technische universität
dortmund

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

# Vorkurs VL 6
# Potenzen und Wurzeln

# Ein anderes Beispiel



Warum mal im Baumdiagramm?

## Die Spielregeln

**1.) Ihr entscheidet euch für eine *Variante*:**

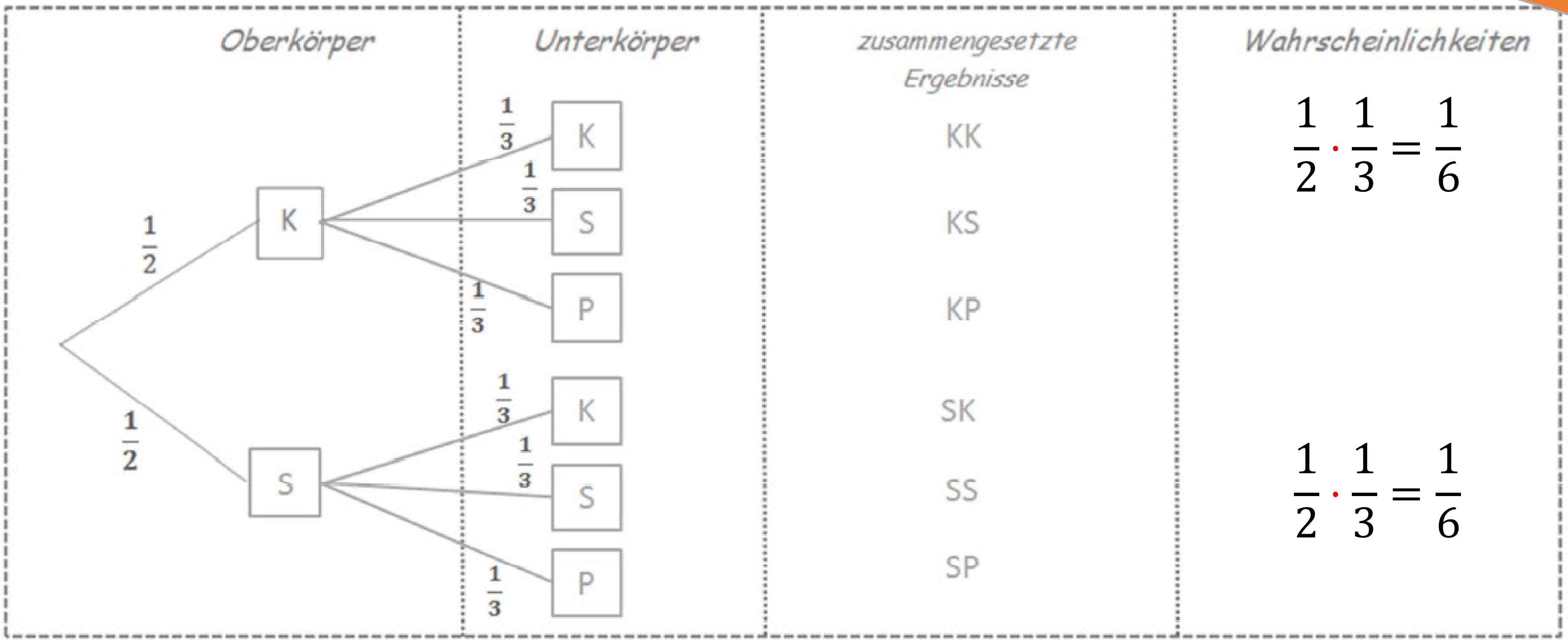
***Risikovariante***
**Ihr sagt, dass ihr einen ‚vollen Kempen' aufdecken werdet. Wenn ihr das schafft, gewinnt ihr ein MilkyWay.**

***Sicherheitsvariante***
**Ihr sagt, dass ihr einen ‚vollen Mathelehrer' aufdecken werdet. Wenn ihr das schafft, gewinnt ihr ein Maoam.**

**2.) Ihr deckt erst einen Oberkörper auf und danach einen Unterkörper!**

# Die Pfadregeln

Warum mal im Baumdiagramm?




$P(KK) = \frac{1}{6}$ $\quad\quad$ $P(SS) = \frac{1}{6}$

„Ganzer Lehrer“: $P(KK)\ oder\ P(SS) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Potenzen und Wurzeln
2. Binomische Formeln
3. Summen und Produkte

# Laufende Fragensammlung

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

# Potenzen & Wurzeln im Lehrplan

Gesamtschule Klasse 7/8

*Inhaltliche Schwerpunkte:*

- Grundrechenarten: Multiplikation und Division von Brüchen
- Zahlbereichserweiterung: rationale Zahlen
- Term und Variable: Variable als Veränderliche, als Platzhalter sowie als Unbekannte, Termumformungen
- Gesetze und Regeln: Vorzeichenregeln, Rechengesetze für rationale Zahlen, **binomische Formeln**
- Lösungsverfahren: algebraische Lösungsverfahren linearer Gleichungen

Gesamtschule Klasse 9/10

*Inhaltliche Schwerpunkte:*

- Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen
- Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln
- Gesetze und Regeln: Potenzieren und Radizieren, **Potenzgesetze**
- Lösungsverfahren und Algorithmen:
  Für G-Kurs: Lösen rein quadratischer Gleichungen
  **algorithmisches Näherungsverfahren, Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen (quadratische Ergänzung, p-q-Formel), algebraische und graphische Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen, Lösen von Exponentialgleichungen der Form $b^x = c$ durch systematisches Probieren**

Abseits von den Wurzelgesetzen: Wo und wie nutzen Sie Potenzen und Wurzeln in der Mathematik?

