Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Michele Serra

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Aufgabe 1) (Konvexität und Absolutbeträge)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ B(x) = |x|$ eine konvexe Funktion ist;

(?) Nach der letzten Teilaufgabe bietet sich die Frage an, ob der Absolutbetrag einer *beliebigen* Funktion immer eine konvexe Funktion ist. Genauer ausgedrückt: sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definiere eine neue Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |f(x)|$. Ist g eine konvexe Funktion?

Die nächste Teilaufgabe beantwortet diese Frage.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |5 - |x - 2||$ keine konvexe Funktion ist.

Aufgabe 2) (Rechenaufgabe)

In der Vorlesung wurde das Problem der Minimierung des quadratischen Fehlers

$$Q(a,c) = \sum_{j=1}^{N} (at_j + c - r_j)^2$$

behandelt. Dabei wurden folgende Ausdrücke definiert

$$D_a := 2\sum_{j=1}^{N} (a_0 t_j^2 + c_0 t_j - r_j t_j)$$

$$D_c := 2\sum_{j=1}^{N} (a_0 t_j + c_0 - r_j)$$

Zeigen Sie ohne Verwendung von Ableitungen, dass Wenn man die Werte a_0, c_0 (vgl. die Formel ($\mathbf{a_0}$) und ($\mathbf{c_0}$) in der Synopse zur 6. Vorlesung) in die Formel fur D_a und D_c einsetzt, sich Null ergibt.

Definition der Ableitung

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

($h \neq 0$ ist implizit in der Schreibweise $h \to 0$) Hintergrund zu Limiten (Grenzwerte) und ihre Rolle in der Differenziation findet man in
cramer.

Aufgabe 3) (Beweisaufgabe)

Vorbereitung: Lesen Sie **cramer** zum Verhältniss des Limes bezüglich Summen, Produkten usw.

Anhand der obigen Definition von Ableitung beweisen Sie die Produktenregel, d.h., zeigen Sie folgendes:
Für alle (differenzierbare) Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$$

Erinnerung: Varianz und Standardabweichung

$$\mathrm{Var}(t) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j\right)^2$$

ist die *Varianz* des Datensatzes

$$(t_1, t_2, \cdots, t_N)$$

Dessen Standardabweichung ist

$$\sqrt{\mathrm{Var}(t)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j\right)^2}$$

Aufgabe 4)

Sei ein Datensaz

$$(t_1, t_2, \cdots, t_N)$$

gegeben. Bestimmen Sie, wie sich die Varianz (und daher die Standardabweichung) ändert, wenn wir den Datensatz um eine Konstante verschieben (*translatieren*) oder skalieren. Genauer ausgedrückt:

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zwei feste reelle Zahlen, mit $\beta \neq 0$.
Berechnen Sie die Varianzen

(a) $\mathrm{Var}(t+\alpha)$ des Datensatzes $(t_1+\alpha, t_2+\alpha, \cdots, t_N+\alpha)$ und

(b) $\mathrm{Var}(\beta t)$ des Datensatzes $(\beta t_1, \beta t_2, \cdots, \beta t_N)$;

(c) Was ist die Beziehung zwischen $\mathrm{Var}(t)$ und $\mathrm{Var}(t+\alpha)$?

(d) Was ist die Beziehung zwischen $\mathrm{Var}(t)$ und $\mathrm{Var}(\beta t)$?

(e) Was passiert, wenn man um $\beta = 0$ skaliert?