Vorkurs – Vorlesung 4
Brüche

Laufende Fragensammlung

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Bruchvorstellung
2. Gleichwertigkeit von Brüchen
3. Rechnen mit Brüchen

Brüche

- Brüche schon in der Grundschule?

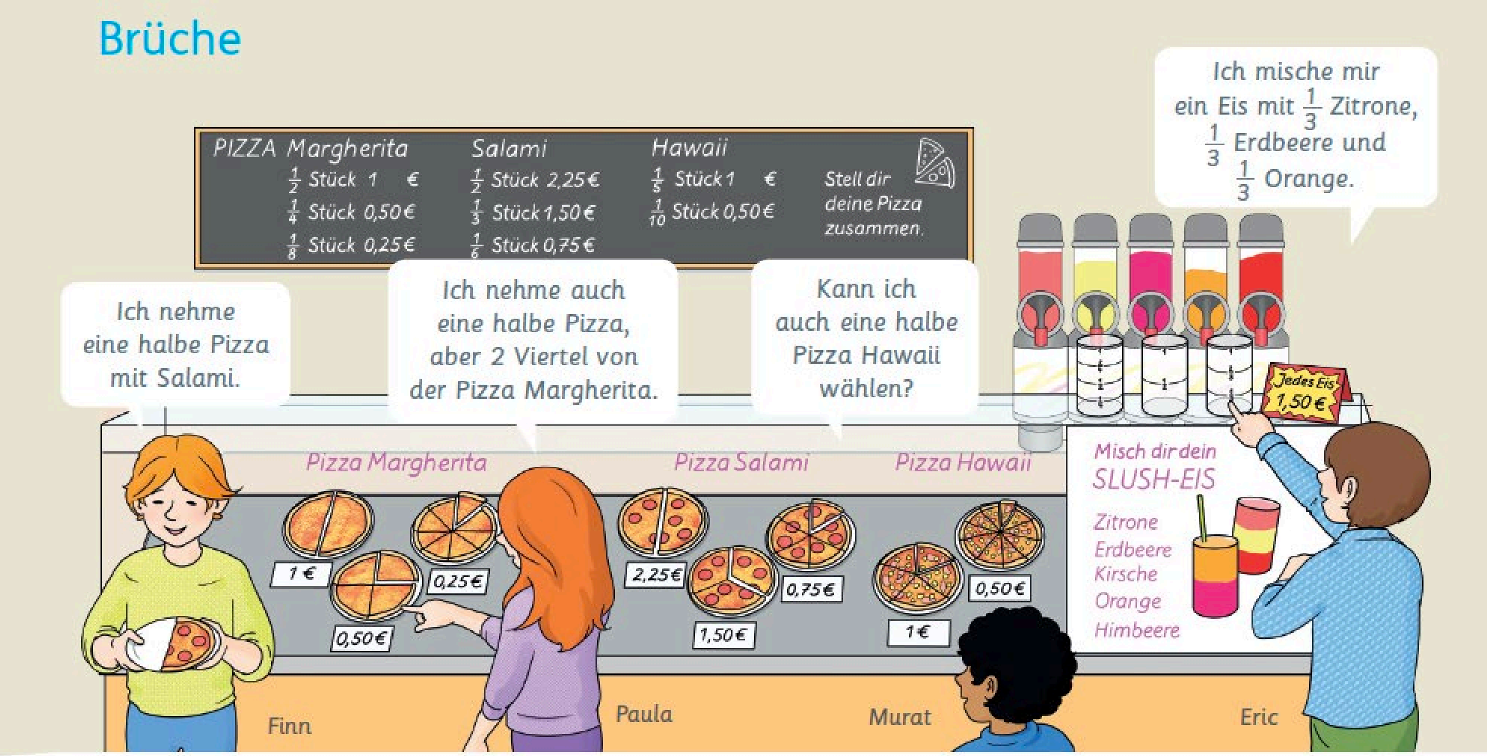
Größen und Messen

Größenvorstellung und Umgang mit Größen	
Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase Die Schülerinnen und Schüler	Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler
• ermitteln Längen mit Messgeräten (u. a. Lineal, Zollstock) sachlich angemessen,	• ermitteln Größen (u. a. Längen, Zeitspannen, Rauminhalte und Gewichte (Masse)) mit geeigneten Messgeräten,
• vergleichen und ordnen Längen, Zeitspannen und Geldbeträge,	• vergleichen und ordnen Größen (u. a. Datenmengen, Längen, Gewichte (Masse)),
• geben Größen von vertrauten Objekten an und schätzen mithilfe von Stützpunktvorstellungen (für 1cm, 1m, 1€),	• geben Größen von vertrauten Objekten an und schätzen mithilfe von Stützpunktvorstellungen (für 1g, 500g, 1kg, 1t, 1km),
• benennen einfache Uhrzeiten (u. a. volle Stunde, halbe Stunde, Viertelstunde, Dreiviertelstunde) auf analogen und digitalen Uhren und stellen diese ein,	• benennen Uhrzeiten auf analogen und auf digitalen Uhren und stellen diese ein,
