

Vorkurs – VL 8

Terme und Gleichungen II



Vorkurs



https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Laufende Fragensammlung



Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Lösungsstrategien für
einfache Gleichungen

Streifenmethode

Systematisches Probieren

Graphische
Lösungsverfahren

Numerisch-iterative
Lösungsverfahren

Gegenoperatoren

Äquivalenzumformungen

Lösungsformeln
anwenden

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Lösungsstrategien für
einfache Gleichungen

$$26 + x = 107$$

**Verwandte Gleichung mit
gleicher Struktur**

$$2 + x = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

also

$$26 + 81 = 107$$

Zerlegung

$$26 + x = 26 + 81$$

also

$$x = 81$$

Umkehraufgabe

$$107 - 26 = x$$

$$81 = x$$

also

$$x = 81$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen

Grundschule: Umkehr- und Tauschaufgaben

$$26 + x = 107$$

Tauschaufgabe

$$x + 26 = 107$$

Umkehr-
aufgabe

Umkehr-
aufgabe

$$26 = 107 - x$$

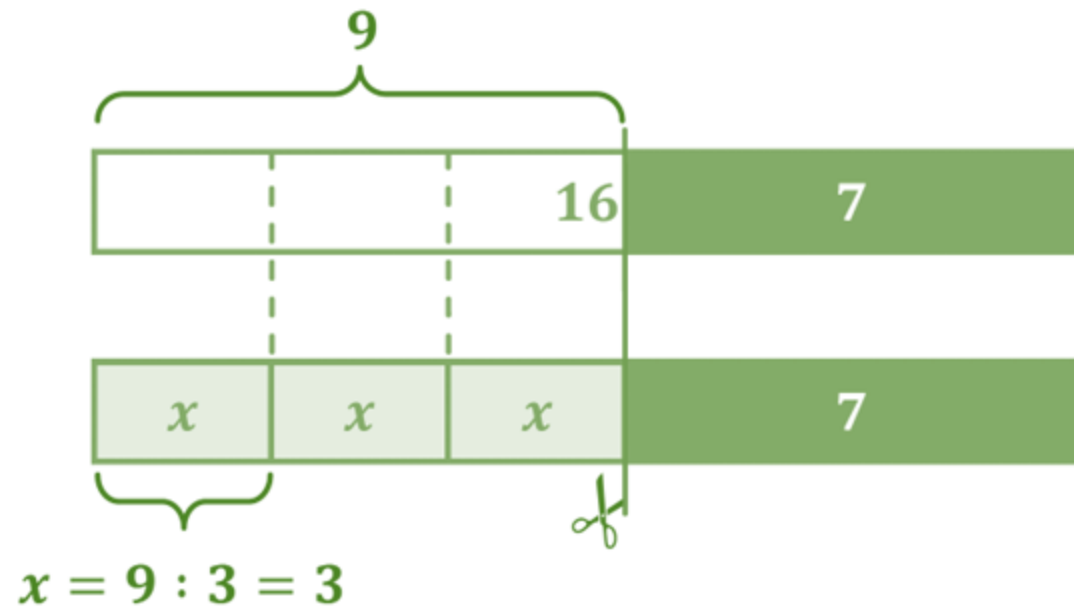
Tauschaufgabe

$$x = 107 - 26$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Streifenmethode

