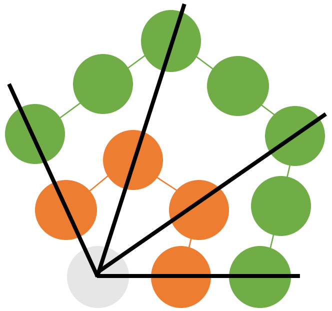
Dreieckszahlen



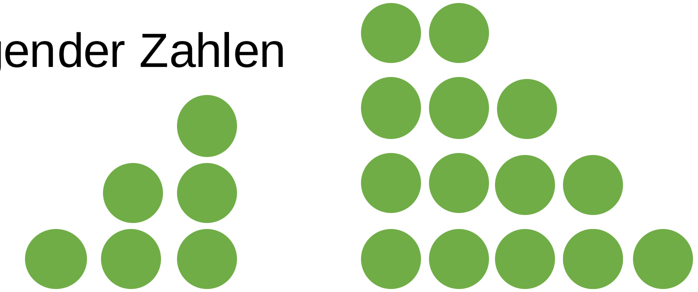
Rechteckszahlen



Polygonalzahlen



Summen aufeinanderfolgender Zahlen



Figurierte Zahlen

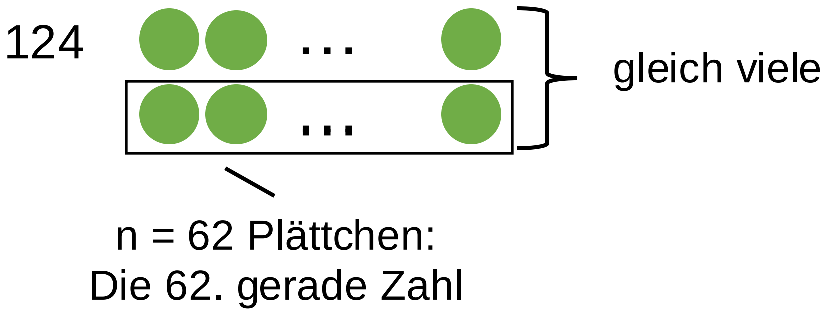
Definition *Gerade Zahlen*:

Eine natürliche Zahl k heißt gerade, wenn **$k = 2 \cdot n$** für eine natürliche Zahl n gilt. In diesem Fall ist k die n-te gerade Zahl.

z.B.: $124 = \mathbf{2} \cdot 62$

die 62. gerade Zahl

Lässt sich eine Anzahl k von Plättchen als **Doppelreihe** mit jeweils n Plättchen legen, so ist k die n-te gerade Zahl.



Figurierte Zahlen

Ungerade Zahlen

Formale Darstellung

Algebraisch: Terme, mathematische Zeichen…

→ „nicht-Vielfache“ von 2

1 zu einem Vielfachen von 2 addiert
9 aus 8; $9 = 2 \cdot 4 + 1$

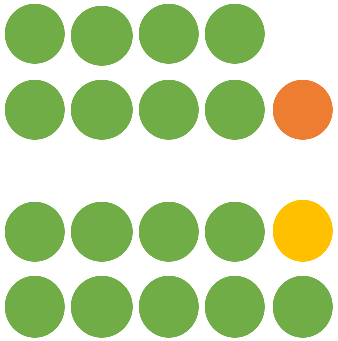
1 von einem Vielfachen von 2 subtrahiert
9 aus 10; $9 = 2 \cdot 5 - 1$

geometrische Darstellung

Bild/Figur/Form…

→ können nicht als Doppelreihe gelegt werden

Ungerade Zahlen entstehen, indem man…



Figurierte Zahlen

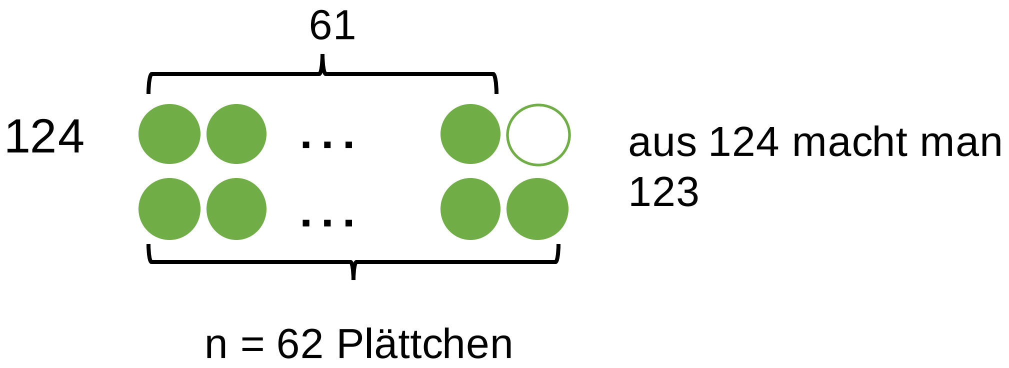
Definition *Ungerade Zahlen*:

Eine natürliche Zahl *k* heißt ungerade, wenn
k = 2 · n - 1 für eine natürliche Zahl *n* gilt.
In diesem Fall ist *k* die *n*-te ungerade Zahl.

z.B.: 123 = **2** · 62 - 1

die 62.
ungerade Zahl

Lässt sich eine Anzahl *k* von Plättchen legen, indem man von einer **Doppelreihe mit jeweils *n* Plättchen eines wegnimmt**, so ist *k* die *n*-te ungerade Zahl.



