

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Vorkurs Mathematik
im Wintersemester 2024

Aufgabe 1)

Es sei eine Datensatz $(x_1, \dots, x_N)$ gegeben. Betrachten Sie die den Mittelwert $\bar{x}$, die Varianz $\text{Var}(x)$ und einen Median m des Datensatzes. Wenn zwei dieser Größen Null sind, was können wir über die dritte sagen? Und: Was können Sie über den Datensatz insgesamt sagen?

- (a) $\bar{x} = 0 \quad \& \quad \text{Var}(x) = 0 \implies ?$
- (b) $\bar{x} = 0 \quad \& \quad m = 0 \implies ?$
- (c) $\text{Var}(x) = 0 \quad \& \quad m = 0 \implies ?$

Untere/obere Schranke

Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.

- Eine “untere Schranke” (für den Bildbereich) von f ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in D$ gilt $f(x) \geq c$.
- Eine “obere Schranke” (für den Bildbereich) von f ist eine Zahl $C \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in D$ gilt $f(x) \leq C$.

Bemerkung: Untere bzw. obere Schranken sind nicht eindeutig: Ist c eine untere Schranke für f , dann ist auch jedes $y < c$ eine untere Schranke.

- Eine *größte untere Schranke* von f ist eine untere Schranke c , sodass für jede untere Schranke c' gilt $c \geq c'$.
- Eine *kleinste obere Schranke* von f ist eine obere Schranke C , sodass für jede obere Schranke C' gilt $C \leq C'$.

Aufgabe 2)

Sei $(0, \infty)$ die Menge aller positiven reellen Zahlen. Betrachten Sie die Funktionen

- $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$
- $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log(x)$

Für die gegebene f und g entscheiden Sie ob es

- (a) Minima/Maxima vorliegen;
- (b) eine untere/obere Schranke vorliegt;
- (c) eine größte untere/ kleinste obere Schranke vorliegt.

Aufgabe 3)

Im Übungsblatt 9 haben wir verschiedene Möglichkeiten gesehen, um eine Gerade in der Ebenen darzustellen.

Wir werden nun etwas analoges für eine Gerade (durch die Ursprung) im 3-dimensionalen Raum machen.

- (a) Berechnen Sie die Lösungen (x, y, z) folgendes Gleichungssystem in 3 Variablen:

$$\begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{2}z \end{cases} \quad (1)$$

- (b) Finden Sie einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, sodass jede Lösung von (1) die Form $t\vec{b}$ hat, für geeignetes $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Sind $\vec{v}, \vec{u}$ Lösungen von (1) dann ist auch $t\vec{u} + r\vec{v}$ eine Lösung für alle $t, r \in \mathbb{R}$.

Dies zeigt, dass eine Gerade durch die Ursprung zwei Darstellungen hat

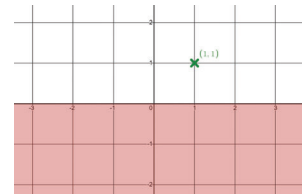
- Streckungen eines Vektors $\vec{b}$
- Lösungsmenge eines Lineargleichungssystems mit zwei Gleichungen in 3 Variablen, d.h., Schnittmenge zweier Ebenen

und, dass sie einen *Unterraum* des $\mathbb{R}^3$ ist.

Bonusaufgabe)

- (a) Betrachten Sie die *geöffnete untere Halbebene*:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$



und den Punkt $P = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

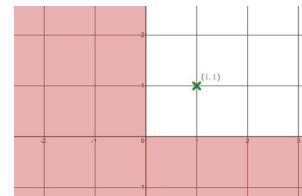
- i) Gibt es einen Punkt $Q \in H$, der den (Euklidischen) Abstand zu P minimiert? In Formel, gibt es einen Punkt $Q \in H$ mit

$$d_2(Q, P) = \min_{R \in H} d_2(R, P) ?$$

- ii) Begründen Sie ihre Antwort.

- (b) Betrachten Sie die Vereinigung der abgeschlossenen 2., 3. und 4. Quadranten:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ oder } y \leq 0\}$$



und den Punkt $P = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Gibt es einen Punkt $Q \in T$, der den (Euklidischen) Abstand zu P minimiert? In Formel, gibt es einen Punkt $Q \in T$ mit

$$d_2(Q, P) = \min_{R \in T} d_2(R, P) ?$$

- ii) Begründen Sie ihre Antwort.