# Potenzen und Wurzeln

**Definition *Potenzen*:**

Für eine (reelle) Zahl $a$ und eine natürliche Zahl $n$ definiert man die $n$-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$.
Dabei heißt $a$ die Basis und $n$ der Exponent.

Exponent

$$a^n$$

Basis

*Bemerkung*

Man kann Potenzen auch als Kurzschreibweise für Produkte aus gleichen Faktoren ansehen. Der Faktor wird dabei als Basis geschrieben und die Anzahl gleicher Faktoren in den Exponenten eingetragen.

# Potenzen und Wurzeln

## Potenzgesetze

Für positive reelle Zahlen a, b und ganze Zahlen m, n gilt:

(P1a) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(P1b) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(P2a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(P2b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(P3) $(a^n)^m = a^{nm}$

***Spezialfälle***

1. Für alle reellen Zahlen a gilt: $a^0 := 1$
2. Für eine negative Zahl –n gilt: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$.

# Potenzen und Wurzeln

- Im Schulbuch

MB 10 Wissensspeicher – Rechnen mit Potenzen Zahlen 5

Wissensspeicher Rechnen mit Potenzen

So heißen die Teile einer Potenz

$5^3 = 125$

Zahl und Maß

**So vereinfacht man Potenzen mit verschiedenen Basen**

$7^5 \cdot 3^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) = \_\_\_\_\_$

allgemein: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$7^5 \cdot 3^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot 7^{\square} = \_\_\_\_\_$

Bei der Summe von Potenzen gibt es keine einfache Regel was mit dem Exponenten passiert:
$7^{10} + 7^8$: Das könnte man beispielsweise so umformen: $7^8 \cdot 7 \cdot 7 + 7^8 \cdot 1 = 7^8 \cdot (7 \cdot 7 + 1) = 7^8 \cdot 50$
$7^5 + 8^5$: Es gibt für $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ keine Vereinfachung.

**Potenzen mit Variablen**

$a^2 \cdot a^5$ (denken: $a \cdot a \quad \cdot \quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$) $= \_\_\_\_\_$

$a^2 \cdot a^{-5}$ (denken: $\frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$) $= \_\_\_\_\_$

$x^2 \cdot y^3 \cdot x^5 \cdot y^4$ (denken: $x \cdot x \quad \cdot \quad y \cdot y \cdot y \quad \cdot \quad x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \quad \cdot \quad y \cdot y \cdot y \cdot y$) $= \_\_\_\_\_$

Kurzes Eindenken ins Vereinfachen von Termen: Bearbeiten Sie die beiden Aufgaben links.

# Potenzen und Wurzeln

- Im Schulbuch



Wissensspeicher Rechnen mit Potenzen

So heißen die Teile einer Potenz

$5^3 = 125$

Zahl und Maß

### So vereinfacht man Potenzen mit verschiedenen Basen

$7^5 \cdot 3^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) =$ $21^5 = 85.766.121$

allgemein: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$7^5 \cdot 3^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot 7^{\boxed{2}} =$ $21^3 \cdot 7^2$ $= 9261 \cdot 49 = 453789$

Bei der Summe von Potenzen gibt es keine einfache Regel was mit dem Exponenten passiert:
$7^{10} + 7^8$: Das könnte man beispielsweise so umformen: $7^8 \cdot 7 \cdot 7 + 7^8 \cdot 1 = 7^8 \cdot (7 \cdot 7 + 1) = 7^8 \cdot 50$
$7^5 + 8^5$: Es gibt für $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ keine Vereinfachung.

### Potenzen mit Variablen

$a^2 \cdot a^5$ (denken: $a \cdot a \quad \cdot \quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$) = $a^7$

$a^2 \cdot a^{-5}$ (denken: $\frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$) = $\frac{1}{a^3}$

$x^2 \cdot y^3 \cdot x^5 \cdot y^4$ (denken: $x \cdot x \quad \cdot \quad y \cdot y \cdot y \quad \cdot \quad x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \quad \cdot \quad y \cdot y \cdot y \cdot y$) = $x^7 \cdot y^7$

# Potenzen und Wurzeln – auch bei der Zinsrechnung relevant?

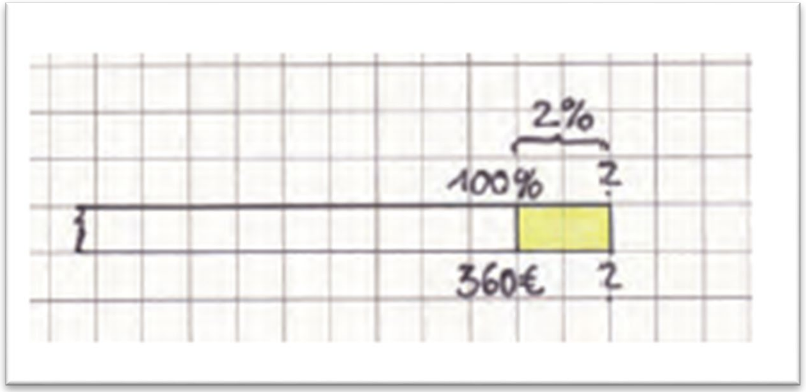
Ein Kapital von 63000 € wird 6 Jahre lang mit einem festen Zinssatz von 5,3 % verzinst.