Weitere Definition:

Eine natürliche Zahl *k* heißt ungerade, wenn
k = 2 · n + 1 für eine natürliche Zahl *n* gilt.

Figurierte Zahlen

Quadratzahlen

die 3. Quadratzahl

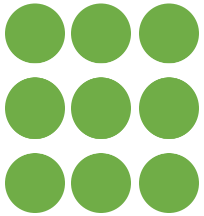
↓

$9 = 3^2$

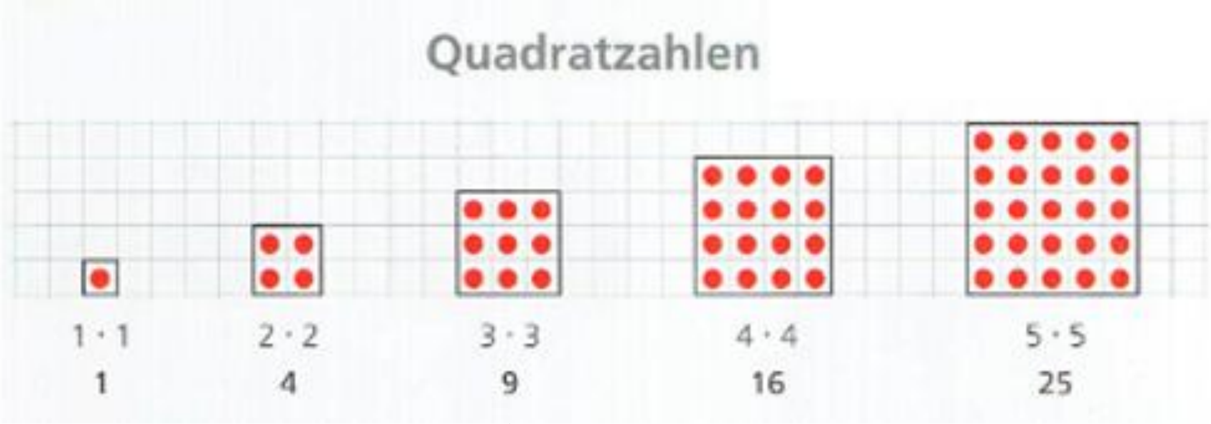
↓

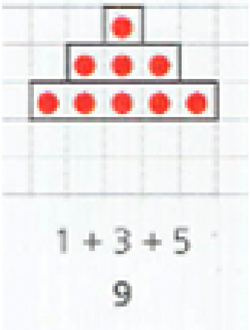
$Q_3=9$

9 ist die **dritte** Quadratzahl



Anzahl 9 lässt sich als Quadrat mit der Seitenlänge 3 legen





„unsichtbare“ Beziehungen

9 = 1 + 3 + 5
9 ist die Summe der ersten **drei** ungeraden Zahlen

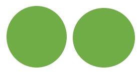
Figurierte Zahlen

Rechteckszahlen

Das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen.

die 1. Rechteckszahl

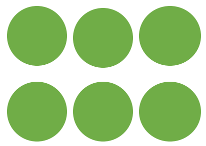
$R_1 = 1 \cdot 2 = 2$



Anzahl 2 lässt sich als Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 2 legen.

die 2. Rechteckszahl

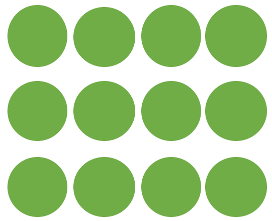
$R_2 = 2 \cdot 3 = 6$



Anzahl 6 lässt sich als Rechteck mit den Seitenlängen 2 und 3 legen.

die 3. Rechteckszahl

$R_3 = 3 \cdot 4 = 12$



Anzahl 12 lässt sich als Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 legen.

(…)

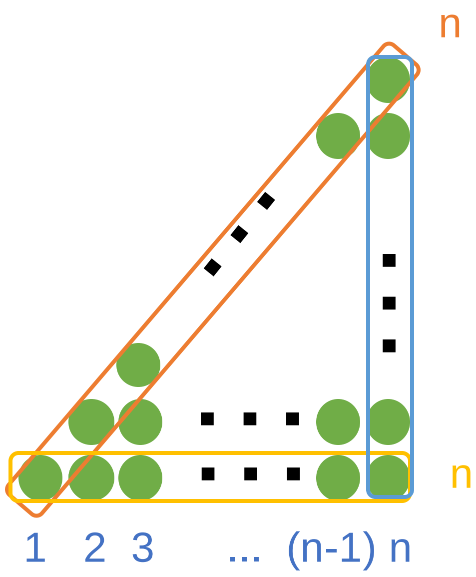
Figurierte Zahlen

Dreieckszahlen

Summe der ersten n natürlichen Zahlen (mit $n \in \mathbb{N}$)

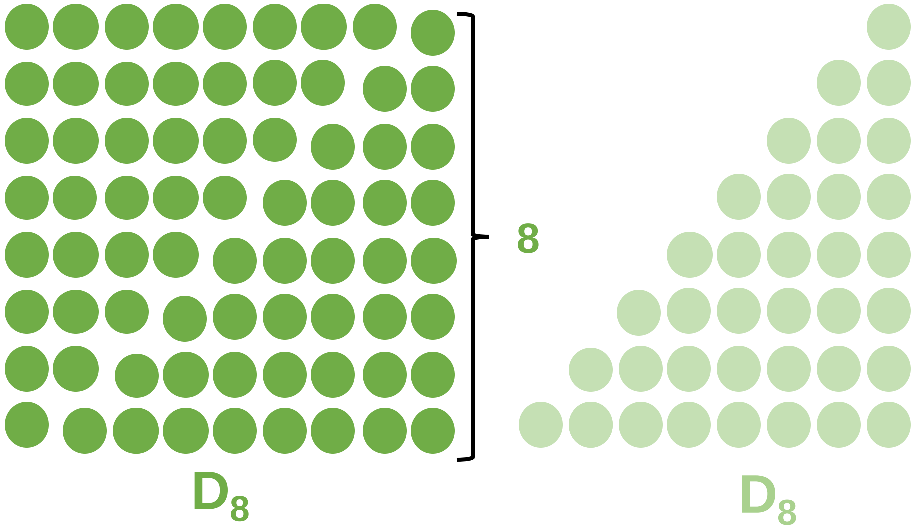
$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = D_n$

