Vorkurs – VL 8

Terme und Gleichungen II

Vorkurs

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Laufende Fragensammlung

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen	Streifenmethode	Systematisches Probieren	Graphische Lösungsverfahren
Numerisch-iterative Lösungsverfahren	Gegenoperatoren	Äquivalenzumformungen	Lösungsformeln anwenden

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen

$$26 + x = 107$$

Verwandte Gleichung mit gleicher Struktur

$$2 + x = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

also

$$26 + 81 = 107$$

Zerlegung

$$26 + x = 26 + 81$$

also

$$x = 81$$

Umkehraufgabe

$$107 - 26 = x$$

$$81 = x$$

also

$$x = 81$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen

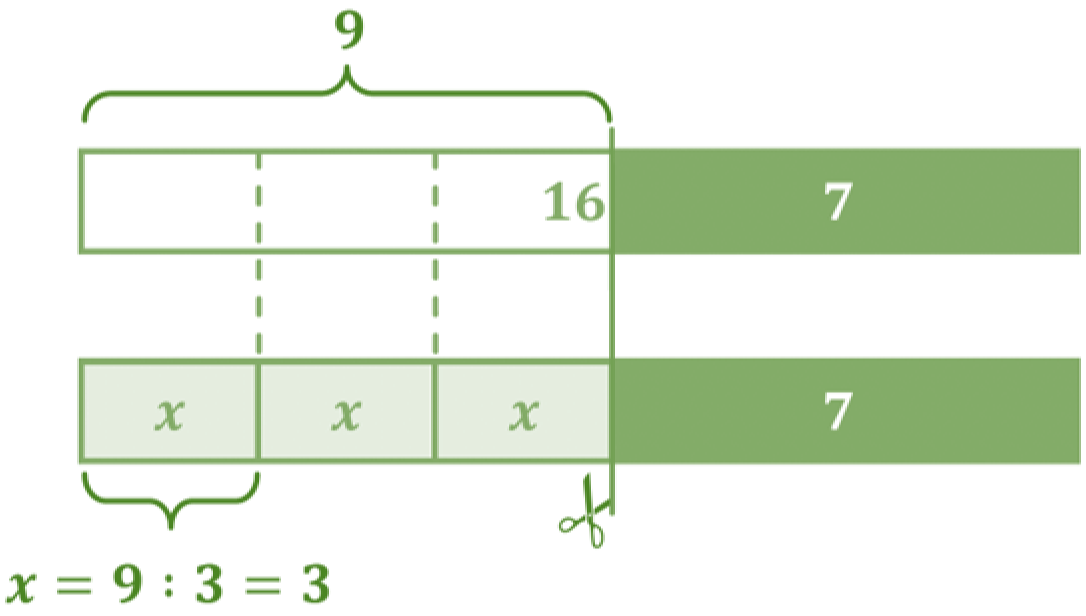
Grundschule: Umkehr- und Tauschaufgaben

$26 + x = 107$	⟷ Tauschaufgabe ⟷	$x + 26 = 107$
↕ Umkehr-aufgabe		↕ Umkehr-aufgabe
$26 = 107 - x$	⟷ Tauschaufgabe ⟷	$x = 107 - 26$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Streifenmethode