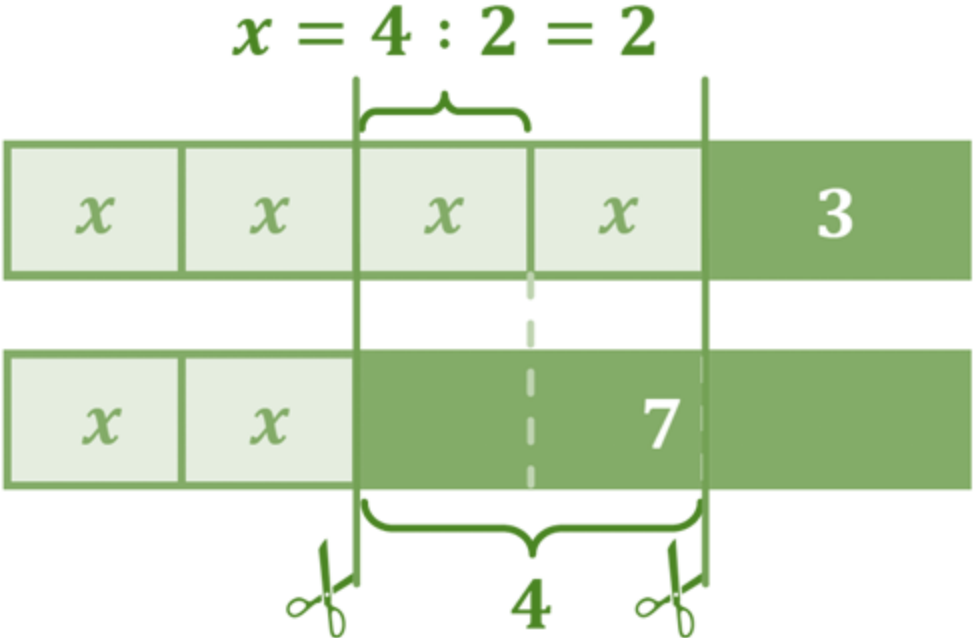
$$3x + 7 = 16$$



Methoden zur Lösung von Gleichungen

Streifenmethode

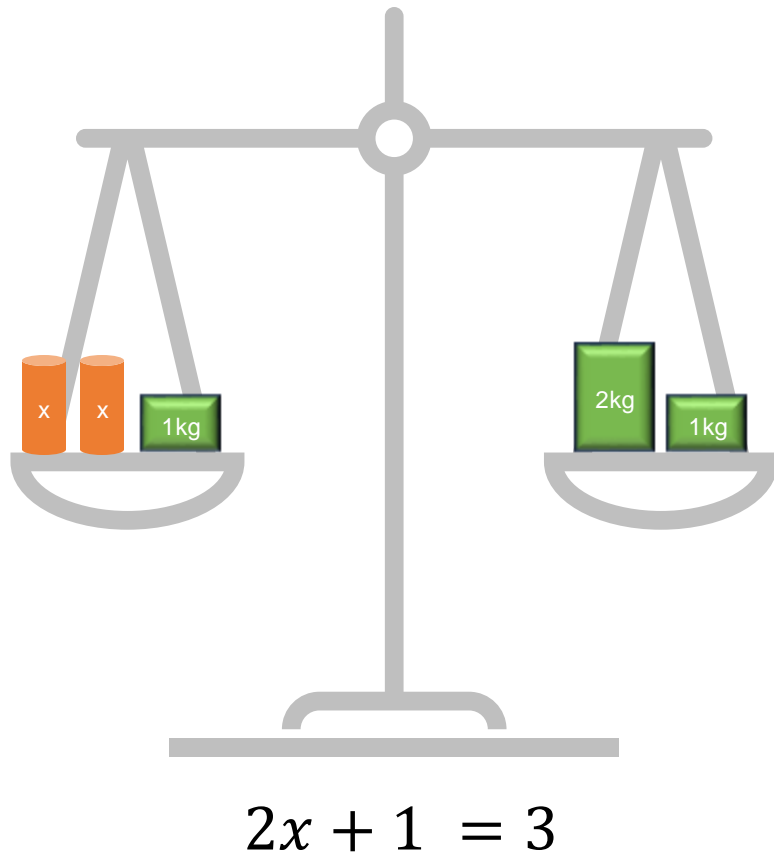
$$4x + 3 = 2x + 7$$



Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$2x = 2$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