n-te Dreieckszahl, kurz D_n



Aus wie vielen Plättchen besteht die Dreieckszahl D_8 ?

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 als Beispiel



$2 \cdot D_8 \quad = \quad 8 \cdot 9 \quad = R_8$

2 Versionen der gleichen Dreieckszahl

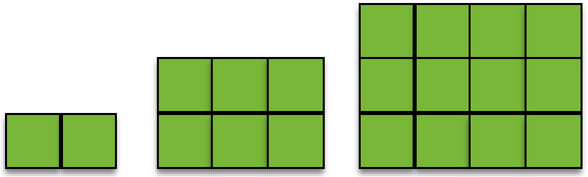
Zusammen-schieben

Ein Rechteck mit den Kantenlängen 8 und 9

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Muster und Strukturen sehen und beschreiben
2. Figurierte Zahlen
3. Arithmetische Folgen

Arithmetische Folgen



Rechteck 1 Rechteck 2 Rechteck 3

Arithmetische Folgen

Figurierte Zahlen in der Grundschule – Muster beschreiben

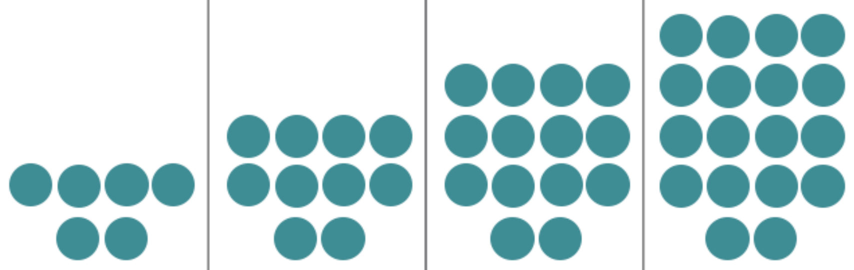
Kinder haben die Folge wie folgt beschrieben.
Wie treffend finden Sie die Beschreibungen?
Bewerten Sie und gehen Sie dabei auf die unterschiedlichen Ansätze ein.

Till und Ali:
Wir denken uns eine Stelle. Diese Stelle wird mit vier multipliziert und eine 2 addiert.

Lena und Lia:
Wir rechnen immer plus 4.

Tim und Janne:
Du startest mit einer 2 zu der du 4 addierst. Dann addierst du immer wieder 4.

Bewertet Beschreibungen!

Stelle	1	2	3	4
				
Zahlenfolge	6	10	14	18

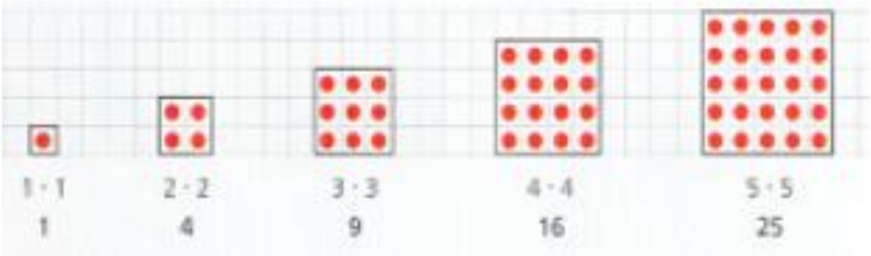
Arithmetische Folgen

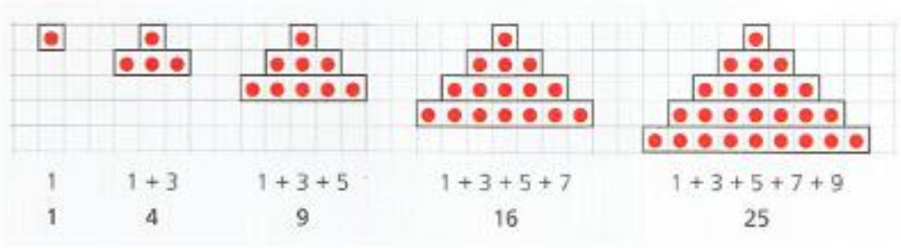
Explizite versus rekursive Betrachtung von Folgen

„Explizite“ Definition…	**„Rekursive“ Definition…**

…einer „arithmetischen“ Folge:

Abstrahiere das Muster und finde eine Formel für irgendeine Stelle.	Ich muss die vorherige Stelle kennen, um die nächste zu berechnen.