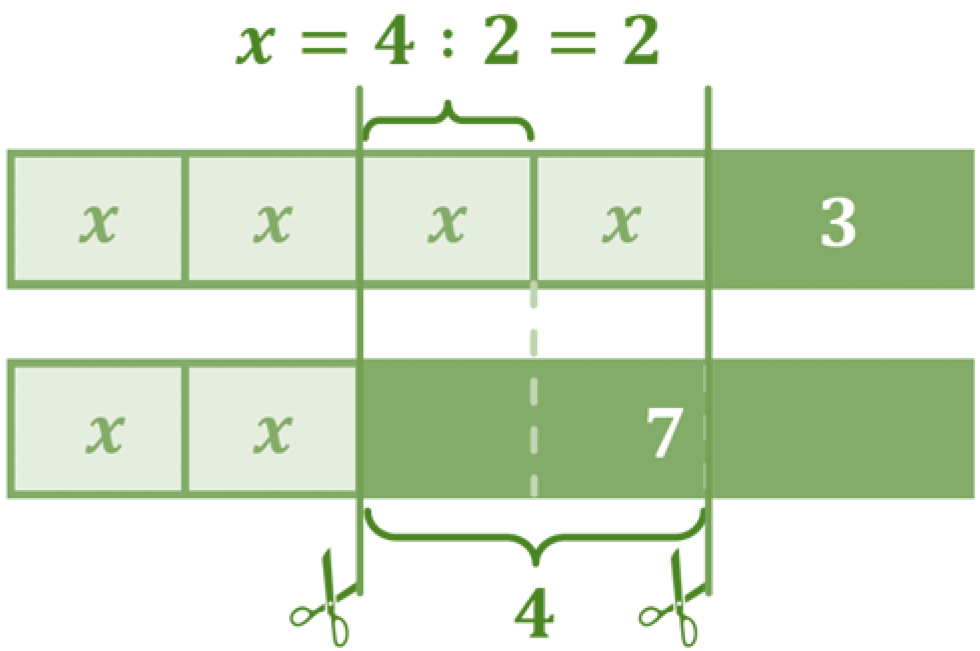
$$3x + 7 = 16$$



Methoden zur Lösung von Gleichungen

Streifenmethode

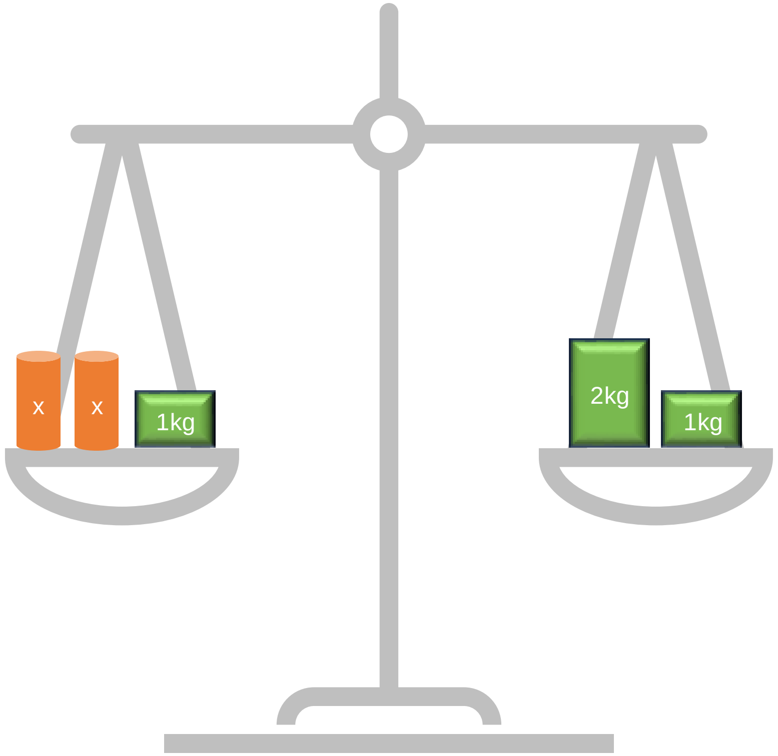
$$4x + 3 \ = 2x + 7$$



Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$2x + 1 \; = 3$$

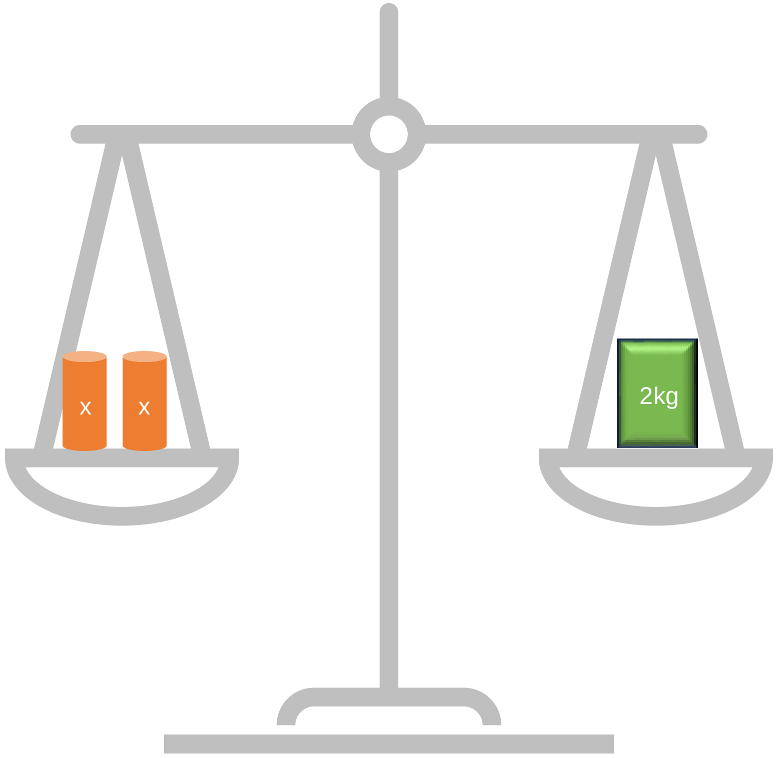
$$2x + 1 \; = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$2x = 2$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

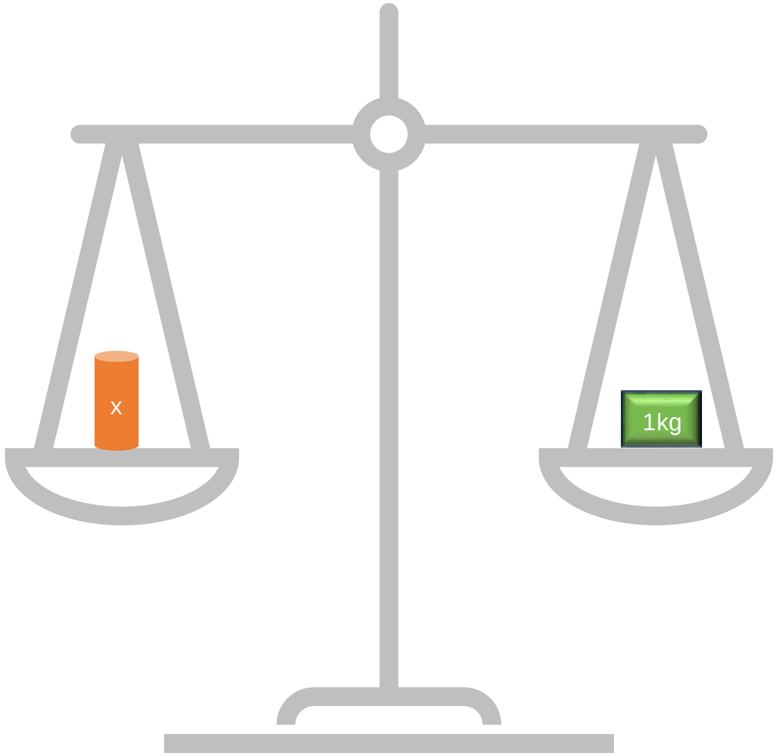
$$2x = 2$$

Masse auf beiden Seiten halbieren.

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$x = 1$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Masse auf beiden Seiten halbieren.

$$x = 1$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell

Waagemodell

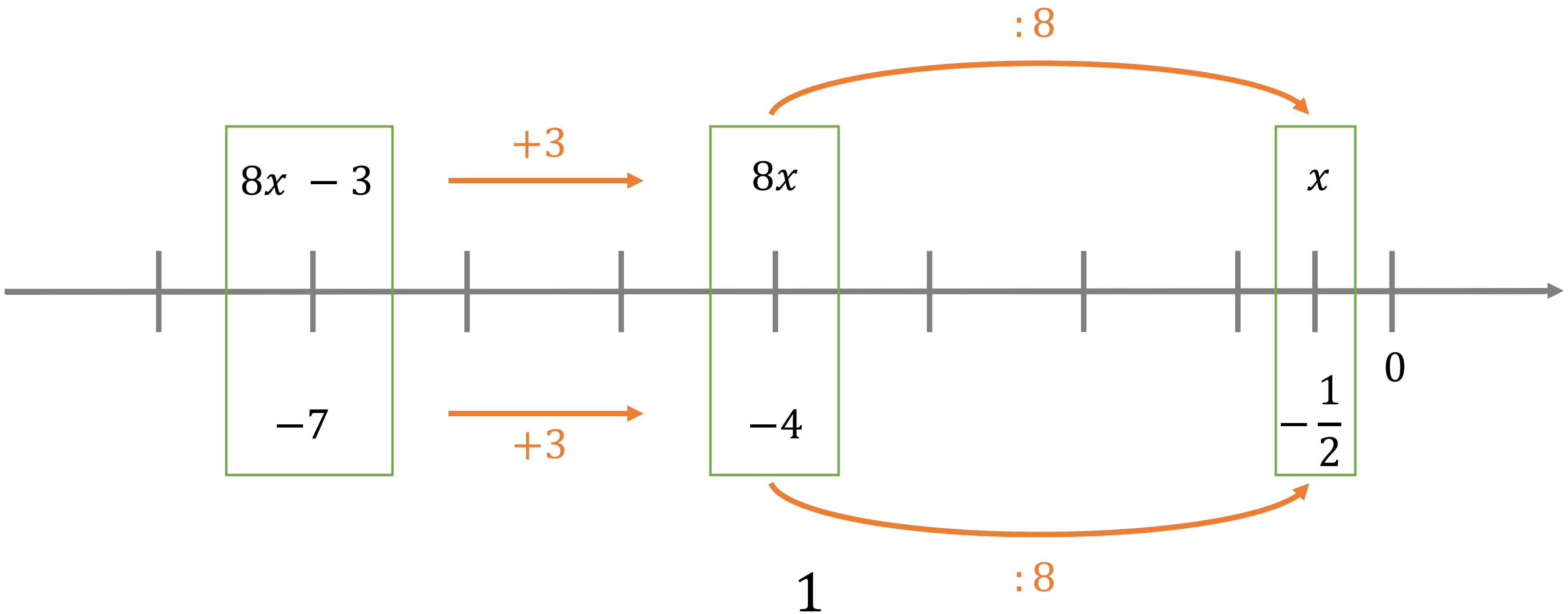
- lässt sich in einfachen Fällen gut zur Veranschaulichung nutzen.
- ist, wie jedes Modell, nur begrenzt nutzbar!
  (vgl. etwa negative Zahlen, irrationale Zahlen, schwierig bei Bruchzahlen, Division, Multiplikation, …)

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Am Modell des Zahlenstrahls

$$8x - 3 = -7$$



$$x = -\frac{1}{2}$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Eine Umformung einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung, wenn sich die Lösungsmenge dabei nicht verändert.

