Prof. Dr. Ivan Veselić Dr. Michele Serra

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Ellipse

Eine Ellipse auf der Ebene lässt sich durch einer expliziten Gleichung der Form

$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1, \quad \text{für } \alpha, \beta, x_0, y_0 \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta > 0 \tag{EE}$$

darstellen, wo (x_0, y_0) das Zentrum bezeichnet, oder durch einen impliziten Gleichung der Form

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0,, \quad \text{für } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}. \tag{EI}$$

Aufgabe 1) (Anwendung der Quadratenergänzung)

Ein Satellit umkreist einen Planeten, der sich auf einer Geraden bewegt. Der Satellit durchläuft eine elliptische Umlaufbahn, in deren Zentrum der Planet liegt[1].
Anhand der Quadratenergänzung können wir eine implizite Gleichung in eine expliziten Gleichung umwandeln und somit das Zentrum der Ellipse ablesen.

Angenommen der Satellit bewegt sich aktuell längst der Ellipse mit Gleichung

$$9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 12 = 0.$$

Was ist die aktuelle Position (x_0, y_0) des Planeten?

Aufgabe 2) (Lineare Gleichungssysteme)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x = -y \\ z - t = 0 \end{cases}$$

(a) Prüfen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 0, 0)$ und $\vec{b} = (0, 0, 1, 1)$ das System lösen.

(b) Seien α, β reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass der Vektor $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ auch eine Lösung des Systems ist.

(c) Seien nun $\vec{v} = (x, y, z)$ und $\vec{w} = (x', y', z')$ zwei beliebige Lösungen des Systems und seien wieder α, β beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ auch eine Lösung des Systems ist.

[1] Um das Problem zu vereinfachen, nehmen wir an, dass sich der Planet im Zentrum der elliptischen Umlaufbahn befindet. In der Realität befindet er sich in einem der beiden *Brennpunkte*.

Aufgabe 3)

Sei $\vec{a}$ der Vektor $\vec{a} = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Definiere ein Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = 0$.

Definition (Kern)

Die Menge $\ker(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = 0\}$ heißt *der Kern von f*.

In der Schule haben Sie $\ker(f)$ *Nullstellenmenge von f* genannt.

(b) Beschreiben Sie die geometrische Form der Teilmenge $\ker(f)$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Untersuchen Si die Funktion f auf Minima/Maxima?

Bonusaufgabe)

Beschreiben oder Skizzieren Sie die Nulstellenmenge $\ker(f)$ folgender Funktionen:

(a) $f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ in $\mathbb{R}^2$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1$ in $\mathbb{R}^2$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ in $\mathbb{R}^2$

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ in $\mathbb{R}^3$