Die Zinsen werden mitverzinst. Berechnen Sie das Kapital am Ende des sechsten Jahres.

# Zinsrechnung verstehen

Wiederholung aus VL 5

Prozentstreifen




Minitabelle

| Anteil | Wert |
|---|---|
| 1% | |
| 2% | |
| 100% | 360€ |
| 102% | |

b

Pfeilbild

| Start | | Nach einem Jahr |
|---|---|---|
| 360 | $\cdot 1{,}02$ → | |

Zinssatz
Zinsfaktor
Grundwert
Tilgung
Restschuld

# Potenzen und Wurzeln

Ein Kapital von 6300 € wird 6 Jahre lang mit einem festen Zinssatz von 5,3 % verzinst.
Die Zinsen werden mitverzinst. Berechne das Kapital am Ende des sechsten Jahres.

| Start | | Nach einem Jahr | | Nach zwei Jahren | | Nach drei Jahren | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6300 | $\cdot 1{,}053 \rightarrow$ | 6633,90 | $\cdot 1{,}053 \rightarrow$ | 6985,50 | $\cdot 1{,}053 \rightarrow$ | 7355,73 | $\cdot 1{,}053 \rightarrow$ |

| Nach vier Jahren | | Nach fünf Jahren | | Nach sechs Jahren |
|---|---|---|---|---|
| 7745,58 | $\cdot 1{,}053 \rightarrow$ | 8156,10 | $\cdot 1{,}053 \rightarrow$ | 8588,37 |

Was hat das mit Potenzen zu tun?

# Potenzen und Wurzeln

Ein Kapital von 6300 € wird 6 Jahre lang mit einem festen Zinssatz von 5,3 % verzinst. Die Zinsen werden mitverzinst. Berechne das Kapital am Ende des sechsten Jahres.

6 mal mit dem gleichen Faktor multipliziert → das kann man eleganter lösen

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$q = 1 + p/100$

Also: $K_6 = 6300 \cdot (1+0{,}053)^6$

$\iff K_6 = 6300 \cdot 1{,}36$

$\iff 8588{,}37$

Nach sechs Jahren

| |
|---|
| 8588,37 |

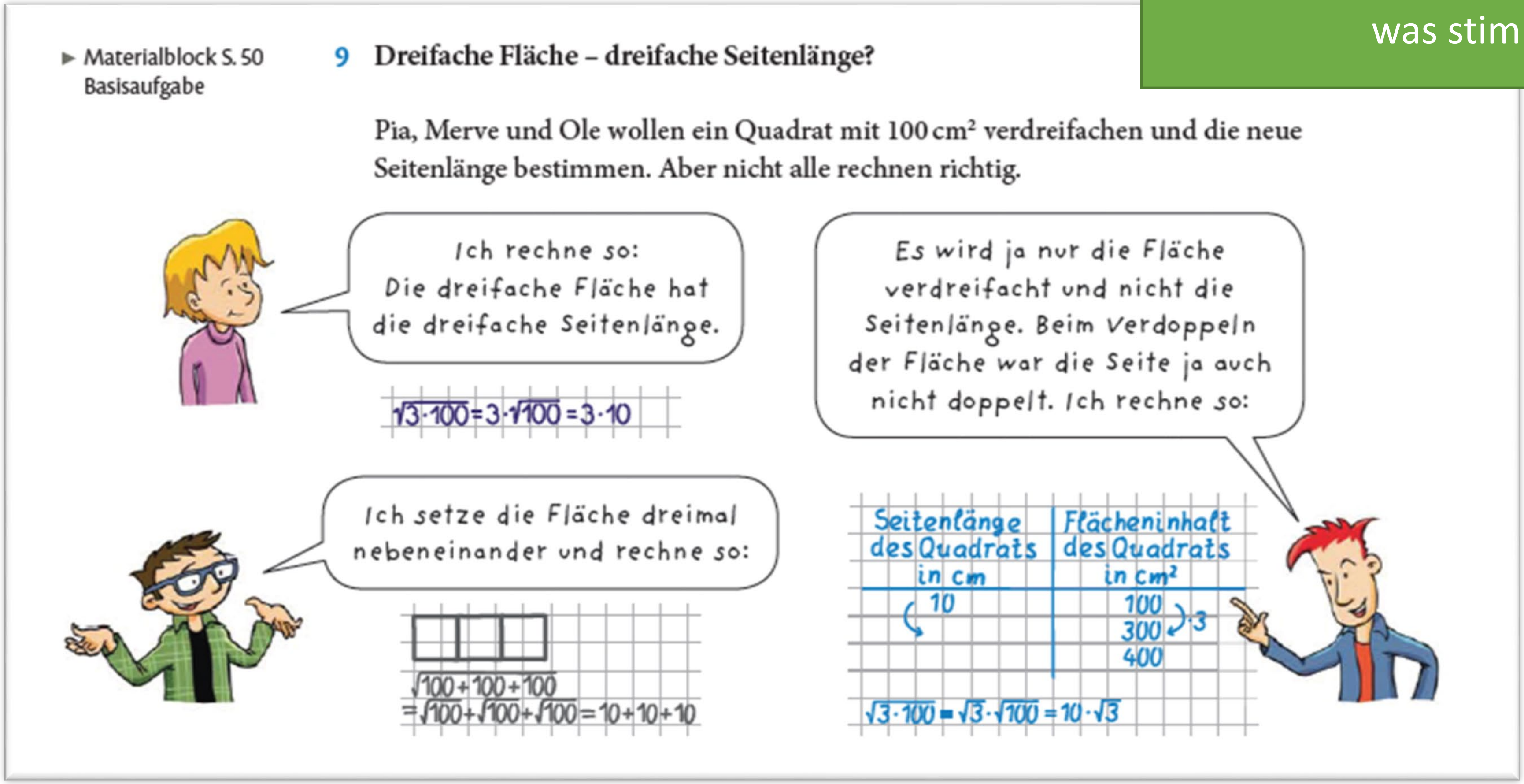
Was sind $K_n$, $K_0$ und $q^n$ ?