$\boldsymbol{a = b}$ ist äquivalent zu $\boldsymbol{a + c = b + c}$

$\boldsymbol{a = b}$ ist äquivalent zu $\boldsymbol{a - c = b - c}$

$\boldsymbol{a = b}$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot c}$

$\boldsymbol{a = b}$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $\boldsymbol{a : c = b : c}$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Führen Sie nun selbst eine Äquivalenzumformung mit der Streifenmethode oder dem Waagemodell durch!

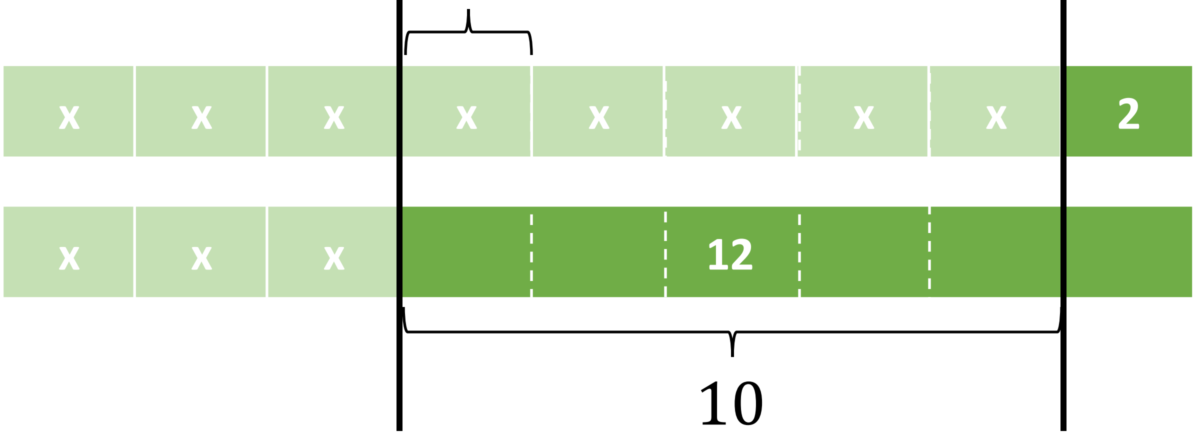
$$8x + 2 = 3x + 12$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Streifenmethode

