Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Michele Serra

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Aufgabe 1) (Sattelpunkt)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Funktion zweier Variablen. Wir untersuchen heuristisch das Phänomen, wo es einen Punkt gibt, wo beide partielle Ableitungen verschwinden, der aber weder ein Maximum noch ein Minimum ist.
Sei $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S(x, y) = x^2 - y^2.$$

(a) Finden Sie alle Punkte wo beide Ableitungen verschwinden, also $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sodass

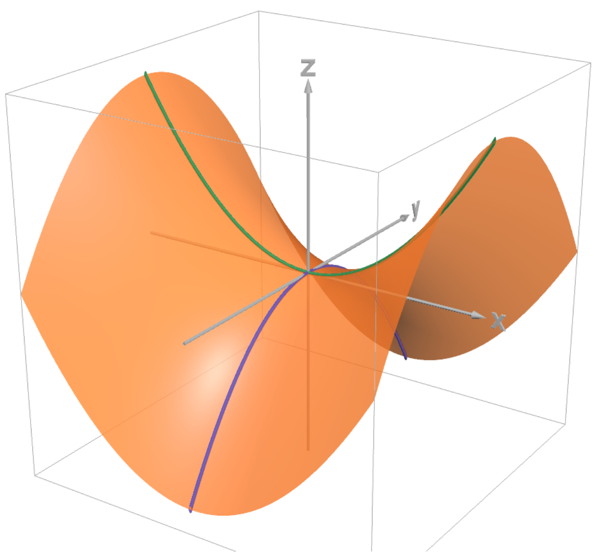
$$\frac{d}{dx}S(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}S(x_0, y_0) = 0$$

(b) Betrachten Sie die Funktionen

$$\begin{cases} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = S(x, 0) \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(y) = S(0, y) \end{cases}$$

Was können Sie über das Verhalten von f in x_0 aussagen? Und von g in y_0?

(c) Wir sehen, dass sich der Punkt (x_0, y_0) wie ein Minimum verhält, wenn wir uns lengst der y-Achse bewegen, und wie ein Maximum, wenn wir uns lengst der x-Achse bewegen. Ein solcher Punkt heißt *Sattelpunk*. Solche Problemen sind Typisch im Treffpunkt der Analysis und der Differentialgeometrie.



Aufgabe 2) (Lineare Algebra – Aufwärmung I)

(a) Seien folgende drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Gibt es ein Tripel x, y, z von reellen Zahlen, sodass

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$$

gilt?

ii) Wieviele solche Tripel gibt es?

iii) Finden Sie **alle** Tripel x, y, z von reellen Zahlen, sodass

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$$

gilt.

(b) Seien nun folgende drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Gibt es ein Tripel x, y, z von reellen Zahlen, sodass

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

gilt?

ii) Wieviele solche Tripel gibt es?

iii) Finden Sie **alle** Tripel x, y, z von reellen Zahlen, sodass

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

gilt.

Aufgabe 3) (Lineare Algebra – Aufwärmung II)

Orthogonale Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zwei Vektoren.

- Das *Skalarprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$* ist definiert durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_j y_j$.
- Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ heißen *orthogonal*, falls $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ gilt. In diesem Fall schreibt man aucn $\vec{x} \perp \vec{y}$.

(a) Mit der Notation von Aufgabe 2), entscheiden Sie ob die folgende Behauptungen wahr oder falsch sind:

i) $\vec{u} \perp \vec{v}$ ii) $\vec{u} \perp \vec{w}$ iii) $\vec{a} \perp \vec{b}$ iv) $\vec{b} \perp \vec{c}$

(b) Angenommen $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ seien drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \perp \vec{z}$ und $\vec{y} \perp \vec{z}$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \perp \vec{z}$$

gilt.

Bonusaufgabe)

Binomialkoeffizient

Für zwei natürliche Zahlen n, k ist das *Binomialkoeffizient* definiert als:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Für $n = 0$ oder $k = 0$ setzen wir $\binom{n}{k} = 1$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{2}{1}x^2y^1 + \binom{1}{2}x^1y^2 + \binom{0}{3}x^0y^3$

(b) Im allgemeinen gilt, für jede natürliche Zahl n

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{x} x^{n-k} y^k$$

Hinweis: dies kann "kombinatorisch" gezeigt werden, oder anhand des "Induktionsprinzips".