Was hat das mit Potenzen zu tun?

# Potenzen und Wurzeln

Ein Quadrat mit einer Fläche von 100cm$^2$ soll verdreifacht werden. Wie lang ist die neue Seitenlänge?

Überlegen Sie zunächst selbst: wie würden Sie vorgehen?
Schauen Sie sich dann noch einmal die Lösungen von Pia, Merve und Ole an. Wie gehen die drei vor und was stimmt?



▸ Materialblock S. 50
Basisaufgabe

**9 Dreifache Fläche – dreifache Seitenlänge?**

Pia, Merve und Ole wollen ein Quadrat mit 100 cm² verdreifachen und die neue Seitenlänge bestimmen. Aber nicht alle rechnen richtig.

Ich rechne so:
Die dreifache Fläche hat die dreifache Seitenlänge.

$\sqrt{3\cdot 100} = 3\cdot\sqrt{100} = 3\cdot 10$

Ich setze die Fläche dreimal nebeneinander und rechne so:

$\sqrt{100+100+100}$
$= \sqrt{100}+\sqrt{100}+\sqrt{100} = 10+10+10$

Es wird ja nur die Fläche verdreifacht und nicht die Seitenlänge. Beim Verdoppeln der Fläche war die Seite ja auch nicht doppelt. Ich rechne so:

| Seitenlänge des Quadrats in cm | Flächeninhalt des Quadrats in cm² |
|---|---|
| 10 | 100 |
| | 300 |
| | 400 |

$\cdot 3$

$\sqrt{3\cdot 100} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{100} = 10\cdot\sqrt{3}$

# Potenzen und Wurzeln

**Definition *Wurzel*:**

Die *n*-te Wurzel aus der nichtnegativen Zahl *a* ist diejenige nichtnegative Zahl, die potenziert mit *n* wieder die Zahl *a* ergibt.

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[n]{a} \qquad \mid \text{potenzieren mit } n \\
\Leftrightarrow x^n &= a
\end{aligned}
$$

Die Zahl *n* heißt der Wurzelexponent. *a* nennt man den Radikand.

Wurzelexponent

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Wurzel(wert)

Radikand

# Potenzen und Wurzeln

## Übung aus dem Schulbuch

| Regel, die geprüft werden soll | Beispiel mit Zahlen | Wert des Terms links | Wert des Terms rechts | Stimmt die Regel für alle positiven Zahlen? nein | vielleicht |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a\cdot b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ | $\sqrt{16\cdot 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16}\cdot\sqrt{9}$ | $\sqrt{16\cdot 9} =$ | $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9} =$ | | |
| $\sqrt{a:b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a}:\sqrt{b}$ | $\sqrt{16:9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16}:\sqrt{9}$ | | | | |
| $\sqrt{a+b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a}+\sqrt{b}$ | $\sqrt{16+9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16}+\sqrt{9}$ | | | | |
| $\sqrt{a-b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a}-\sqrt{b}$ | $\sqrt{16-9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16}-\sqrt{9}$ | | | | |
| | | | | | |



Überprüfen Sie selbst: stimmt die Regel?

# Potenzen und Wurzeln

## Wurzelgesetze

Für positive reelle Zahlen *a, b* und ganze Zahlen m, n gilt:

(W1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

(W2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(W3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

*Bemerkung (Zusammenhang Wurzel und Potenz)*

Wurzelziehen als Potenzieren mit einer rationalen Zahl x = $\frac{m}{n}$ :

Für Potenzen und Wurzeln mit einer positiven (reellen) Zahl a und zwei natürlichen Zahlen *n, m* gilt:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