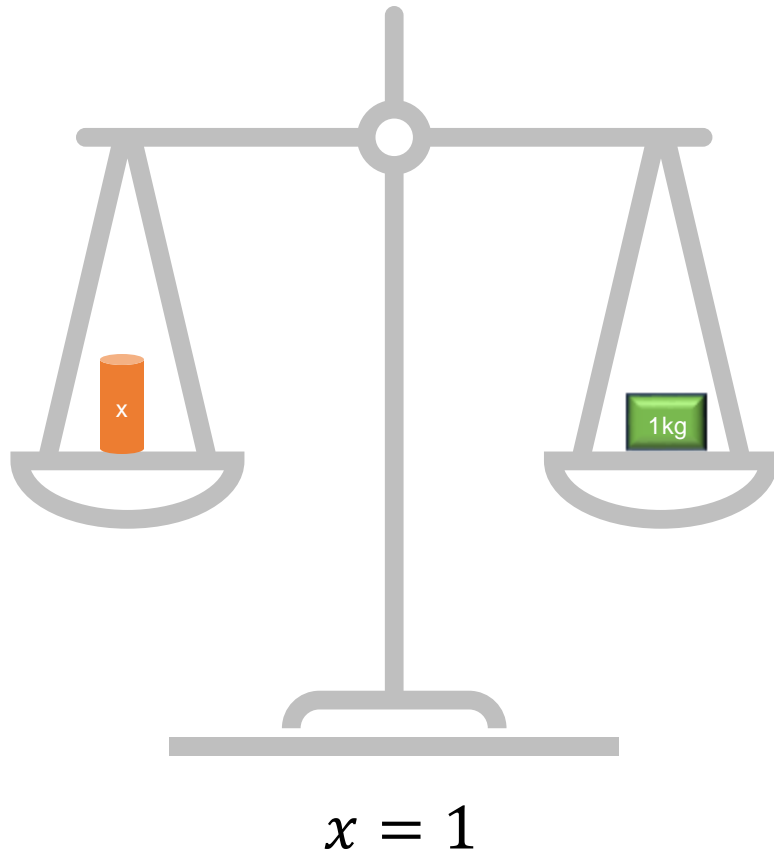
$$2x = 2$$

Masse auf beiden Seiten halbieren.

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Masse auf beiden Seiten halbieren.

$$x = 1$$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Im Waagemodell



Waagemodell

- lässt sich in einfachen Fällen gut zur Veranschaulichung nutzen.
- ist, wie jedes Modell, nur begrenzt nutzbar!

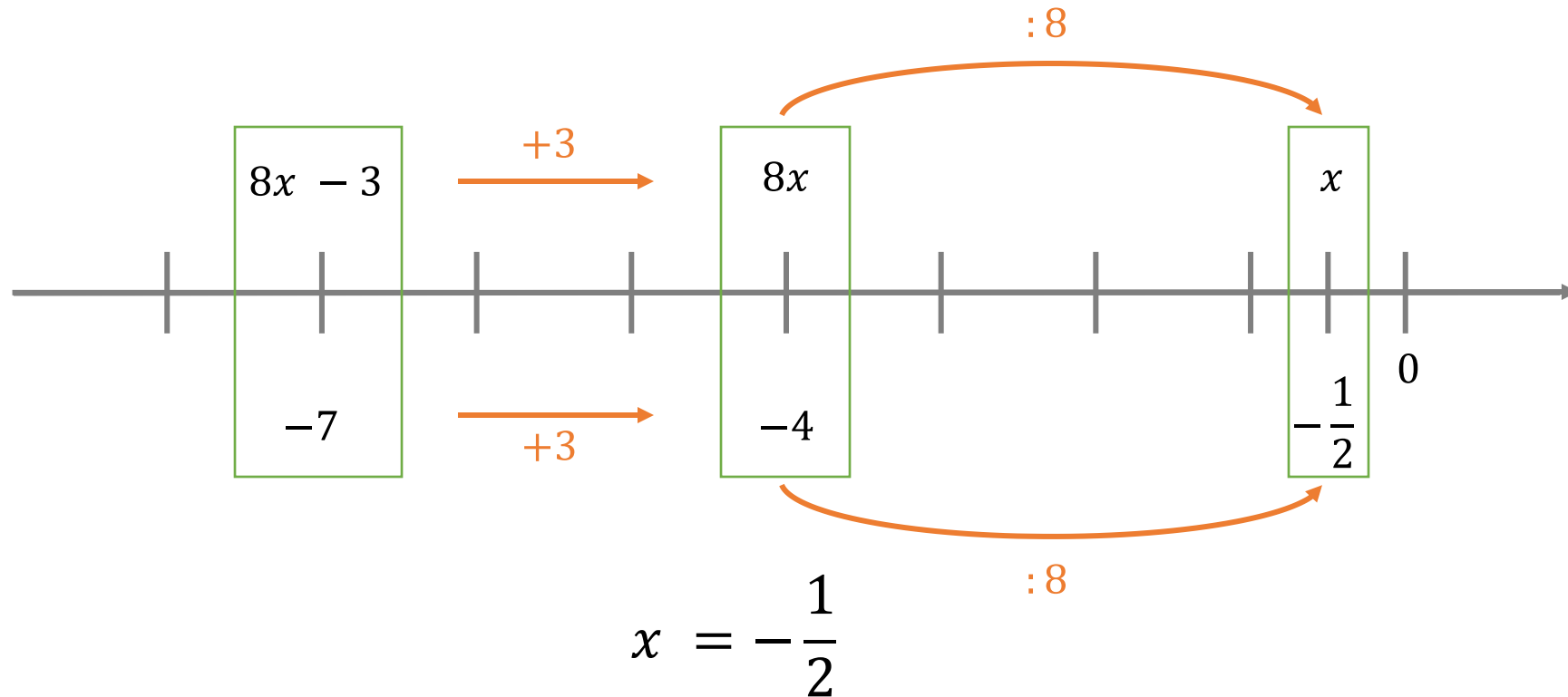
(vgl. etwa negative Zahlen, irrationale Zahlen, schwierig bei Bruchzahlen, Division, Multiplikation, ...)