$$8x + 2 = 3x + 12$$

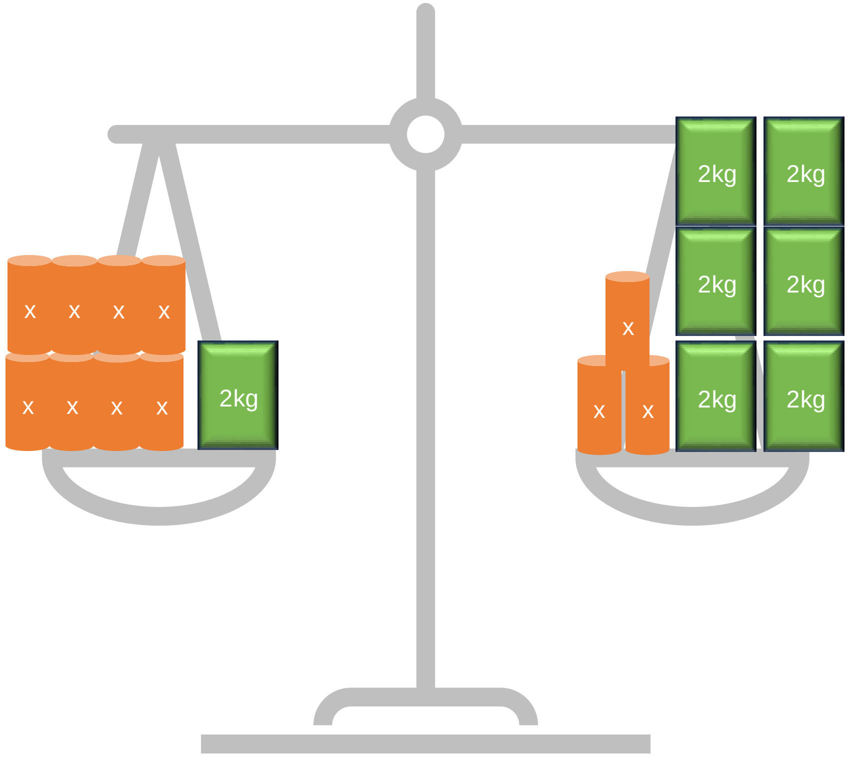
$$x = 10 : 5 = 2$$



Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



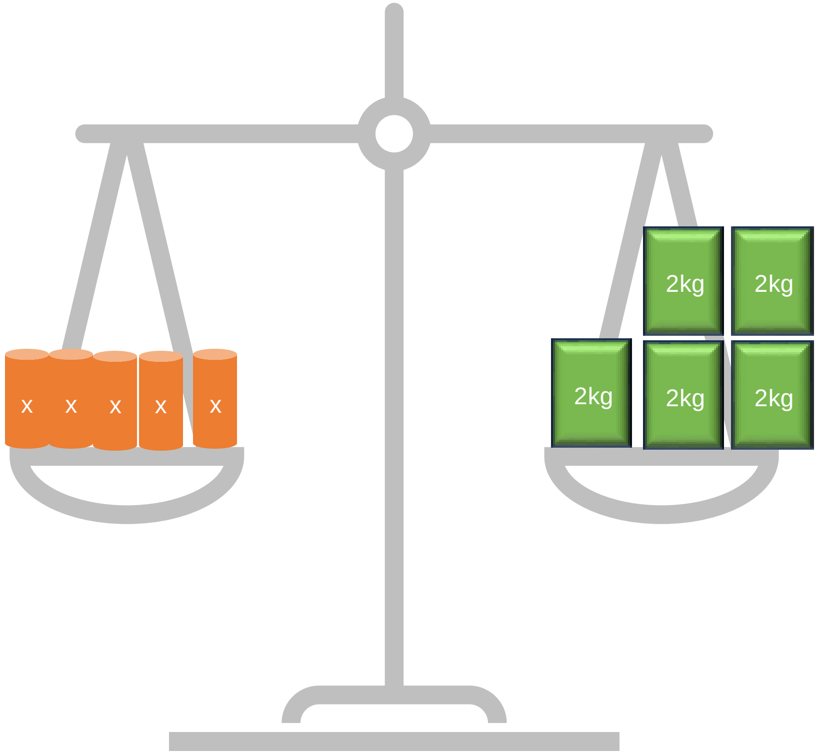
$$8x + 2 = 3x + 12$$

$$8x = 3x + 10$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$5x = 10$$

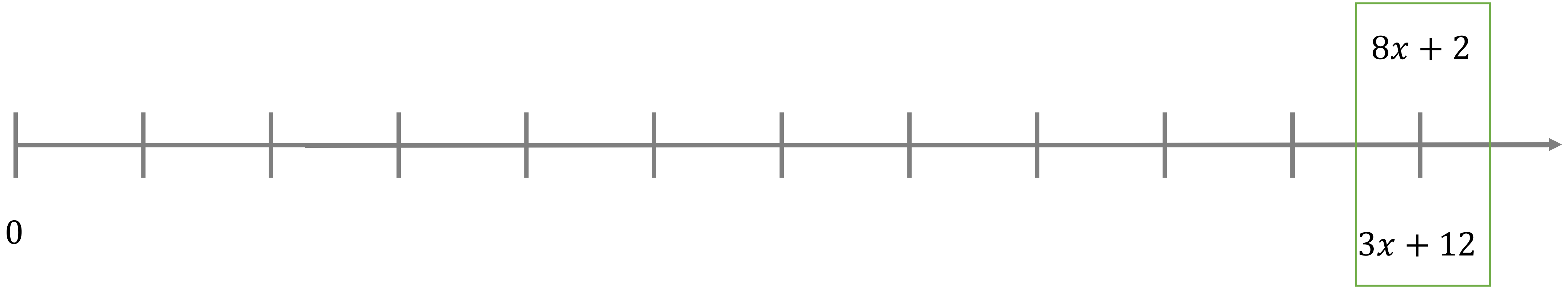
$$x = 2$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Am Modell des Zahlenstrahls

$$8x + 2 = 3x + 12$$



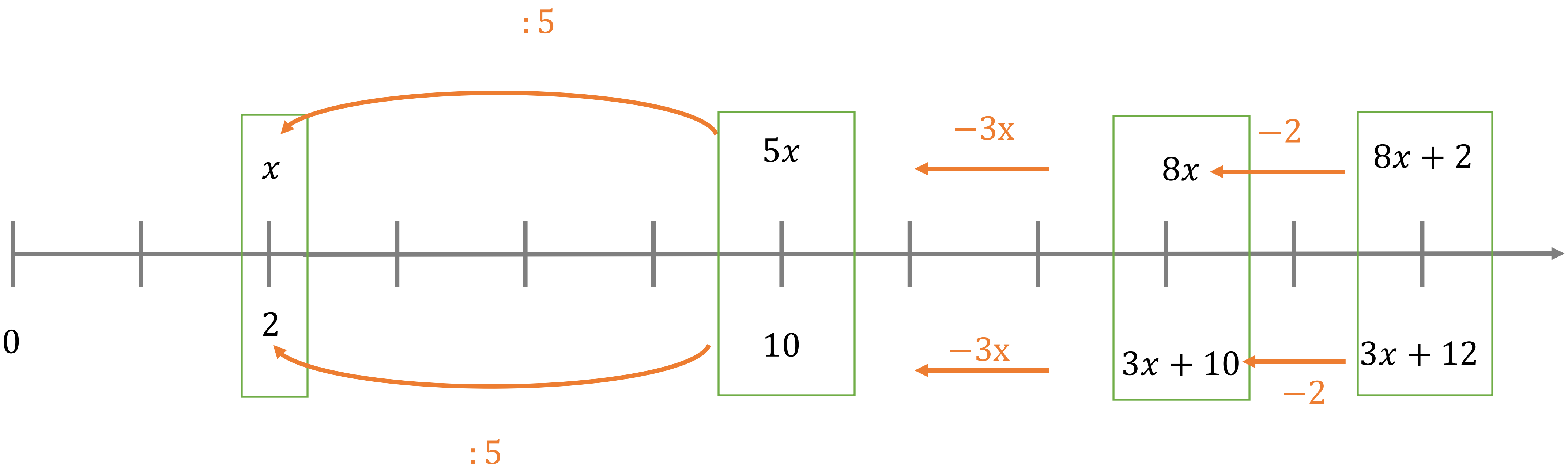
An welchen Stellen stoßen Sie bei der Darstellung am Zahlenstrahl auf Probleme?

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Am Modell des Zahlenstrahls

$$8x + 2 = 3x + 12$$



Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

Teiler und Vielfache

Präformale Definitionen der Teilbarkeitsbeziehung a | b

- *Charakterisierung eines Teilers im Kontext der Aufgabe:*

  a | b ⬄ Man kann a gleich große Teams in einer Klasse mit b Kindern zusammenstellen.

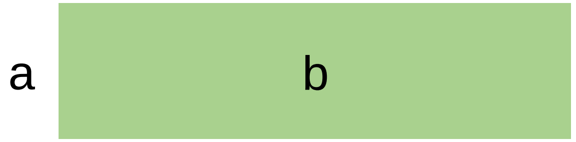
- *Allgemeine Charakterisierung:*
  - in Kindersprache:
    a | b ⬄ a „steckt in b drin“
  - erste Präzisierung: a | b ⬄ d.h. a kommt in einer multiplikativen Zerlegung von b vor
    (oder: b ist Vielfaches von a)

Aber was heißt das genau?

Ich finde eine dritte natürliche Zahl n, so dass n · a = b

- *graphische Charakterisierung:*

  a | b ⬄ es gibt eine Rechteckdarstellung von b mit ganzzahliger Seitenlänge a



Teiler und Vielfache

Formale Definitionen

„Die natürliche Zahl a heißt genau dann ein **Teiler** der natürlichen Zahl b, wenn (mindestens) eine natürliche Zahl n existiert mit $\mathbf{n \cdot a = b}$. Dann heißt gleichzeitig b **Vielfaches** von a.
In beiden Fällen benutzen wir die Schreibweise $\mathbf{a|b}$, und lesen sie im Fall der Teilbarkeitsbeziehung von links nach rechts **a teilt b** oder **a ist ein Teiler von b**, im Falle der Vielfachenbezeichnung von rechts nach links als **b ist ein Vielfaches von a**.“

Padberg & Büchter, 2015, S. 17

Teiler und Vielfache

Formale Definitionen

Definition *Teilermenge*:

Die Menge aller **positiven** Teiler von $a \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge

$T_a = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \mid a\}$, nennen wir Teilermenge von a

Weitere Charakterisierung:

$T_a = \{x \in \mathbb{N} \,/\, \text{es gibt ein } q \in \mathbb{N} \text{ mit } q \cdot x = a\}$

Definition *echte Teiler*:

Alle $n \in T_a$ mit $n \neq 1$ und $n \neq a$ heißen echte Teiler.

