

Abgabe

In diesem Blatt sind zwei (Teil-)Aufgaben mit “Abgabe” markiert. Diese dürfen bis Sonntag, den 15.9. um 17 Uhr abgegeben werden, per Email an die/den Tutor/in bei der/dem Sie aktuell in der Übungsgruppe sind.

Diese Aufgaben werden am Montag in den Übungsgruppen besprochen, und am Dienstag mit Korrekturen zurückgegeben.

Aufgabe 1) (Parametrische Geraden)

Wir wissen, dass sich eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch eine Funktion der Form

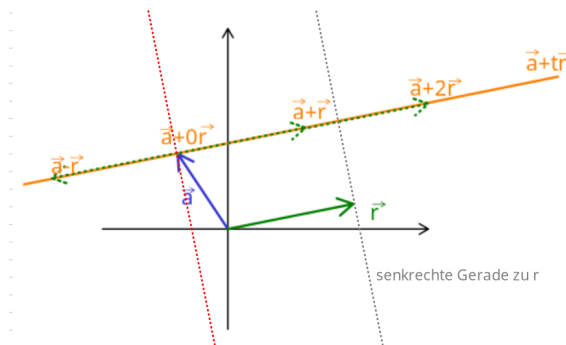
$$f(x) = mx + q, \quad m, q \in \mathbb{R}$$

darstellen lässt. Dies heißt die *implizite Darstellung* und die Gerade besteht aus den Punkten

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Eine andere Möglichkeit ist anhand von Vektoren: man braucht dafür einen Anfangsvektor und einen Richtungsvektor: Es seien die Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y)$ und $\vec{r} = (r_x, r_y)$ gegeben. Die Gerade $G_{\vec{a}, \vec{r}}$, die durch den Punkt $\vec{a}$ in die Richtung $\vec{r}$ läuft lässt sich als die Menge

$$G_{\vec{a}, \vec{r}} = \{\vec{a} + t\vec{r} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



Wenn der Parameters t alle Werte in $\mathbb{R}$ durchläuft, erhalten wir alle Punkte auf der Geraden. Diese heißt die *parametrische Darstellung* (orange).

Als dritte Variante, aus den Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y)$ und $\vec{r} = (r_x, r_y)$ wie oben, kann man die Gerade

$$G_{\vec{a} \perp \vec{r}} = \{\vec{a} + \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle = 0\}$$

definieren. Sie besteht aus allen Vektoren mit Bezugspunkt in $\vec{a}$ und orthogonal zu $\vec{r}$ (rot). Diese nennen wir die *normale Form* einer Gerade.

In der folgende Tabelle wird eine implizite Darstellung oder die Vektoren $\vec{a}, \vec{r}$ einer parametrischen bzw. normalen Form jeweils für mehrere Geraden gegeben. Ergänzen Sie (soweit wie möglich) die Tabelle mit den fehlenden Darstellungen.

Implizit	Parametrisch	Normalen Form
$f(x) = 2x - 1$		
	$\vec{a} = (0, 0)$ und $\vec{r} = (1, 1)$	
		$\vec{a} = (1, 0)$ und $\vec{r} = (1, 1)$
	$\vec{a} = (1, 1)$ und $\vec{r} = (2, 0)$	
$f(x) = 3$		
$f(x) = -x$		
		$\vec{a} = (3, 0)$ und $\vec{r} = (2, 0)$

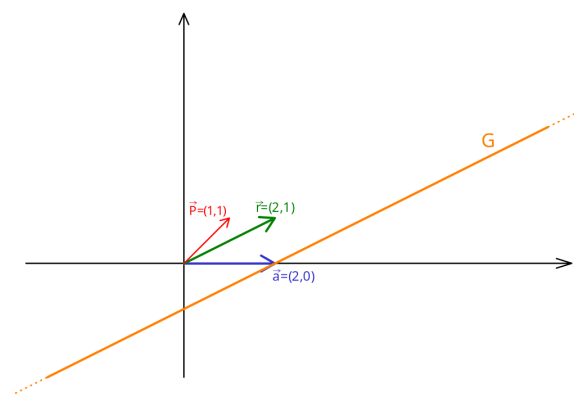
Aufgabe 2) (Minimaler Abstand) (Abgabe)

Betrachten Sie die Gerade

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

und den Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finden Sie den einen Wert t_0 sodass, der Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in G$ den kleinsten Abstand von $\vec{P}$ hat.



Aufgabe 3) (Abstrakte Norm)

- (a) (Abgabe) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung die Eigenschaften einer Norm erfüllt. Schreiben Sie dafür einen sauberen Beweis auf.

$$\| \cdot \|_{\infty} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \|\vec{v}\|_{\infty} = \max_{j=1}^n |v_j|$$

- (b) Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen die Eigenschaften einer Norm erfüllen

i) $\| \cdot \|_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \|\vec{v}\|_3 = \sqrt[3]{\sum_{j=1}^n |v_j|^3}$

ii) $\| \cdot \|_4 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \|\vec{v}\|_4 = \left(\sum_{j=1}^n v_j^4 \right)^{\frac{1}{4}}$

- (c) (Bonus) Entscheiden Sie, ob die folgende Abbildung die Eigenschaften einer Norm erfüllt

$$\| \cdot \|_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \|\vec{v}\|_{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n |v_j|^{\frac{1}{2}} \right)^2$$