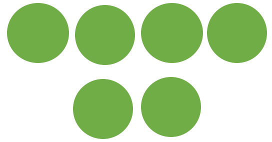
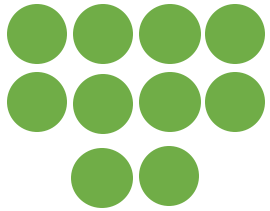
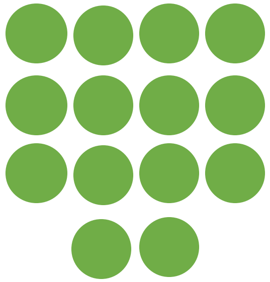
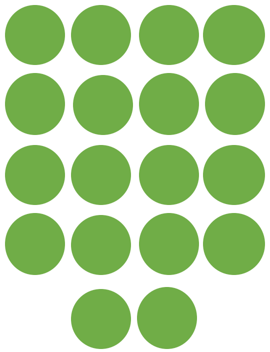
Wie viele Plättchen hat die 20. Zahl in dieser Folge?

Die 20. Zahl hat 20 · 20 Plättchen, ich muss immer die Zahl mal sich selbst nehmen.	Ich muss bei der 1. Stelle anfangen und dann hochrechnen.

Arithmetische Folgen

Betrachtung von Folgen

Lena und Lia:
Wir rechnen immer plus 4.

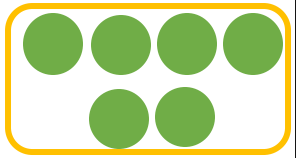
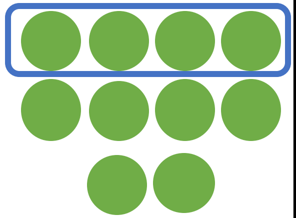
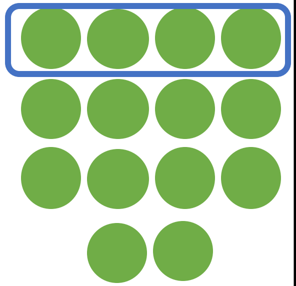
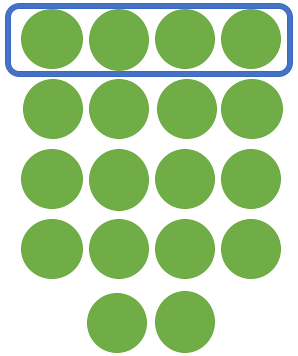
Stelle	1	2	3	4
				
Zahlenfolge	6	10	14	18

+4 +4 +4

Arithmetische Folgen

Rekursive Betrachtung von Folgen

Tim und Janne:
Du startest mit einer 2 zu der du 4 addierst.
Dann addierst du immer wieder 4.

Stelle	1	2	3	4
				
Zahlenfolge	6	10	14	18

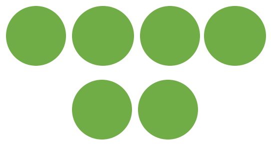
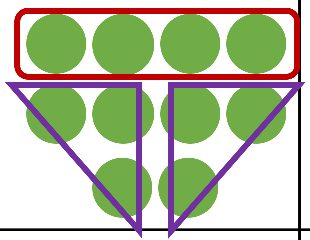
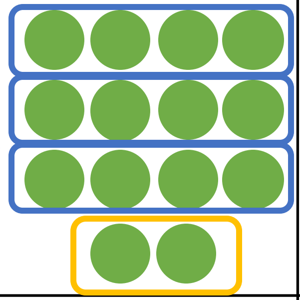
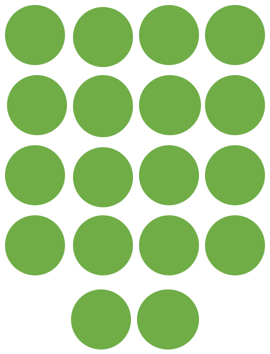
$$Z_1 = 6$$

$$Z_n = Z_{n-1} + 4 \qquad \text{für } n > 1$$

Arithmetische Folgen

Explizite Betrachtung von Folgen

Till und Ali:
Wir denken uns eine Stelle.
Diese Stelle wird mit vier multipliziert und eine 2 addiert.

Stelle	1	2	3	4
				
Zahlenfolge	6	10	14	18

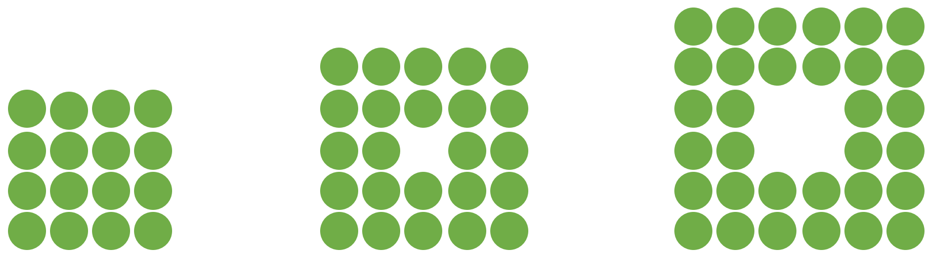
$$Z_n = n \cdot 4 + 2$$

$$Z_n = 2 \cdot D_2 + (n - 1) \cdot 4$$

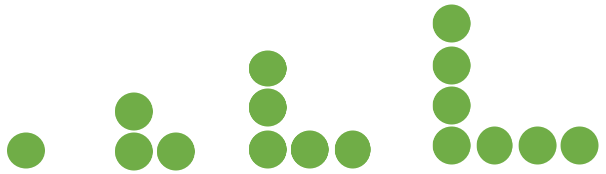
Arithmetische Folgen

Finden Sie eine Struktur in den Folgen und markieren Sie diese.
Versuchen Sie diese durch (explizite/rekursive) Terme zu beschreiben.