Definition *Vielfachenmenge*:

Die Menge aller positiven Vielfachen von $a \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge

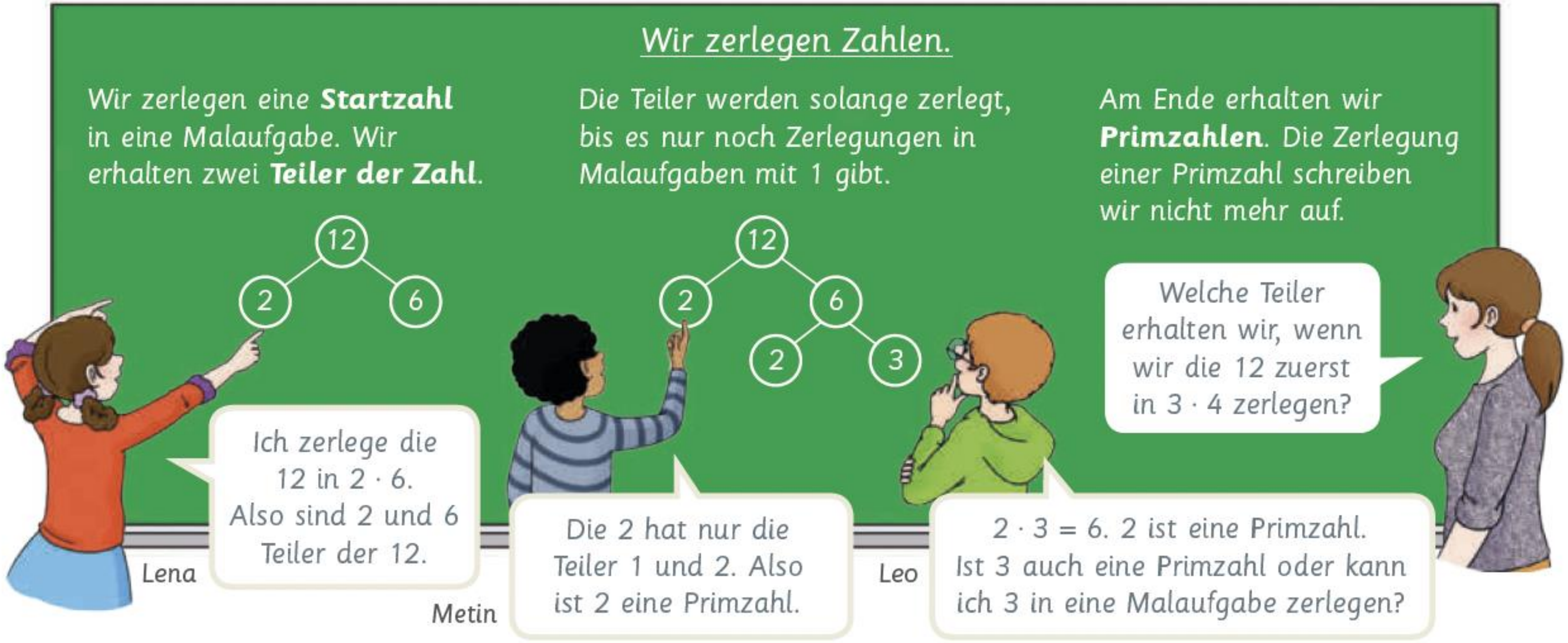
$V_a = \{x \in \mathbb{N} \,/\, a \mid x\}$, nennen wir Vielfachenmenge von a.

Weitere Charakterisierung:

$V_a = \{x \in \mathbb{N} \,/\, \text{es gibt ein } q \in \mathbb{N} \text{ mit } q \cdot a = x\}$

Teiler und Vielfache

Im Schulbuch



Zahlenbuch 4, S. 111

Teiler und Vielfache

Formale Definitionen

Definition *Primzahlen*:

Eine natürliche Zahl a $\in \mathbb{N}_{>1}$ heißt Primzahl, wenn sie (in der Menge der natürlichen Zahlen) nur die beiden trivialen Teiler 1 und a besitzt.

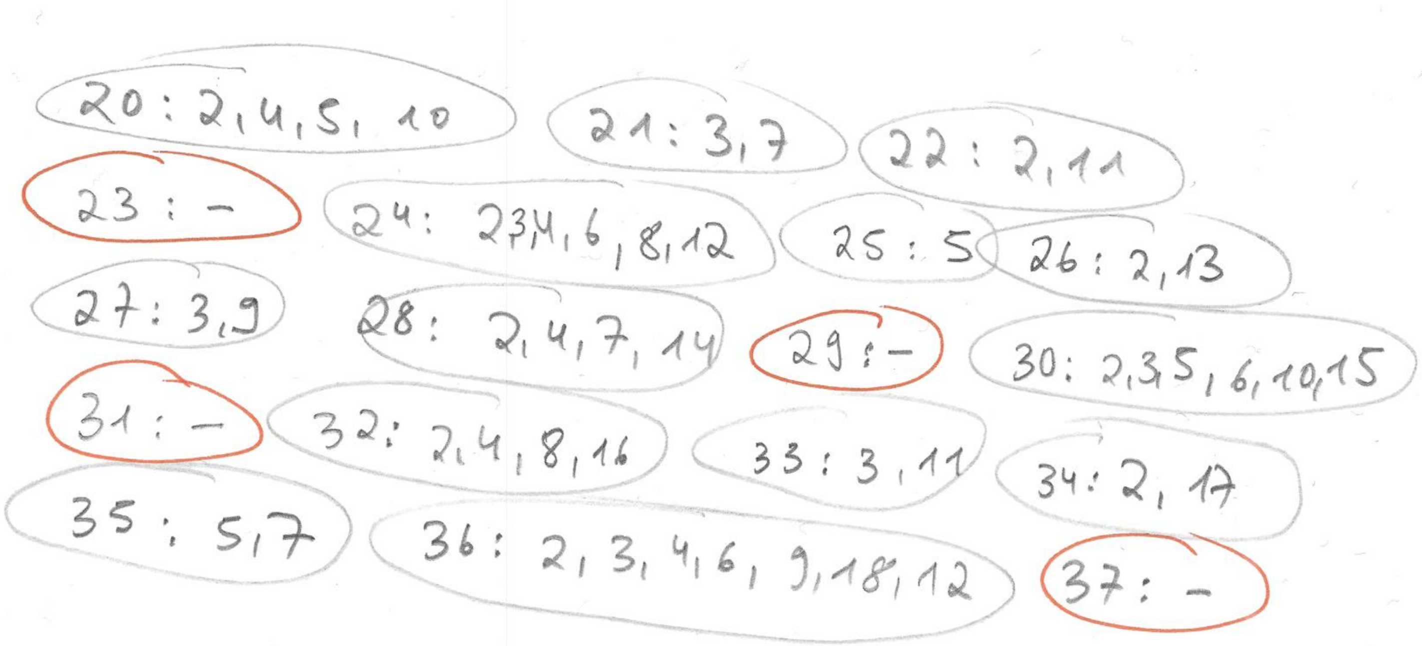
Weitere Charakterisierungen:

- keine echten Teiler hat.
- genau zwei Teiler besitzt.
- zur Menge $M = \{p \in \mathbb{N}_{>1} \,/\, T_p = \{1, p\}\}$ gehört.

Teiler und Vielfache

Teilermengen – vor dem Untersuchen kommt das Aufschreiben

Beispiel für formale Schreibweise (**extensional**):
$T_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$



Aber: für große (Teiler-) Mengen hat diese Darstellung Grenzen. Wie geht es sonst noch?