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Am Modell des Zahlenstrahls

$$8x - 3 = -7$$



Methoden zur Lösung von Gleichungen

Äquivalenzumformungen

Eine Umformung einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung, wenn sich die Lösungsmenge dabei nicht verändert.

$a = b$ ist äquivalent zu $a + c = b + c$

$a = b$ ist äquivalent zu $a - c = b - c$

$a = b$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $a \cdot c = b \cdot c$

$a = b$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $a : c = b : c$

Methoden zur Lösung von Gleichungen

Führen Sie nun selbst eine Äquivalenzumformung mit der Streifenmethode oder dem Waagemodell durch!

$$8x + 2 = 3x + 12$$

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

Teiler und Vielfache

Präformale Definitionen der Teilbarkeitsbeziehung $a \mid b$

- *Charakterisierung eines Teilers im Kontext der Aufgabe:*

$a \mid b \Leftrightarrow$ Man kann a gleich große Teams in einer Klasse mit b Kindern zusammenstellen.

- *Allgemeine Charakterisierung:*

- in Kindersprache:

$a \mid b \Leftrightarrow a$ „steckt in b drin“

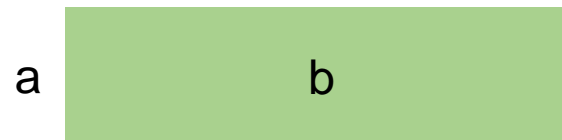
- erste Präzisierung: $a \mid b \Leftrightarrow$ d.h. a kommt in einer **multiplikativen Zerlegung** von b vor (oder: b ist Vielfaches von a)

Aber was heißt das genau?

Ich finde eine dritte natürliche Zahl n , so dass $n \cdot a = b$

- *graphische Charakterisierung:*

$a \mid b \Leftrightarrow$ es gibt eine Rechteckdarstellung von b mit ganzzahliger Seitenlänge a



Teiler und Vielfache

Formale Definitionen

„Die natürliche Zahl a heißt genau dann ein **Teiler** der natürlichen Zahl b , wenn (mindestens) eine natürliche Zahl n existiert mit $n \cdot a = b$. Dann heißt gleichzeitig b **Vielfaches** von a .

In beiden Fällen benutzen wir die Schreibweise $a|b$, und lesen sie im Fall der Teilbarkeitsbeziehung von links nach rechts **a teilt b** oder **a ist ein Teiler von b** , im Falle der Vielfachenbezeichnung von rechts nach links als **b ist ein Vielfaches von a** .“

Padberg & Büchter, 2015, S. 17

Teiler und Vielfache

Formale Definitionen

Definition *Teilermenge*:

Die Menge aller **positiven** Teiler von $a \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge

$T_a = \{x \in \mathbb{N} / x \mid a\}$, nennen wir Teilermenge von a

Weitere Charakterisierung:

$T_a = \{x \in \mathbb{N} / \text{es gibt ein } q \in \mathbb{N} \text{ mit } q \cdot x = a\}$

Definition *echte Teiler*:

Alle $n \in T_a$ mit $n \neq 1$ und $n \neq a$ heißen echte Teiler.

Definition *Vielfachenmenge*:

Die Menge aller positiven Vielfachen von $a \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge

$V_a = \{x \in \mathbb{N} / a \mid x\}$, nennen wir Vielfachenmenge von a .