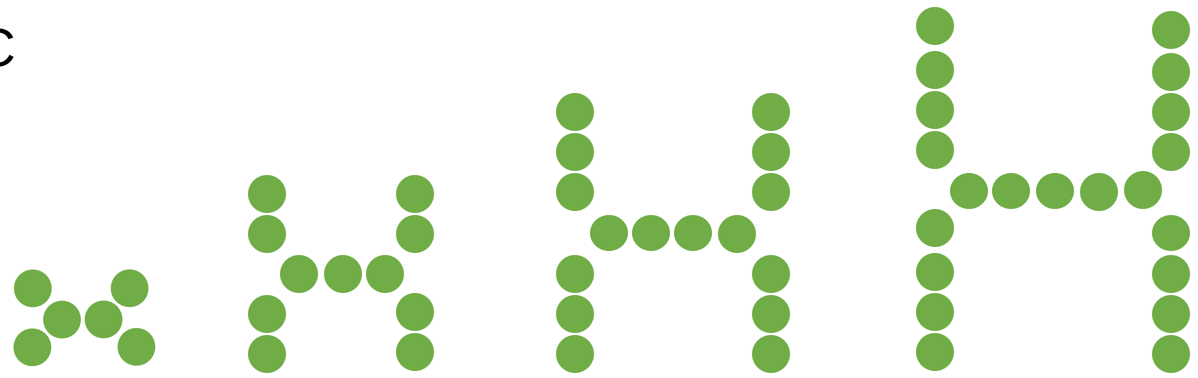
A



B

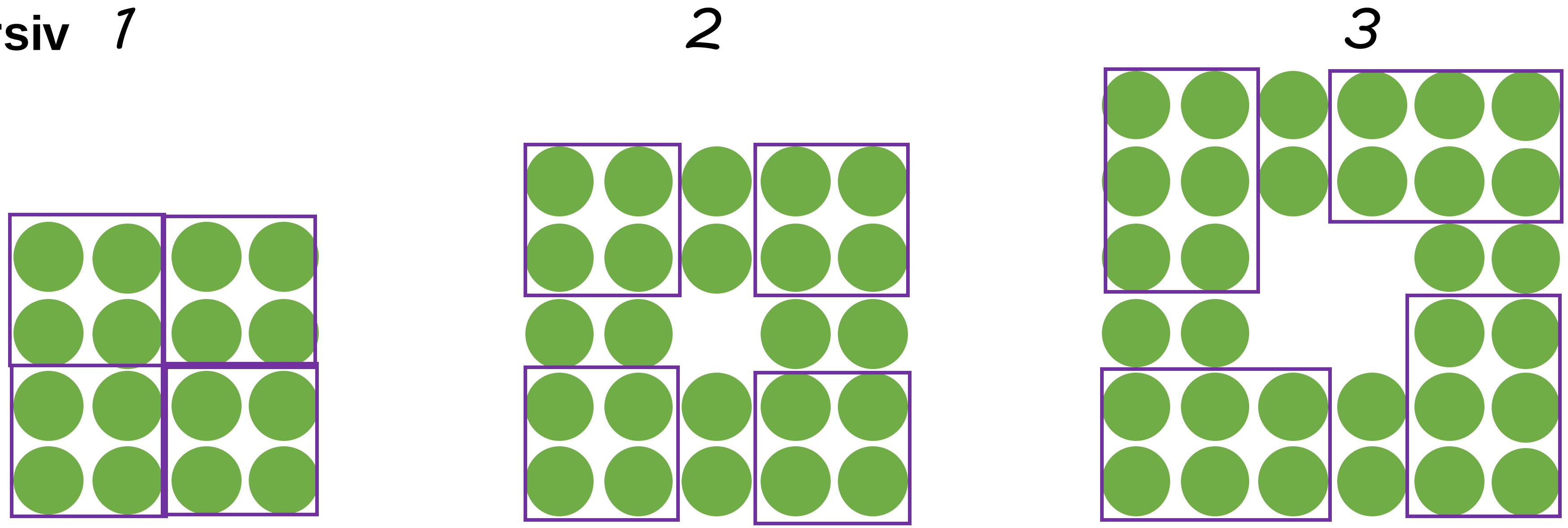


C



Arithmetische Folgen

A – rekursiv



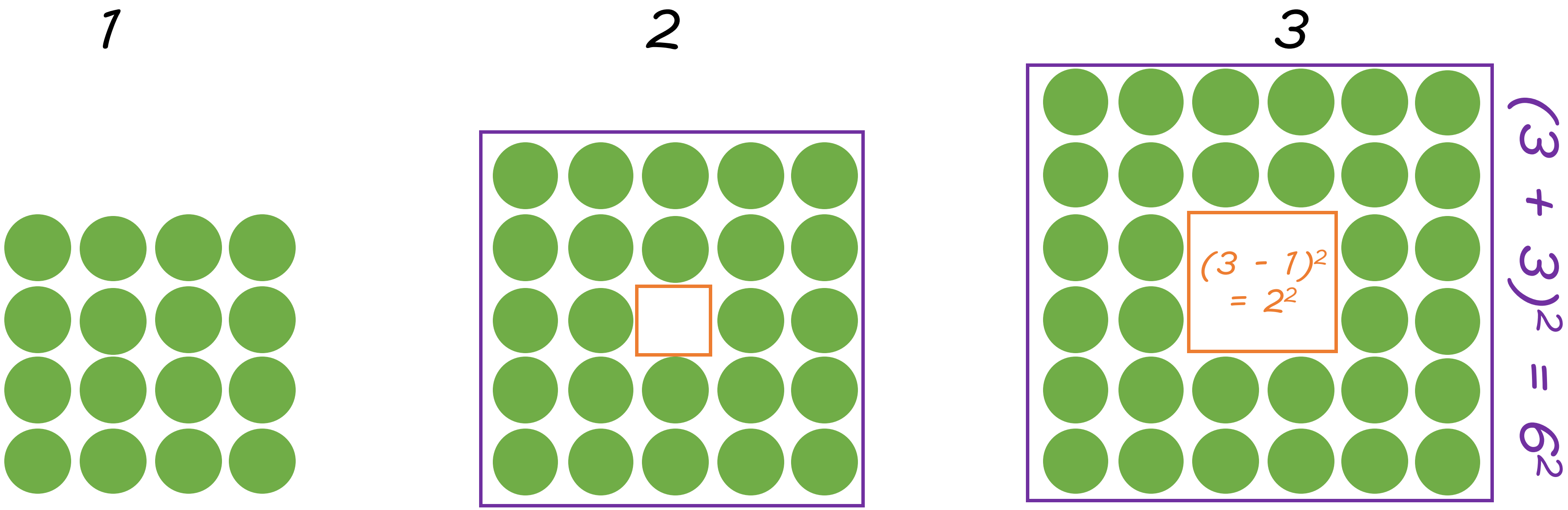
rekursiver Term: $z_n = z_{n-1} + 8$

Beispiel Figur 3: $z_3 = z_{3-1} + 8 = z_2 + 8 = 24 + 8 = 32$