# Potenzen und Wurzeln

## Achtung

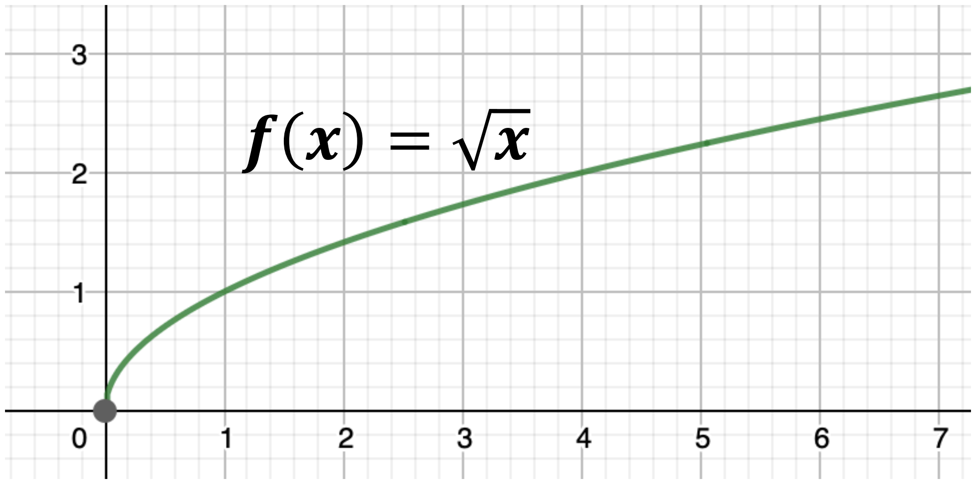
Die Umkehrung von Wurzel und Potenz ist bei geraden Wurzelexponenten nicht eindeutig.

z.B. gilt $(-2)^2 = 4 = 2^2$

Was ist also $\sqrt{4}$?

Die Wurzel, als **Funktion** aufgefasst, ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.

Demnach ist $\sqrt{4}$ 2 = und nicht $\sqrt{4} = \pm 2$



# Potenzen und Wurzeln

## Potenzieren und Wurzelziehen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $\dfrac{2x^4 \cdot 5x^6}{4y^9} : \dfrac{5x^2 \cdot 4x^3}{8y^8}$

b) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{20} + 2\sqrt{45}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$

# Potenzen und Wurzeln

## Lösungen

a) $\dfrac{2x^4 \cdot 5x^6}{4y^9} : \dfrac{5x^2 \cdot 4x^3}{8y^8}$

$$= \frac{2x^4 \cdot 5x^6 \cdot 8y^8}{4y^9 \cdot 5x^2 \cdot 4x^3}$$

$$= \frac{x^4 \cdot x^6 \cdot y^8}{y^9 \cdot x^2 \cdot x^3} \qquad (P2\ a)$$

$$= \frac{x^{10} \cdot y^8}{y^9 \cdot x^5} \qquad (P2b)$$

$$= \frac{x^5}{y^1}$$

b) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{20} + 2\sqrt{45} \qquad \mathit{Distributivgesetz}$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{20} + 2\sqrt{45}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{4 \cdot 5} + 2\sqrt{5 \cdot 9} \qquad (W1)$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}$$

$$= \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \cdot 3 \qquad \mathit{Kommutativgesetz}$$

$$= \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} + 6\sqrt{5} \qquad \mathit{Distributivgesetz}$$

$$= 9 \cdot \sqrt{5}$$

# Potenzen und Wurzeln

## Lösungen

c) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} \quad (W1)$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$$

$$= \frac{5}{1} \cdot \frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} \quad (W2)$$

$$= \frac{5}{1} \cdot \sqrt[4]{\frac{96}{6}}$$

$$= 5 \cdot \sqrt[4]{16}$$

$$= 10$$

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Potenzen und Wurzeln
2. Binomische Formeln
3. Summen und Produkte

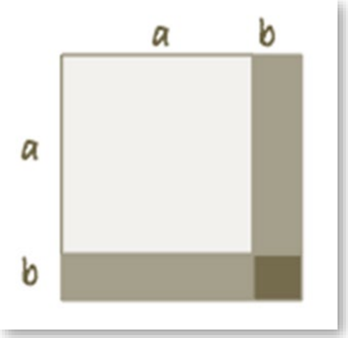
# Binomische Formeln visualisieren

Wiederholung aus VL 5

Zeigen Sie im Malkreuz und im Bild:

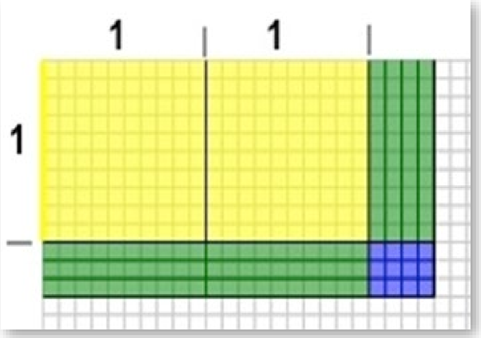
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

| | a | b | |
|---|---|---|---|
| a | | | |
| b | | | |
| | | | $a^2+2ab+b^2$ |




$$1{,}3 \cdot 2{,}4$$

| | 2 | 0,4<br>4 Zehntel | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 0,3<br>3 Zehntel | | | |
| | | | |

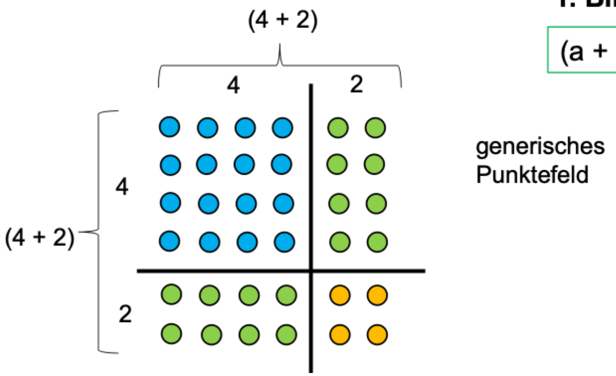



Was hat das mit dem Stellenwertsystem zu tun?