Weitere Charakterisierung:

$V_a = \{x \in \mathbb{N} / \text{es gibt ein } q \in \mathbb{N} \text{ mit } q \cdot a = x\}$

Teiler und Vielfache

Im Schulbuch

Wir zerlegen Zahlen.

Wir zerlegen eine **Startzahl** in eine Malaufgabe. Wir erhalten zwei **Teiler der Zahl**.

Die Teiler werden solange zerlegt, bis es nur noch Zerlegungen in Malaufgaben mit 1 gibt.

Am Ende erhalten wir **Primzahlen**. Die Zerlegung einer Primzahl schreiben wir nicht mehr auf.

Lena: Ich zerlege die 12 in $2 \cdot 6$. Also sind 2 und 6 Teiler der 12.

Metin: Die 2 hat nur die Teiler 1 und 2. Also ist 2 eine Primzahl.

Leo: $2 \cdot 3 = 6$. 2 ist eine Primzahl. Ist 3 auch eine Primzahl oder kann ich 3 in eine Malaufgabe zerlegen?

Teacher: Welche Teiler erhalten wir, wenn wir die 12 zuerst in $3 \cdot 4$ zerlegen?

Zahlenbuch 4, S. 111

Teiler und Vielfache

Formale Definitionen

Definition Primzahlen:

Eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_{>1}$ heißt Primzahl, wenn sie (in der Menge der natürlichen Zahlen) nur die beiden trivialen Teiler 1 und a besitzt.

Weitere Charakterisierungen:

- keine echten Teiler hat.
- genau zwei Teiler besitzt.
- zur Menge $M = \{p \in \mathbb{N}_{>1} / T_p = \{1, p\}\}$ gehört.

Teiler und Vielfache

Teilmengen – vor dem Untersuchen kommt das Aufschreiben

Beispiel für formale
Schreibweise (**extensional**):
 $T_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Aber: für große (Teiler-)
Mengen hat diese
Darstellung Grenzen. Wie
geht es sonst noch?

Handwritten list of divisors for numbers 20 to 37, with some entries circled in red:

20: 2, 4, 5, 10	21: 3, 7	22: 2, 11	
23: -	24: 2, 3, 4, 6, 8, 12	25: 5	26: 2, 13
27: 3, 9	28: 2, 4, 7, 14	29: -	30: 2, 3, 5, 6, 10, 15
31: -	32: 2, 4, 8, 16	33: 3, 11	34: 2, 17
35: 5, 7	36: 2, 3, 4, 6, 9, 18, 12	37: -	

Teiler und Vielfache

Mengenschreibweisen

1. **Extensionale Beschreibung** von Mengen
(durch Aufzählen der Elemente)

Beispiele:

$$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$V_{24} = \{24, 48, 72, 96, \dots\}$$

2. **Intensionale Beschreibung** von Mengen
(d.h. durch Benennung einer charakterisierenden Bedingung)

Beispiele:

$$T_{24} = \{a \in \mathbb{N} \mid a \mid 24\}$$

$$= \{a \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } a \cdot n = 24\}$$

$$V_{24} = \{n \in \mathbb{N} \mid 24 \mid b\}$$

$$= \{b \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } 24 \cdot n = b\}$$

Teiler und Vielfache

Mengenschreibweisen

1. **Extensionale Beschreibung** von Mengen
(durch Aufzählen der Elemente)
2. **Intensionale Beschreibung** von Mengen
(d.h. durch Benennung einer charakterisierenden Bedingung)

Schreiben Sie die beiden Mengen jeweils in explizit aufzählender Form (extensional) und durch charakterisierende Bedingungen (intensional) auf:

1. Menge der ungeraden Zahlen U
2. Menge der Quadratzahlen Q

Beispiele:

$$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$V_{24} = \{24, 48, 72, 96, \dots\}$$

Beispiele:

$$T_{24} = \{a \in \mathbb{N} \mid a \mid 24\}$$

$$= \{a \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } a \cdot n = 24\}$$

$$V_{24} = \{n \in \mathbb{N} \mid 24 \mid n\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } b \in \mathbb{N} \text{ für das gilt } 24 \cdot b = n\}$$

Teiler und Vielfache

Wie findet man alle Teiler einer Zahl b ?