→ von einer Figur zur folgenden Figur kommen 8 Plättchen hinzu

Arithmetische Folgen

A - explizit

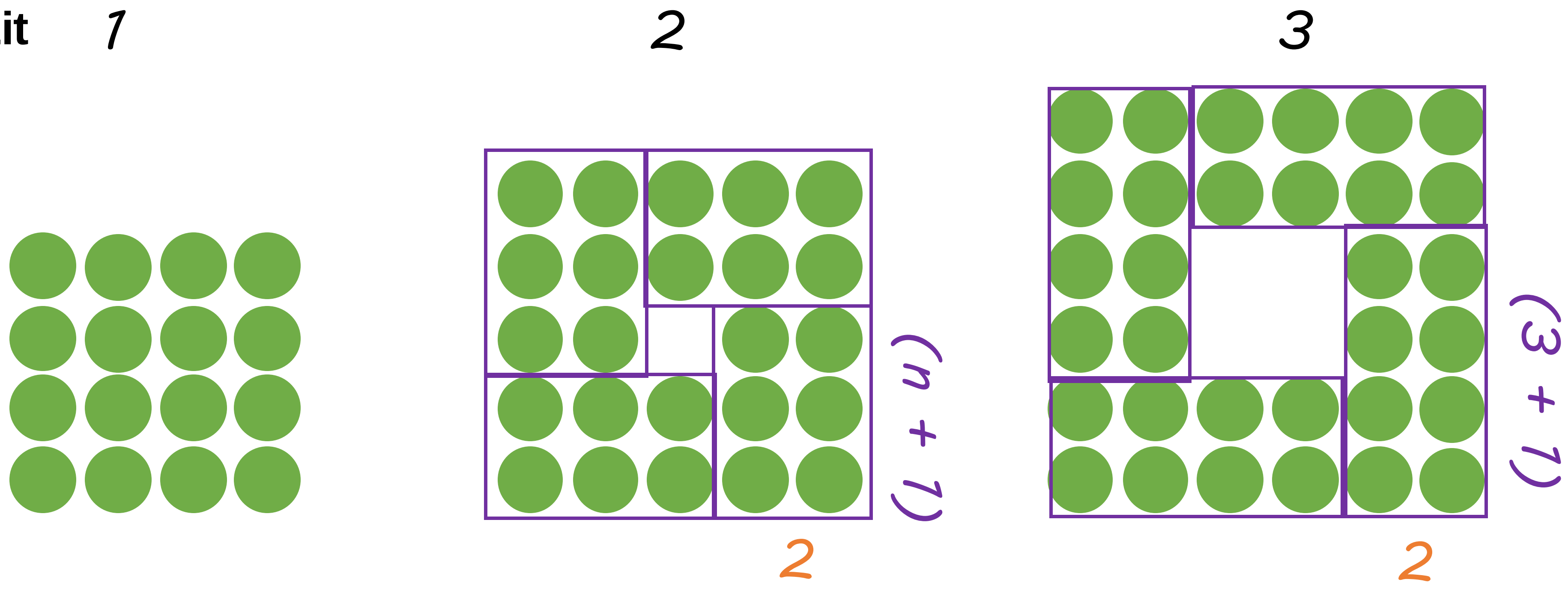


explizit**er** Term: $z_n = (n + 3)^2 - (n - 1)^2$

Beispiel Figur 3: $z_3 = (3 + 3)^2 - (3 - 1)^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