# 1. Binomische Formel

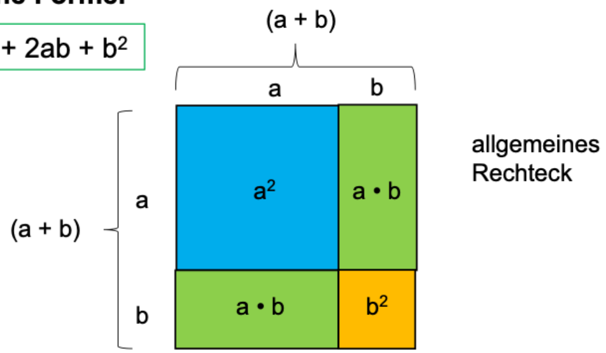
1. Binomische Formel

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

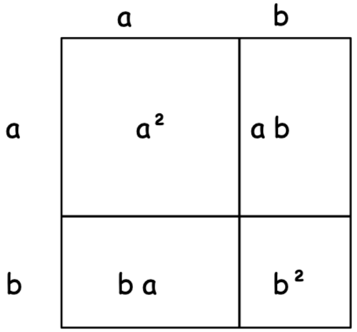



**1. Binomische Formel**

$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$




**1. Binomische Formel**



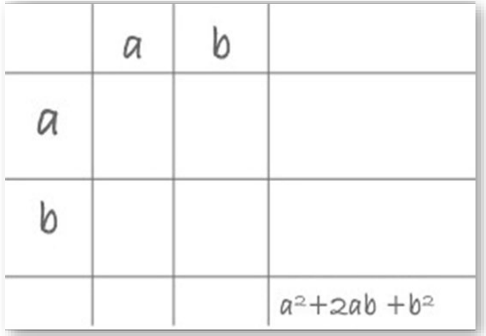

| · | a | b |
|---|---|---|
| a | $a^2$ | ab |
| b | ba | $b^2$ |

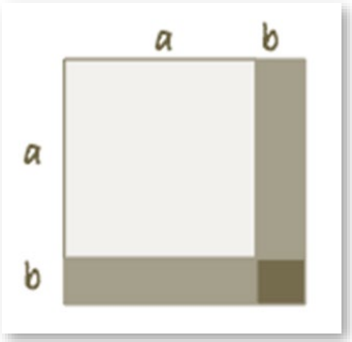
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

# Binomische Formeln visualisieren

Zeigen Sie im Malkreuz
und im Bild:

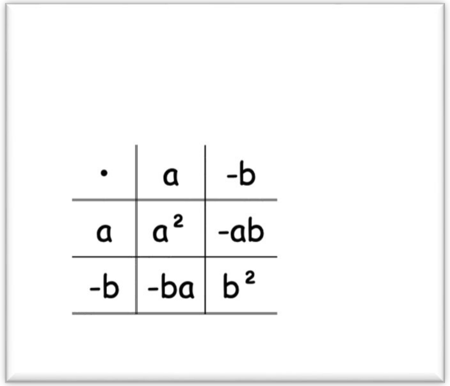
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

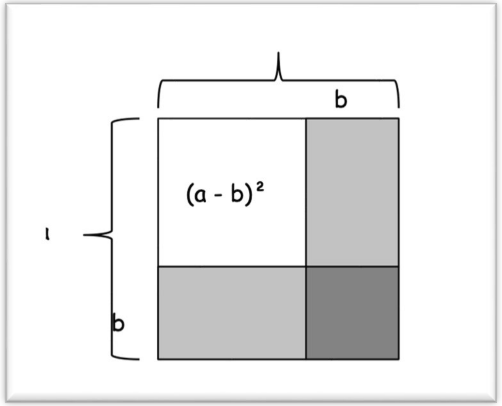



Überlegen Sie analog nun
auch für die 2. binomische
Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



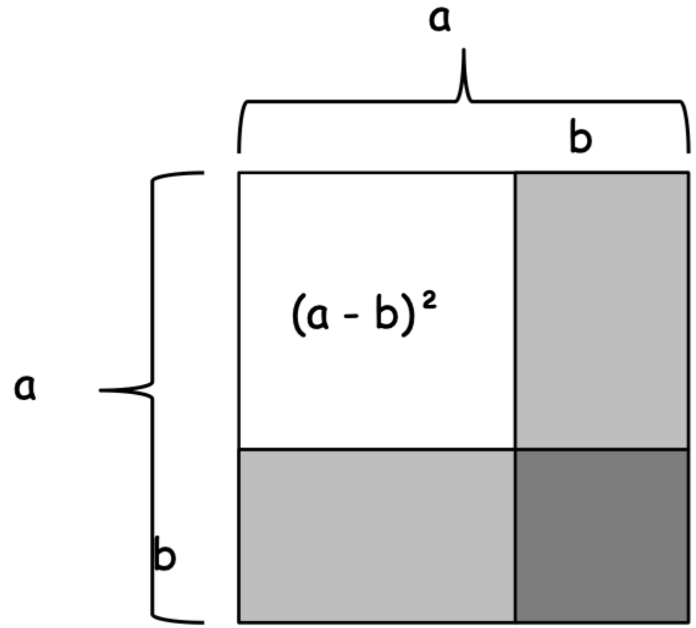



# Binomische Formeln

2. Binomische Formel

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**2. Binomische Formel**



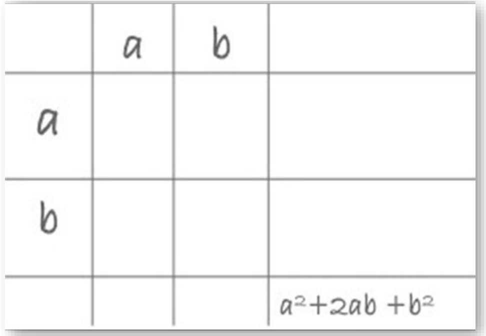

| $\cdot$ | $a$ | $-b$ |
| --- | --- | --- |
| $a$ | $a^2$ | $-ab$ |
| $-b$ | $-ba$ | $b^2$ |