Teiler und Vielfache

Mengenschreibweisen

1. **Extensionale Beschreibung** von Mengen
(durch Aufzählen der Elemente)

Beispiele:

$T_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$V_{24} = \{24,48,72,96, \ldots\}$

2. **Intensionale Beschreibung** von Mengen
(d.h. durch Benennung einer charakterisierenden Bedingung)

Beispiele:

$T_{24} = \{a \in \mathbb{N} \,/\, a \mid 24\}$

$= \{a \in \mathbb{N} \,/\, \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } a \cdot n = 24\}$

$V_{24} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 24 \mid b\}$

$= \{b \in \mathbb{N} \,/\, \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } 24 \cdot n = b\}$

Teiler und Vielfache

Schreiben Sie die beiden Mengen jeweils in explizit aufzählender Form (extensional) und durch charakterisierende Bedingungen (intensional) auf:

1. Menge der ungeraden Zahlen U
2. Menge der Quadratzahlen Q

Mengenschreibweisen

1. **Extensionale Beschreibung** von Mengen (durch Aufzählen der Elemente)

Beispiele:

$T_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$V_{24} = \{24,48,72,96, \ldots\}$

2. **Intensionale Beschreibung** von Mengen (d.h. durch Benennung einer charakterisierenden Bedingung)

Beispiele:

$T_{24} = \{a \in \mathbb{N} \,/\, a \mid 24\}$

$= \{a \in \mathbb{N} \,/\, \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } a \cdot n = 24\}$

$V_{24} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 24 \mid b\}$

$= \{b \in \mathbb{N} \,/\, \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } 24 \cdot n = b\}$

Teiler und Vielfache

Mengenschreibweisen

	Menge der ungeraden Zahlen U	Menge der Quadratzahlen Q
extensional	$U = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$	$Q = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
intensional	$U = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \nmid n\}$	$Q = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } \sqrt{n} = k\}$
	$U = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } n = 2k + 1\}$	$Q = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } k \cdot k = n\}$
	$U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist nicht ohne Rest durch 2 teilbar}\}$	

Teiler und Vielfache

Wie findet man alle Teiler einer Zahl b?

1. Weg: unsystematische Suche

2. Weg: alle Zahlen < b systematisch von klein nach groß durchprobieren

3. Weg: alle Zahlen bis b/2 durchprobieren, die „Partnerzahl“ gleich dazu (fachsprachlich ausgedrückt: die Ko-Teiler oder Komplementärteiler)

Teiler und Vielfache

Alle Teiler einer Zahl

Finden Sie alle Teiler der Zahlen 18 und 24 und markieren Sie alle gemeinsamen Teiler.

Teiler und Vielfache

Teiler und Vielfache

Alle Teiler einer Zahl

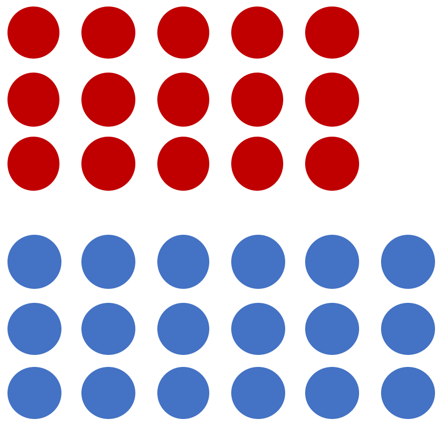
Übertragen Sie diesen Visualisierungsansatz auch auf andere Zahlbeispiele und visualisieren Sie ebenso die gemeinsamen Teiler und den größten gemeinsamen Teiler von 12 und 16.

Teiler und Vielfache

Teiler und Vielfache

Vorstellungen und Darstellungen gemeinsamer Teiler

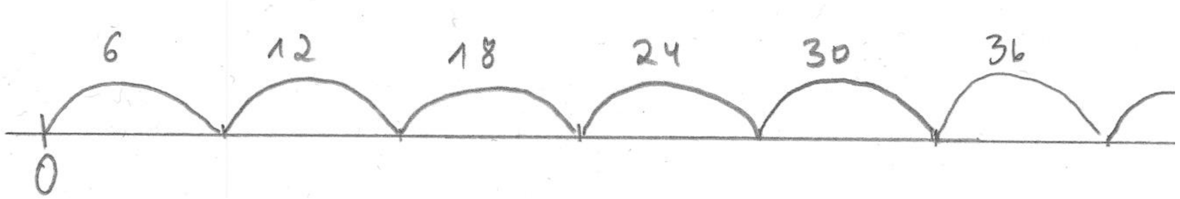
15 und 18 haben den gemeinsamen Teiler 3, denn



… beide Zahlen lassen sich auf 3 verteilen.

… beide Zahlen lassen sich in 3er Spalten aufteilen.

… beide Zahlen lassen sich als Rechteck mit Seitenlänge 3 darstellen.



24 und 30 haben den gemeinsamen Teiler 6, weil sich beide durch 6 ausmessen lassen

(gemeinsamer Teiler als gemeinsames Maß,

größter gemeinsamer Teiler als das größtmögliche Maß, ggT als max ($T_a \cap T_b$))

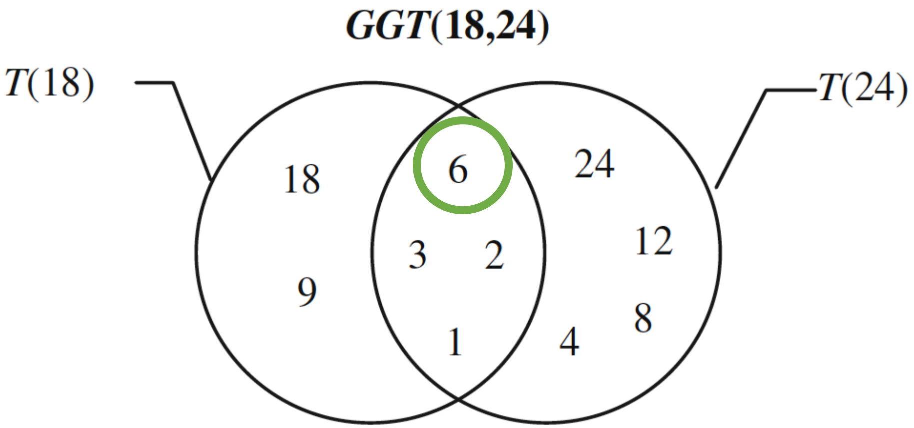
Aufbau der heutigen Vorlesung

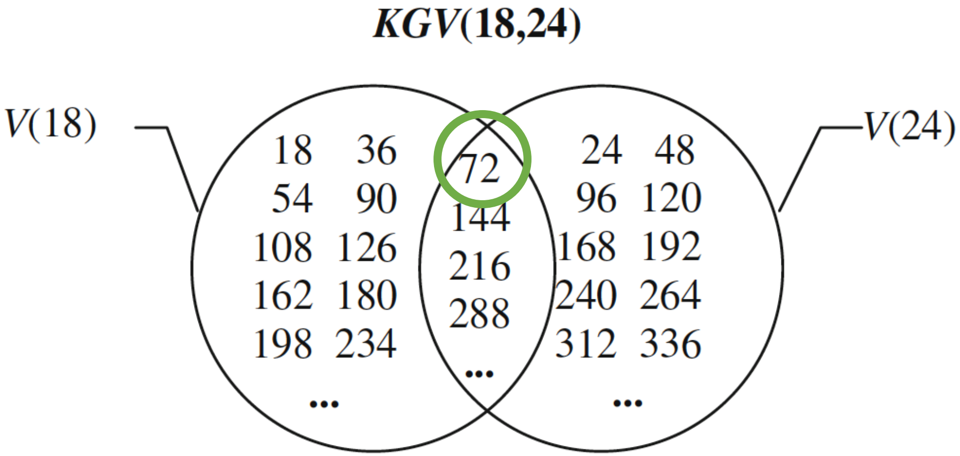
1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