Arithmetische Folgen

A - explizit

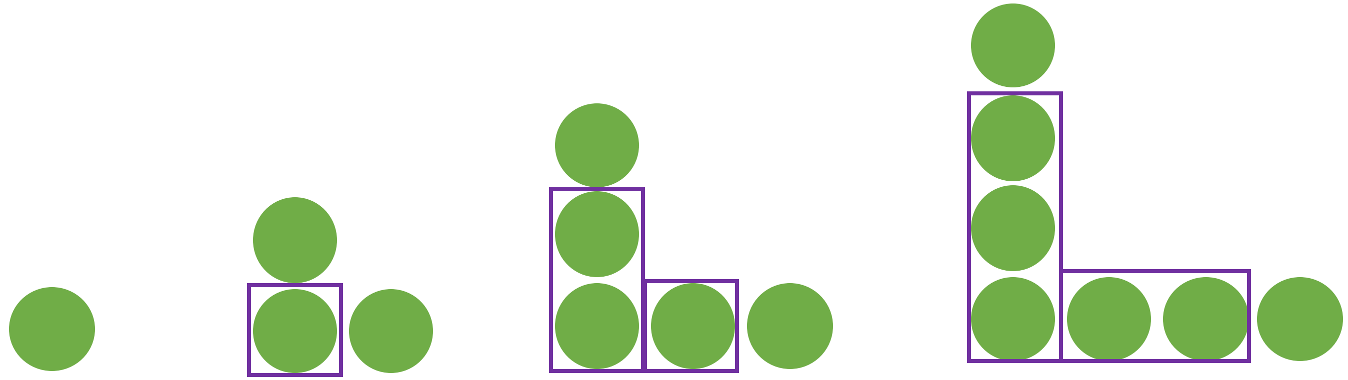


<u>explizIter</u> Term: $z_n = 4 \cdot (2 \cdot (n+1))$

Beispiel Figur 3: $z_3 = 4 \cdot (2 \cdot (3+1)) = 4 \cdot (2 \cdot 4) = 32$

Arithmetische Folgen

B - rekursiv



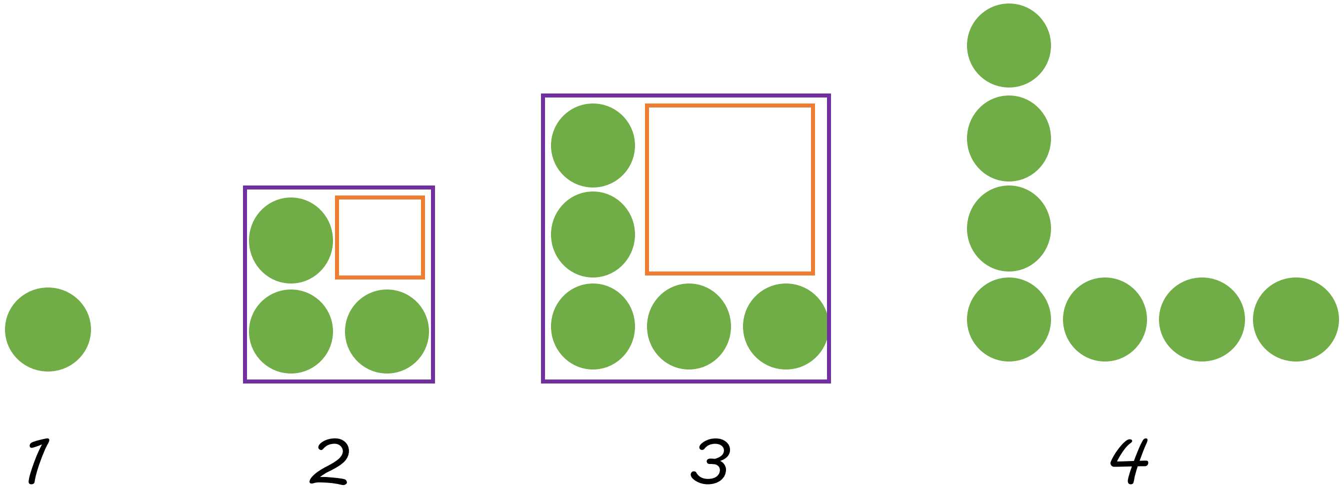
1 2 3 4

<u>rekursiver</u> Term: $z_n = z_{n-1} + 2$

Beispiel Figur 3: $z_3 = z_{3-1} + 2 = z_2 + 2 = 3 + 2 = 5$

Arithmetische Folgen

B - explizit

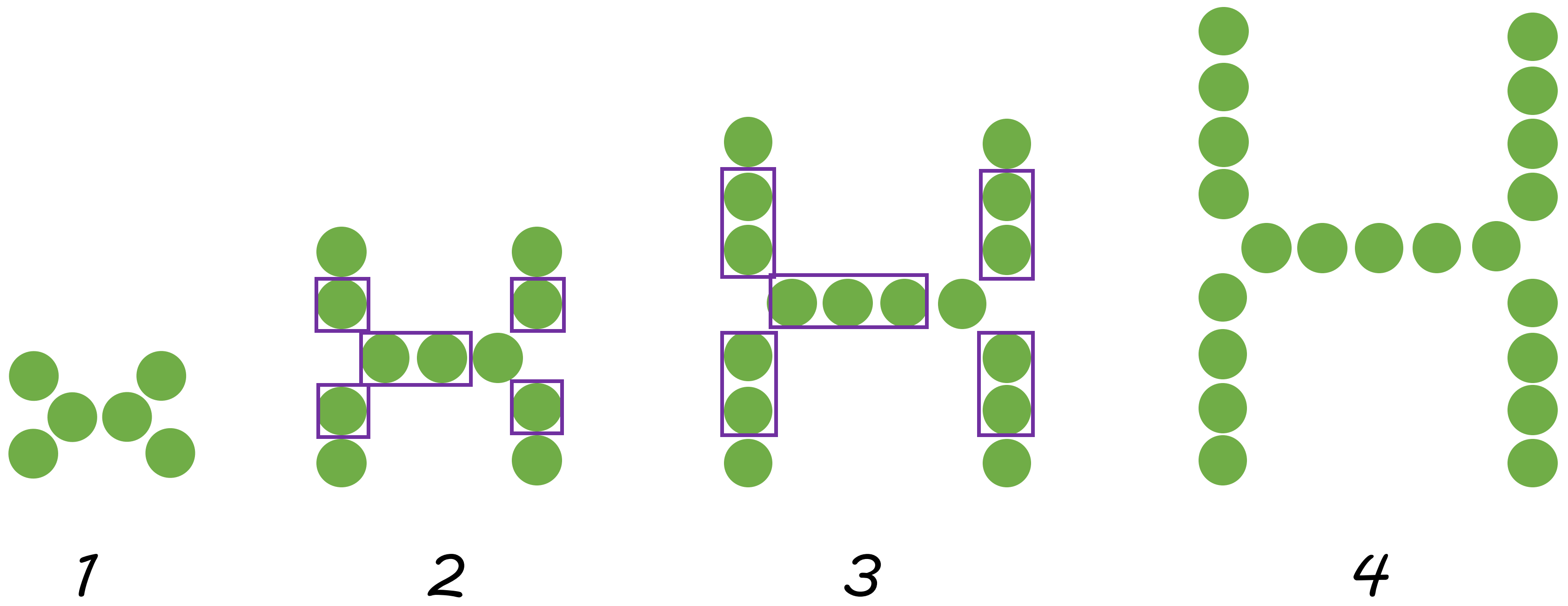


explizīter Term: $z_n = n^2 - (n - 1)^2$

Beispiel Figur 3: $z_3 = 3^2 - (3 - 1)^2 = 9 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

Arithmetische Folgen

C - rekursiv

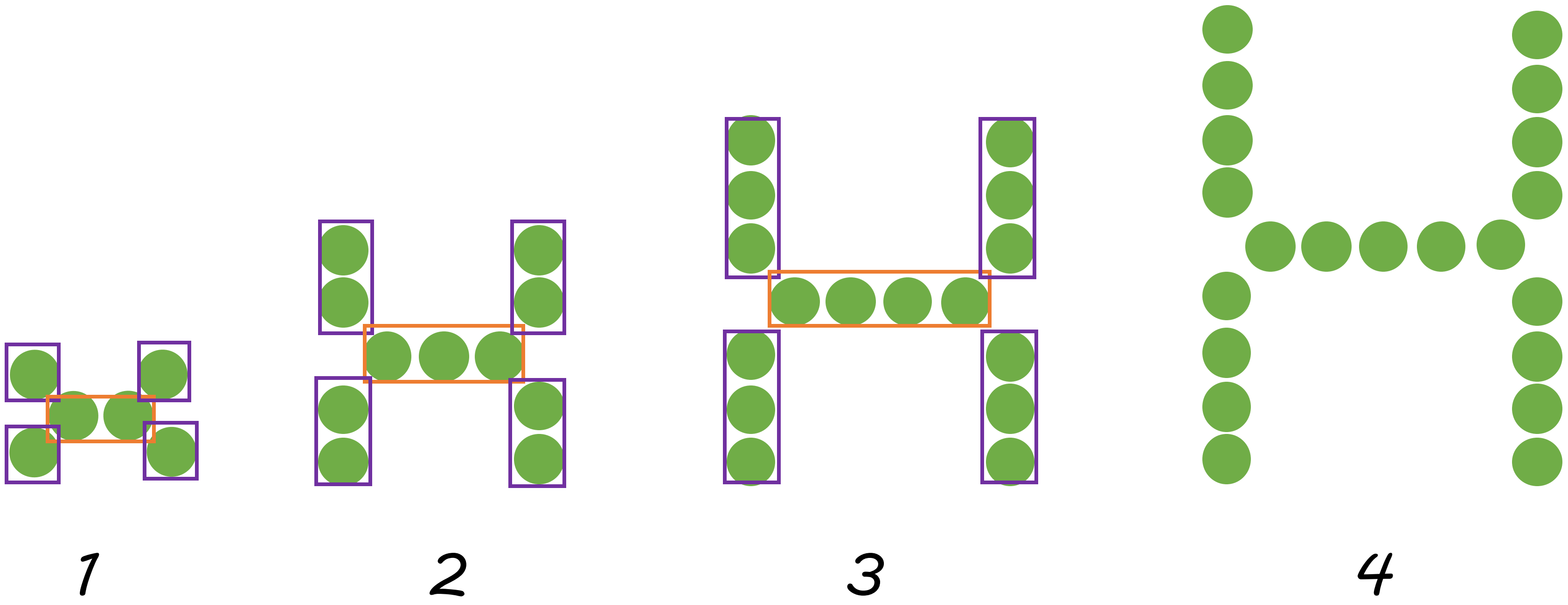


<u>rekursiver</u> Term: $z_n = z_{n-1} + 5$

Beispiel Figur 3: $z_3 = z_{3-1} + 5 = z_2 + 5 = 11 + 5 = 16$

Arithmetische Folgen

C - explizit



explizites Term: $z_n = 4 \cdot n + (n + 1)$

Beispiel Figur 3: $z_3 = 4 \cdot 3 + (3 + 1) = 12 + 4 = 16$

Fragen? Vielen Dank!

Literatur

Nührenbörger, M, Häsel-Weide, U., Höveler, K., Cormann, S., & Werner, A (2021). Verständig und sicher im Einspluseins und Einsminuseins – Förderbaustein Rechnen in Beziehungen: Addition und Subtraktion produktiv üben. Open Educational Resources.

Internetlinks und Schulbücher

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 2*. Ernst Klett Verlag.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein – Westfalen (o. J.). Aufgabenideen zu Muster und Strukturen Mathematik. Verfügbar unter: https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/download/1633. Zuletzt abgerufen am: 13.09.2024.