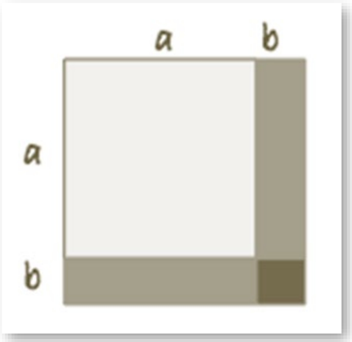
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

# Binomische Formeln visualisieren

Zeigen Sie im Malkreuz und im Bild:

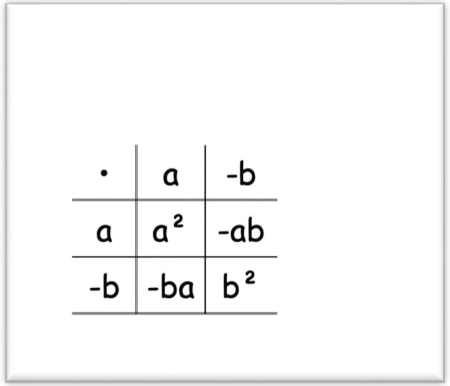
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

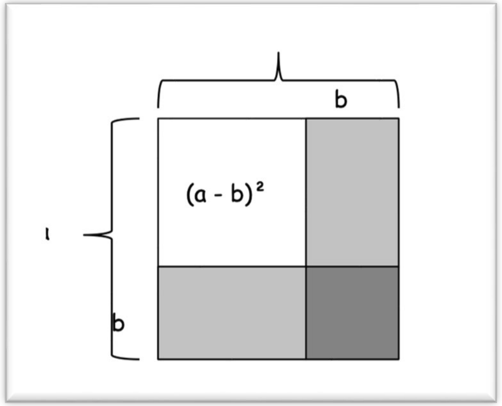



Überlegen Sie analog nun auch für die 2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$




… und für die dritte?

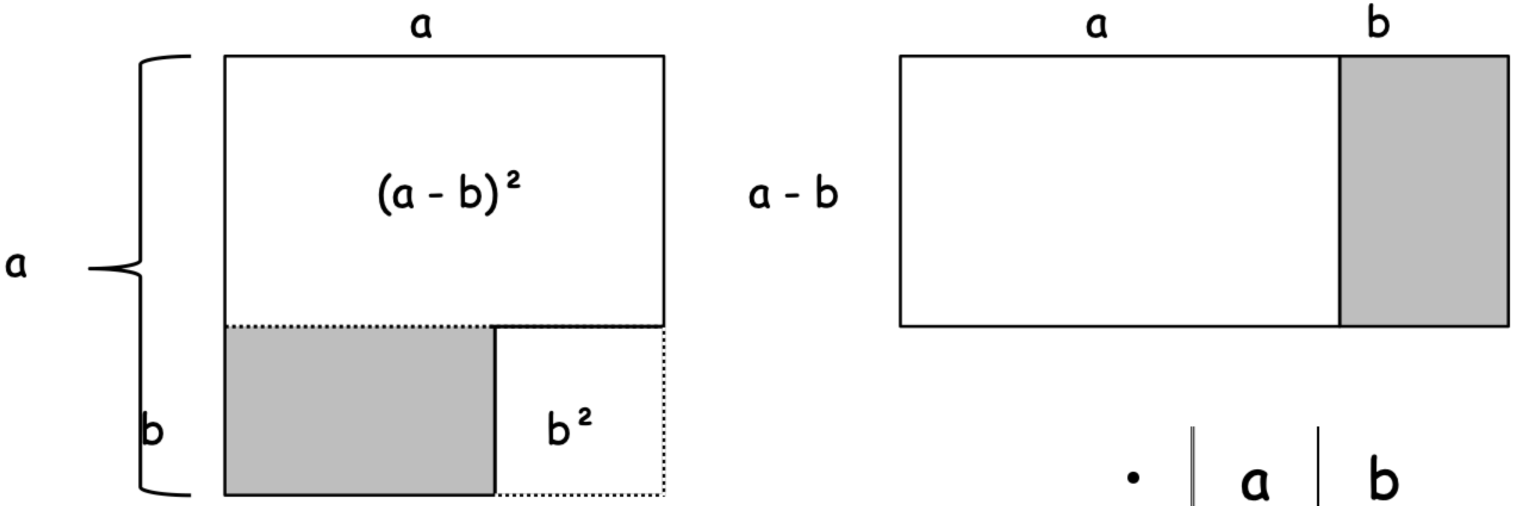
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