ggT und kgV

Vorstellungen und Darstellungen des ggT und kgV

- Nicht schwer! Aber was bedeutet das inhaltlich?
  Welche Vorstellungen und Darstellungen braucht man dazu?
- Veranschaulichung im Venn-Diagramm:





ggT als größtes und kgV als kleinstes Element der gemeinsamen Schnittmenge der Teiler- bzw. Vielfachenmengen

ggT und kgV

Formale Definitionen

Definition *ggt*

Es seien a und b natürliche Zahlen mit den Teilermengen T(a) und T(b).

Mit ggT(a,b) sei der größte gemeinsame Teiler von a und b bezeichnet,

also das größte Element der Menge $T(a) \cap T(b)$.

Kurz: $ggT(a,b) := \max \{k \in \mathbb{N} / k \text{ teilt } a \text{ und } b\}$

Oder: $ggT(a,b) := \max \{T(a) \cap T(b)\}$

Kann diese Menge leer sein?

Die Menge $T(a) \cap T(b)$ ist niemals leer, denn sie enthält in jedem Fall die natürliche Zahl 1.

Ist $T(a) \cap T(b) = \{1\}$ (d.h. ggT(a,b) =1), so nennt man die Zahlen a und b teilerfremd (oder relativ prim).

ggT und kgV

Formale Definitionen

Definition *kgV*

Es seien a und b natürliche Zahlen mit den Vielfachenmengen V(a) und V(b).

Sind V(a) und V(b) die Vielfachenmengen von a und b, so sei mit kgV (a,b) das kleinste Element von $V(a) \cap V(b)$, also das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b bezeichnet.

Kurz: $kgV(a,b) := \min \{k \in \mathbb{N} \,/\, a \text{ und } b \text{ teilen } k\}$

Oder: $kgV(a,b) := \min \{V(a) \cap V(b)\}$

Kann diese Menge leer sein?

Die Menge $V(a) \cap V(b)$ ist niemals leer, denn sie enthält als kleinstes Element in jedem Fall die natürliche Zahl $a \cdot b$ (genau dann wenn a und b teilfremd).

ggT und kgV

Wie findet man ggT und kgV beliebiger Zahlen a und b?

Verschiedene Wege:

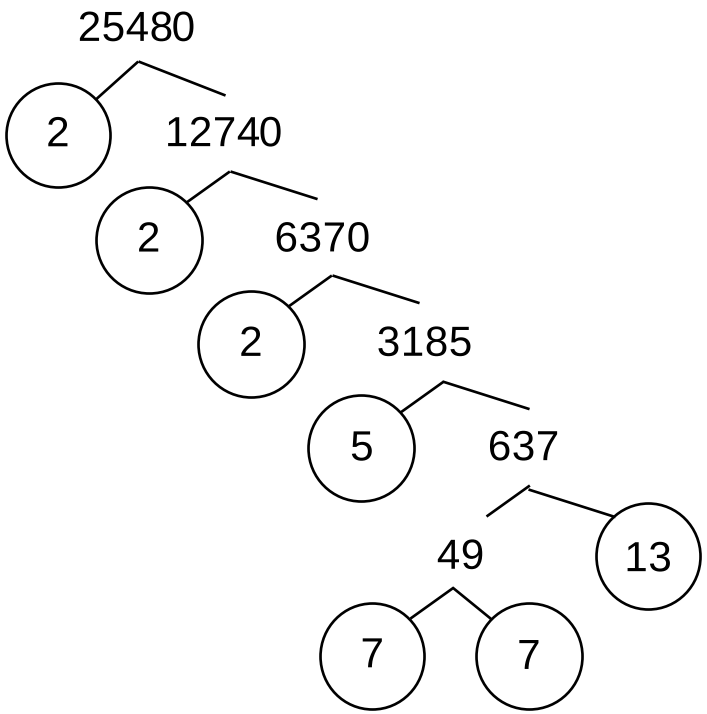
- mit dem Zahlenstrahl
- mithilfe der Teiler- und Vielfachenmengen
- mit den Primfaktorzerlegungen → Alles andere kann unter Umständen sehr langwierig sein!
- mithilfe von Hasse-Diagrammen
- …

ggT und kgV

Primfaktorzerlegung einer Zahl finden

systematisch multiplikativ zerlegen, formal oder anschaulich mit Zerlegungsbaum

$$
\begin{aligned}
25480 &= 2 \cdot 12740 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 6370 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3185 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 637 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13 \\
&= 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13
\end{aligned}
$$



Ermitteln Sie nun selbst die PFZ von 61740

ggT und kgV

mit den Primfaktorzerlegungen ermitteln

Gesucht wird der ggT und das kgV von diesen beiden Zahlen:

$$25480 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 13^1$$

$$61740 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3$$

$$\text{ggT}(25480, 61740) = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 980$$

$$\text{kgV}(25480, 61740) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \cdot 13^1 = 1605140$$

Fällt Ihnen etwas auf?
Wie wurden die PFZen genutzt,
um ggT und kgV zu berechnen?

ggT und kgV

ggT mit den Primfaktorzerlegungen ermitteln

$$25480 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 13^1$$
$$61740 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3$$
$$\text{ggT}(25480, 61740) = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \quad = 980$$

Allgemein:

- Zur Bestimmung des ggT(a,b) mit a, b $\in \mathbb{N}$ bestimmen wir von den beiden Zahlen a und b zunächst die Primfaktorzerlegungen.
- Wir vergleichen anschließend die Primzahlen, die in **beiden** Primfaktorzerlegungen vorkommen.
- Sind bei diesen Primzahlen die Exponenten verschieden, so wählen wir den **kleineren Exponenten**; sind die Exponenten gleich, so wählen wir diesen gleichen Exponenten aus.
- Wir bilden das Produkt dieser so ausgewählten Primzahlpotenzen und erhalten so den ggT(a,b).

ggT und kgV

kgV mit den Primfaktorzerlegungen ermitteln

$$25480 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 13^1$$
$$61740 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3$$
$$\text{kgV}(25480, 61740) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \cdot 13^1$$

Allgemein:

- Zur Bestimmung des kgV(a,b) mit a, b $\in \mathbb{N}$ bestimmen wir von den beiden Zahlen a und b zunächst die Primfaktorzerlegungen.
- Wir betrachten anschließend **alle** Primzahlen.
- Sind bei den Primzahlen die Exponenten verschieden, so wählen wir den **größeren Exponenten**; sind die Exponenten gleich, so wählen wir diesen gleichen Exponenten aus.
- Wir bilden das Produkt dieser so ausgewählten Primzahlpotenzen und erhalten so das kgV(a,b).