1. Weg: unsystematische Suche
2. Weg: alle Zahlen $< b$ systematisch von klein nach groß durchprobieren
3. Weg: alle Zahlen bis $b/2$ durchprobieren, die „Partnerzahl“ gleich dazu (fachsprachlich ausgedrückt: die Ko-Teiler oder Komplementärteiler)

Teiler und Vielfache

Alle Teiler einer Zahl

Finden Sie alle Teiler der Zahlen 18 und 24 und markieren Sie alle gemeinsamen Teiler.

Teiler und Vielfache

gT und ggT:
Idee des gemeinsamen Maßes
Lineare Darstellung

Teiler und Vielfache

Alle Teiler einer Zahl

Übertragen Sie diesen Visualisierungsansatz auch auf andere Zahlbeispiele und visualisieren Sie ebenso die gemeinsamen Teiler und den größten gemeinsamen Teiler von 24 und 92.

Teiler und Vielfache

gT und ggT:
Idee des gemeinsamen Maßes
Flächige Darstellung

Teiler und Vielfache

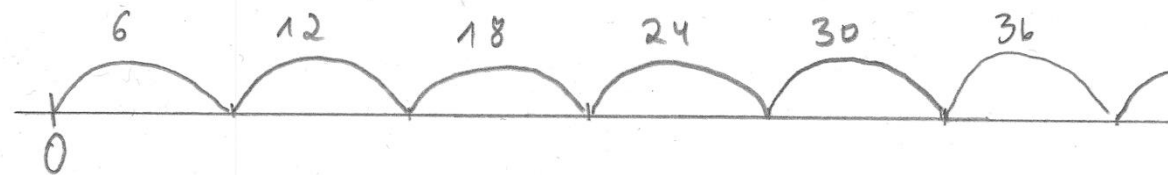
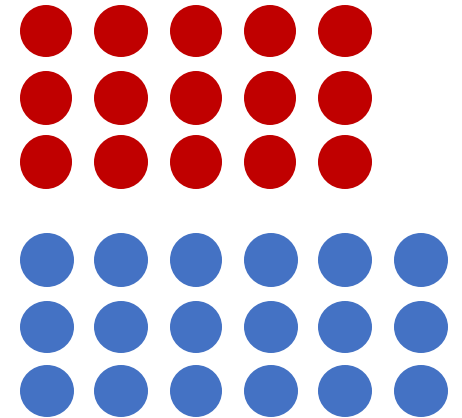
Vorstellungen und Darstellungen gemeinsamer Teiler

15 und 18 haben den gemeinsamen Teiler 3, denn

... beide Zahlen lassen sich auf 3 verteilen.

... beide Zahlen lassen sich in 3er Spalten aufteilen.

... beide Zahlen lassen sich als Rechteck mit Seitenlänge 3 darstellen.



24 und 30 haben den gemeinsamen Teiler 6, weil sich beide durch 6 ausmessen lassen
(gemeinsamer Teiler als gemeinsames Maß,
größter gemeinsamer Teiler als das größtmögliche Maß, ggT als $\max(T_a \cap T_b)$)

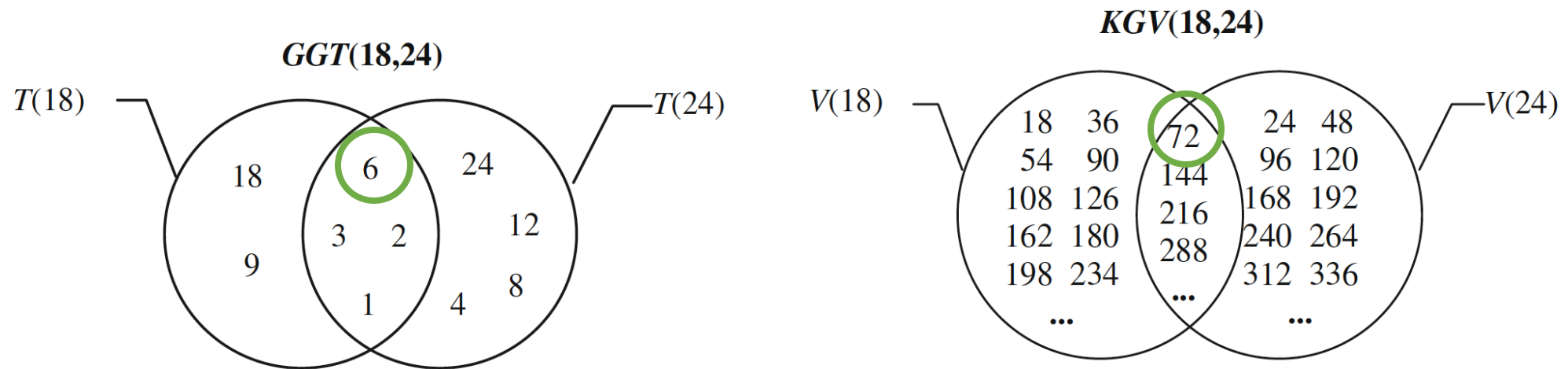
Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

