technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Michele Serra

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Monotone Funktionen

Seien $D, W \subset \mathbb{R}$ Teilmenge von R und sei $f\colon D \to W$ eine Funktion. Dann heißt f

- **monoton wachsend** oder **isoton** falls, für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **streng monoton wachsend** oder **streng isoton** falls, für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- **monoton fallend** oder **antiton** falls, für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **streng monoton fallend** oder **streng antiton** falls, für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- f heißt einfach **monoton** wenn sie isoton oder antiton ist.

Hintergrund zur Monotonie finden Sie in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitt 5.5.

Aufgabe 1) (Monotonie)

Es seien folgende Funktionen gegeben

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$;
ii) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = |x|$;
iii) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 3$;
iv) $T\colon [0,3) \to \mathbb{R}, \quad T(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1); \\ 1 & \text{für } x \in [1,2); \\ 2 & \text{für } x \in [2,3). \end{cases}$
v) $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \sin(x)$

(a) Bestimmen Sie, ob die obige Funktionen mit den gegebenen Definitions- und Wertbereichen monoton sind, und falls ja, ob sie iso- oder antiton sind.

(b) Wie ändert sich die Monotonie, wenn man die Definitionsbereiche folgendermassen wählt?

i) $f\colon (-\infty, 9) \to \mathbb{R}$;
ii) $g\colon [0,4) \to \mathbb{R}$ oder $g\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$;
iii) $h\colon [-\pi, e^2] \to \mathbb{R}$;
iv) $T\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ oder $T\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
v) $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

Aufgabe 2) (Monotonie und Logik der Implikationen)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Bestimmen Sie welche Implikationen zwischen den unten stehenden Aussagen gelten. Sie dürfen auch Aussagen mit "und" oder "oder" zusammen kombinieren, z.B.: (i)&(ii)⇒(v); (vi)⇒(ix)

i) f ist streng antiton für alle $x \leq x_0$;

ii) f ist streng isoton für alle $x > x_0$;

iii) f ist antiton für alle $x \in \mathbb{R}$;

iv) f ist eine konstante Funktion;

v) in $x = x_0$ liegt ein striktes minimum von f vor;

vi) in $x = x_0$ liegt ein minimum der Funktion f vor;

vii) in $x = x_0$ liegt ein globales minimum von f vor;

viii) f ist isoton für alle $x \in \mathbb{R}$;

ix) $f'(x_0) = 0$;

x) $f''(x_0) > 0$;

xi) $f''(x_0) < 0$;

xii) $f''(x_0) \neq 0$;

xiii) f besitzt ein eindeutiges Minimum.

(b) Für die Implikationen, die Sie finden, geben Sie die "duale" Implikation an: z.B. für eine Aussage über Minima geben Sie die analoge Aussage über Maxima an.

Weitere Aufgaben zu den (und zu verbundenen) Themen der letzten Aufgaben finden Sie in E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitt 5.6.

Ableitungen Trigonometrischer Funktionen

wir erinnern Sie daran, dass für die Ableitung Trigonometrischer Funktionen folgende Grundregeln gelten

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x); \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

Aufgabe 3) (Mehr über Ableitungen)

Betrachten Sie die folgende Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, für eine passende Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$:

i) $f(x) = \sin\left(x^{-1}\right)$;

ii) $f(y) = (\sin(y))^{-1}$;

iii) $f(t) = \cos(t^2 - 2t - 1)$;

iv) $f(z) = \cos(-t^4 + z^2 - 3z - 2t)$, für ein festes $t \in \mathbb{R}$;

v) $f(x) = \sum_{j=0}^{N} \cos(jx)^j$, für eine natürliche Zahl $N > 0$;

vi) $f(x) = \sum_{j=0}^{N} \sin(Nx)^N$, für eine natürliche Zahl $N > 0$.

(a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereichen $D \subset \mathbb{R}$ jeder Funktion an;

(b) Anhand der bekannten Regeln (Linearität, Produkt- und Kettenregel u.s.w.) berechnen Sie die erste und zweite Ableitung jeder Funktion.

Hintergrund und Aufgaben zur Ableitung finden Sie in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitte 10.3 – 10.5.