# Binomische Formeln

3. Binomische Formel

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

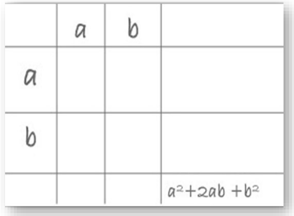
**3. Binomische Formel**

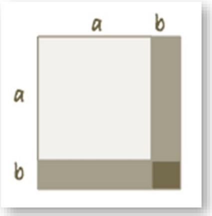



$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

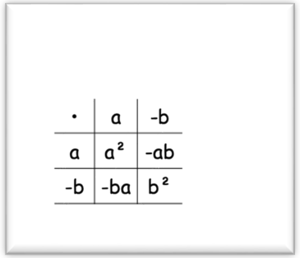
| $\cdot$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a^2$ | $ab$ |
| $-b$ | $-ba$ | $-b^2$ |

# Binomische Formeln visualisieren

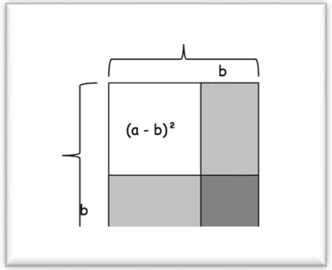


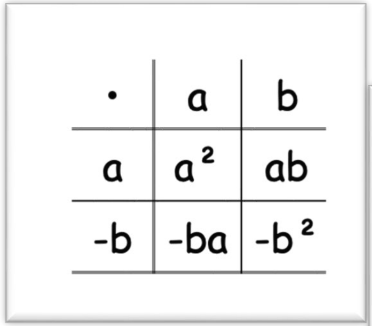

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



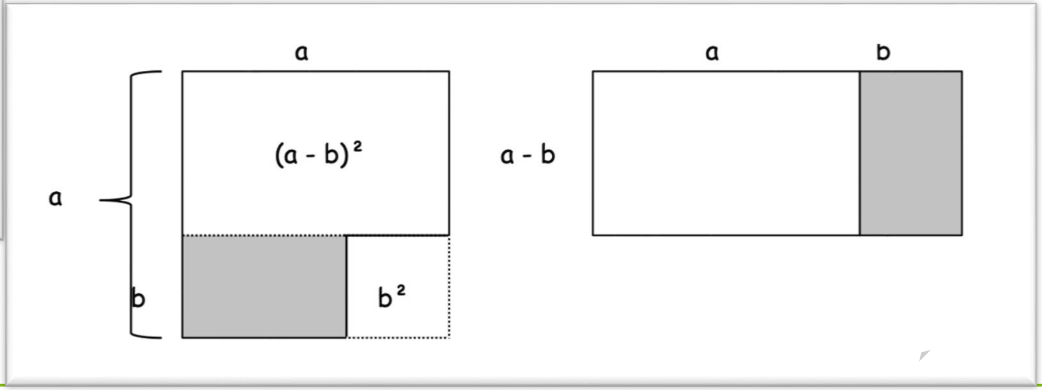
| · | a | -b |
|---|---|---|
| a | $a^2$ | -ab |
| -b | -ba | $b^2$ |




$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



| · | a | b |
|---|---|---|
| a | $a^2$ | ab |
| -b | -ba | $-b^2$ |




$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

# Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Organisation
2. Potenzen und Wurzeln
3. Binomische Formeln
4. Summen und Produkte

# Summen und Produkte

**Definition *Summe*:**

Das Summenzeichen ist wie folgt definiert:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

Hierbei heißt die natürliche Zahl i der Index (Pl: Indizes) des Objekts.

*Beispiele*

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=0}^{3} \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}.$$

# Summen und Produkte

**Definition *Produkt*:**

Das Produktzeichen ist wie folgt definiert:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n.$$

Hierbei heißt i der Index (PI: Indizes).

*Beispiele*

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$$

$$\prod_{i=0}^{3} (i+1)^2 = (0+1)^2 \cdot (1+1)^2 \cdot (2+1)^2 \cdot (3+1)^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576$$

# Summen und Produkte

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summen bzw. Produkte:

a) $\sum_{k=0}^{3} 2^k$ b) $\sum_{n=5}^{10} (2n+1)$ c) $\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{i}$

# Summen- und Produktzeichen

Lösungen

*a)* $\sum_{k=0}^{3} 2^k = 20 + 21 + 22 + 23 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

*b)* $\sum_{n=5}^{10}(2n + 1) = (2 \cdot 5 + 1) + (2 \cdot 6 + 1) + (2 \cdot 7 + 1) + (2 \cdot 8 + 1) + (2 \cdot 9 + 1) + (2 \cdot 10 + 1)$

$= 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 96$

*c)* $\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

# Summen und Produkte

Finden Sie eine kompakte Schreibweise mit dem Summen- oder Produktzeichen für die folgenden Terme:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$
b) $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16$
c) $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17$

# Summen und Produkte

Lösungen

$$a)\quad 1+3+5+7+9 \;=\; \sum_{k=1}^{5} 2\cdot k-1$$

$$b)\quad 1\cdot 4\cdot 9\cdot 16 = \prod_{k=1}^{4} k^2$$

$$c)\quad 2+5+8+11+14+17 \;=\; \sum_{i=0}^{5} 2+3i$$

# Summen und Produkte

**Definition *Fakultät*:**

Die Fakultät ist wie folgt definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n - 1 \cdot n$$

alternative Produktschreibweise:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

***Spezialfall***

$0! = 1$

# Fragen? Vielen Dank!

# Literatur