ggT und kgV

Vorstellungen und Darstellungen des ggT und kgV

- Nicht schwer! Aber was bedeutet das inhaltlich?
Welche Vorstellungen und Darstellungen braucht man dazu?
- Veranschaulichung im Venn-Diagramm:



ggT als größtes und kgV als kleinstes Element der gemeinsamen Schnittmenge der Teiler- bzw. Vielfachenmengen

ggT und kgV

Formale Definitionen

Definition ggt

Es seien a und b natürliche Zahlen mit den Teilmengen $T(a)$ und $T(b)$.
Mit $\text{ggT}(a,b)$ sei der **größte gemeinsame Teiler** von a und b bezeichnet,
also das größte Element der Menge $T(a) \cap T(b)$.

Kurz: $\text{ggT}(a,b) := \max \{k \in \mathbb{N} / k \text{ teilt } a \text{ und } b\}$

Oder: $\text{ggT}(a,b) := \max \{T(a) \cap T(b)\}$

Kann diese Menge leer sein?

Die Menge $T(a) \cap T(b)$ ist niemals leer, denn sie enthält in jedem Fall die natürliche Zahl 1.

Ist $T(a) \cap T(b) = \{1\}$ (d.h. $\text{ggT}(a,b) = 1$), so nennt man die Zahlen a und b teilerfremd (oder relativ prim).

ggT und kgV

Formale Definitionen

Definition *kgV*

Es seien a und b natürliche Zahlen mit den Vielfachenmengen $V(a)$ und $V(b)$.

Sind $V(a)$ und $V(b)$ die Vielfachenmengen von a und b , so sei mit $\text{kgV}(a,b)$ das kleinste Element von $V(a) \cap V(b)$, also das **kleinste gemeinsame Vielfache** von a und b bezeichnet.

Kurz: $\text{kgV}(a,b) := \min \{k \in \mathbb{N} / a \text{ und } b \text{ teilen } k\}$

Oder: $\text{kgV}(a,b) := \min \{V(a) \cap V(b)\}$

Kann diese Menge leer sein?

Die Menge $V(a) \cap V(b)$ ist niemals leer, denn sie enthält als kleinstes Element in jedem Fall die natürliche Zahl $a \cdot b$ (genau dann wenn a und b teilerfremd).

ggT und kgV

Wie findet man ggT und kgV beliebiger Zahlen a und b?

Verschiedene Wege:

- mit dem Zahlenstrahl
- mithilfe der Teiler- und Vielfachenmengen
- mit den Primfaktorzerlegungen →
- mithilfe von Hasse-Diagrammen
- ...

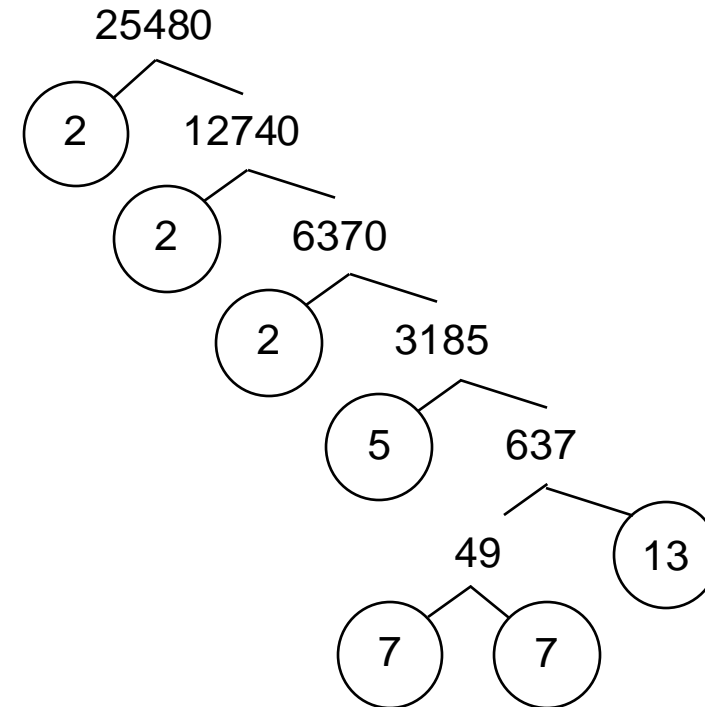
Alles andere kann unter Umständen sehr langwierig sein!