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

Diophantische Gleichungen

Knobelaufgaben lösen

Im Stall von Bauer Lindemann sind Kaninchen und Hühner. Der Bauer sagt, dass die Tiere insgesamt 30 Beine haben. Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner könnten es sein?

Diophantische Gleichungen

Knobelaufgaben lösen

Im Stall von Bauer Lindemann sind Kaninchen und Hühner. Der Bauer sagt, dass die Tiere insgesamt 30 Beine haben. Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner könnten es sein?

5 Hühner und 5 Kaninchen
$5 \cdot 4 = 20 + 2 \cdot 5 = 30$

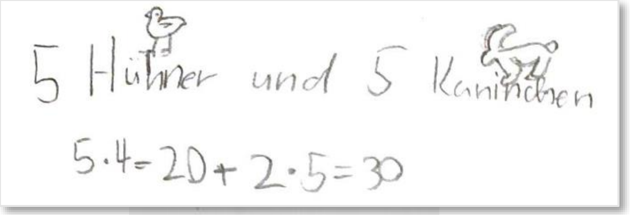
4 Kaninchen und 7 Hühner
$4 \cdot 4 = 16 \quad 14 + 16 = 30 \quad 7 \cdot 2 = 14$

9 Hühner und 3 Kaninchen
$3 \cdot 4 = 12 + 2 \cdot 9 = 18$

Kaninchen	Hühner
1	13
2	11
3	9
4	7
5	5
6	3
7	1

Diophantische Gleichungen

Im Stall von Bauer Lindemann sind Kaninchen und Hühner. Der Bauer sagt, dass die Tiere insgesamt 30 Beine haben. Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner könnten es sein?



Kaninchen	Hühner
1	13
2	11
3	9
4	7
5	5
6	3
7	1

$4 \cdot x + 2 \cdot y = 30$, hier $x, y \in \mathbb{N}$

$4 \cdot 1 + 2 \cdot 13 = 30$

$4 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 30$

$4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 30$

$4 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 30$

$4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 30$

$4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30$

$4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 30$

Was fällt auf?
Warum ist das so?

Bei einer linearen Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$, mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ spricht man von einer diophantischen Gleichung, wenn man sich nur für ganzzahlige Lösungen interessiert (also x und $y \in \mathbb{Z}$).

„Diophantisch“ ist also nicht direkt eine Eigenschaft einer Gleichung, sondern eher eine Perspektive auf eine Gleichung.

Diophantische Gleichungen

Im Stall von Bauer Lindemann sind Kaninchen und Hühner. Der Bauer sagt, dass die Tiere insgesamt 30 Beine haben. Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner könnten es sein?

Finden aller Lösungen

kgV(4,2) = 4
4 ist die kleinste gegensinnige Veränderung zum Erhalt der Konstanz der Summe: Es kommen $1 \cdot 4 = 4$ Kaninchenbeine dazu, gleichzeitig verschwinden $2 \cdot 2 = 4$ Hühnerbeine.

Lösbarkeit

ggT(4,2) = 2
Die linke Seite der Gleichung ist durch 2 teilbar, also gerade. Stände auf der rechten Seite 31 anstatt 30, könnte man auf den ersten Blick erkennen, dass die Gleichung keine Lösung hat.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\ \ {\scriptstyle +1} \qquad\quad {\scriptstyle -2} \\
4 \cdot x + 2 \cdot y = 30, \text{ hier } x, y \in \mathbb{N} \\
4 \cdot 1 + 2 \cdot 13 = 30 \\
4 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 30 \\
4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 30 \\
4 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 30 \\
4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 30 \\
4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30 \\
4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 30
\end{array}
$$

Was fällt auf?
Warum ist das so?

Lösungsmenge:
$L = \{(1,13), (2,11), (3,9), (4,7), (5,5), (6,3), (7,1)\}$

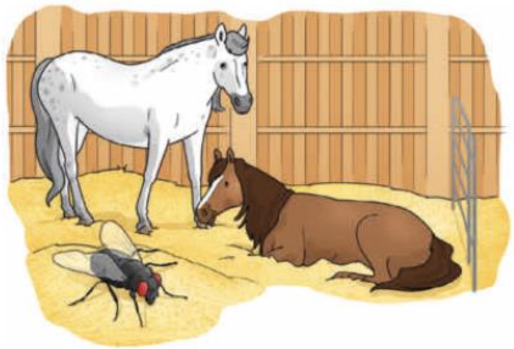
→ Der ggT hilft außerdem zum Finden der ersten Lösung der Gleichung. Darauf gehen wir hier jedoch nicht ein.

Diophantische Gleichungen

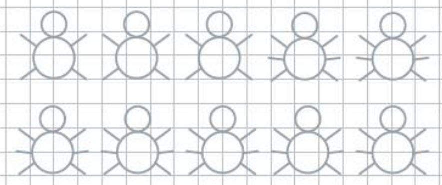
Im Schulbuch

Tabellen und Skizzen

1 In einem Stall werden Pferde und Fliegen gezählt. Es sind 10 Tiere.
Zusammen haben sie 54 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?



Anna:



Antwort:
3 Pferde und 7 Fliegen.

Ich habe für jedes Tier einen Kreis gemalt. Jedes Tier hat mindestens 4 Beine. Dann habe ich noch die restlichen 14 Beine verteilt. Es sind also 7 Fliegen und 3 Pferde.

Anna

Noah:

Anzahl Tiere	Pferdebeine	Fliegenbeine
1	4	6
2	8	12
3	12	18
4	16	24
5	20	30
6	24	36
7	28	42
8	32	48
9	36	54
10	40	60

Lilly:

$5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 50$ 5 Pferde und 5 Fliegen

$4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 52$ 4 Pferde und 6 Fliegen

$3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 54$ 3 Pferde und 7 Fliegen

Metin:

Pferdebeine	Fliegenbeine	gesamt
40	0	40
36	6	42
32	12	44
28	18	46
24	24	48
20	30	50
16	36	52
12	42	54

Wie haben die Kinder überlegt? Vergleicht mit euren Lösungen.

Zahlenbuch 4, S. 116

technische universität
dortmund

Fragen? Vielen Dank!

Literatur

- Padberg, F., & Büchter, A. (2015). Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik. Springer.
- Roth, J. (2024). Didaktik der Algebra, Modul 5a/c. Verfügbar unter: https://www.juergen roth.de/skripte/did_algebra/did_algebra_4_gleichungen.pdf. Zuletzt abgerufen am: 17.08.2024
- Ziegenbalg, J. (2015). Elementare Zahlentheorie. Beispiele, Geschichte, Algorithmen. Springer.

Internetlinks und Schulbücher

- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 4*. Ernst Klett Verlag.
- Arithmetik digital (2024). Gemeinsame Teiler und größter gemeinsamer Teiler (ggt). Verfügbar unter: https://adi.dzlm.de/node/40