ggT und kgV

Primfaktorzerlegung einer Zahl finden

systematisch multiplikativ zerlegen, formal oder anschaulich mit Zerlegungsbaum

$$\begin{aligned}25480 &= 2 \cdot 12740 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 6370 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3185 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 637 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13 \\ &= 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13\end{aligned}$$



Ermitteln Sie nun selbst die PFZ von 61740

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Methoden zur Lösung von Gleichungen
2. Teiler und Vielfache
3. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
4. Diophantische Gleichungen

Diophantische Gleichungen

Knobelaufgaben lösen

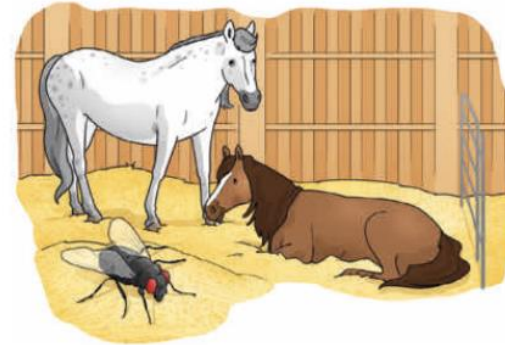
Im Stall von Bauer Lindemann sind Kaninchen und Hühner. Der Bauer sagt, dass die Tiere insgesamt 30 Beine haben. Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner könnten es sein?

Diophantische Gleichungen

Im Schulbuch

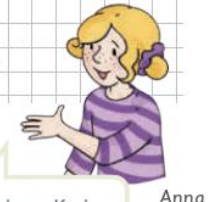
Tabellen und Skizzen

- 1 In einem Stall werden Pferde und Fliegen gezählt. Es sind 10 Tiere.
 Zusammen haben sie 54 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?



Anna:

Antwort:
3 Pferde und 7 Fliegen.



Ich habe für jedes Tier einen Kreis gemalt. Jedes Tier hat mindestens 4 Beine. Dann habe ich noch die restlichen 14 Beine verteilt. Es sind also 7 Fliegen und 3 Pferde.

Noah:

Anzahl Tiere	Pferdebeine	Fliegenbeine
1	4	6
2	8	12
3	12	18
4	16	24
5	20	30
6	24	36
7	28	42
8	32	48
9	36	54
10	40	60

Lilly:

$5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 50$	5 Pferde und 5 Fliegen
$4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 52$	4 Pferde und 6 Fliegen
$3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 54$	3 Pferde und 7 Fliegen

Metin:

Pferdebeine	Fliegenbeine	gesamt
40	0	40
36	6	42
32	12	44
28	18	46
24	24	48
20	30	50
16	36	52
12	42	54

Wie haben die Kinder überlegt? Vergleicht mit euren Lösungen.

Zahlenbuch 4, S. 116

Fragen? Vielen Dank!



Literatur

- Padberg, F., & Büchter, A. (2015). Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik. Springer.
- Roth, J. (2024). Didaktik der Algebra, Modul 5a/c. Verfügbar unter: https://www.juergen-roth.de/skripte/did_algebra/did_algebra_4_gleichungen.pdf. Zuletzt abgerufen am: 17.08.2024
- Ziegenbalg, J. (2015). Elementare Zahlentheorie. Beispiele, Geschichte, Algorithmen. Springer.

Internetlinks und Schulbücher

- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 4*. Ernst Klett Verlag.
- Arithmetik digital (2024). Gemeinsame Teiler und größter gemeinsamer Teiler (ggT). Verfügbar unter: <https://adi.dzlm.de/node/40>