• verwenden die Einheiten für Geldwerte (ct, €), Längen (cm, m), Zeitspannen (Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat, Jahr) und stellen Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen dar (umwandeln),	• verwenden zusätzlich die Einheiten für Längen (mm, km), Zeitspannen (Sekunde), Gewichte (Masse) (g, kg, t), Volumina (ml, l) und Datenmengen (Byte, kB, MB) und stellen Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen dar (umwandeln),
	• nutzen im Alltag gebräuchliche Bruchzahlen bei Größenangaben und wandeln diese in kleinere Einheiten um (¼, ½, ¾),
• rechnen mit Größen (nur ganzzahlige Maßzahlen).	• rechnen mit Größen (auch mit Dezimalzahlen).

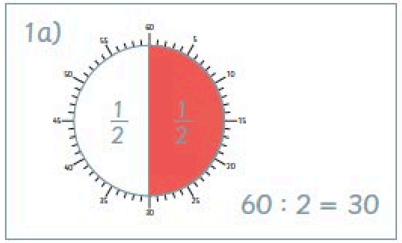
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/289/ps_lp_m_einzeldatei_2021_08_02.pdf

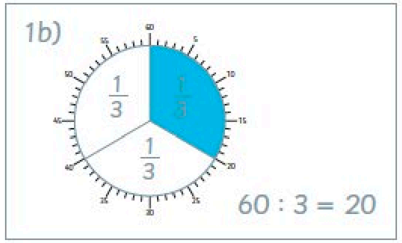
Brüche

- **Brüche in der Grundschule?**



○ **1** Zerlegt Kreise mit der Zeichenuhr in gleiche Teile.
a) 2 Teile
b) 3 Teile
c) 4 Teile
d) 5 (6, 8, 10, 12) Teile





(aus: Zahlenbuch 4)

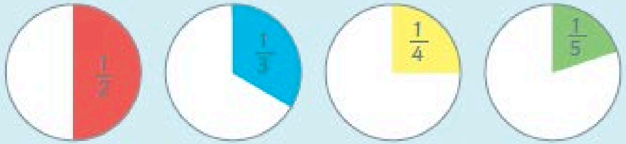
Brüche

- **Brüche in der Grundschule?**

Anteile von einem Ganzen können mit Bruchzahlen beschrieben werden, z. B.

$\frac{1}{2}$ ein Halb | $\frac{1}{4}$ ein Viertel | $\frac{3}{4}$ drei Viertel

$\frac{1}{3}$ ein Drittel | $\frac{1}{5}$ ein Fünftel | $\frac{2}{5}$ zwei Fünftel

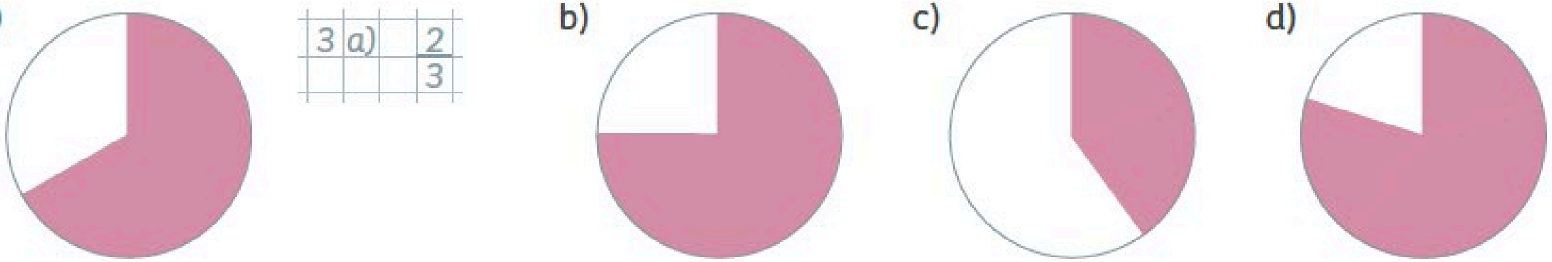


2 Setze aus verschiedenen Bruchteilen einen Kreis zusammen.
Schreibe die Brüche auf.
Finde verschiedene Möglichkeiten.

2) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

3 Wie groß ist der Anteil?

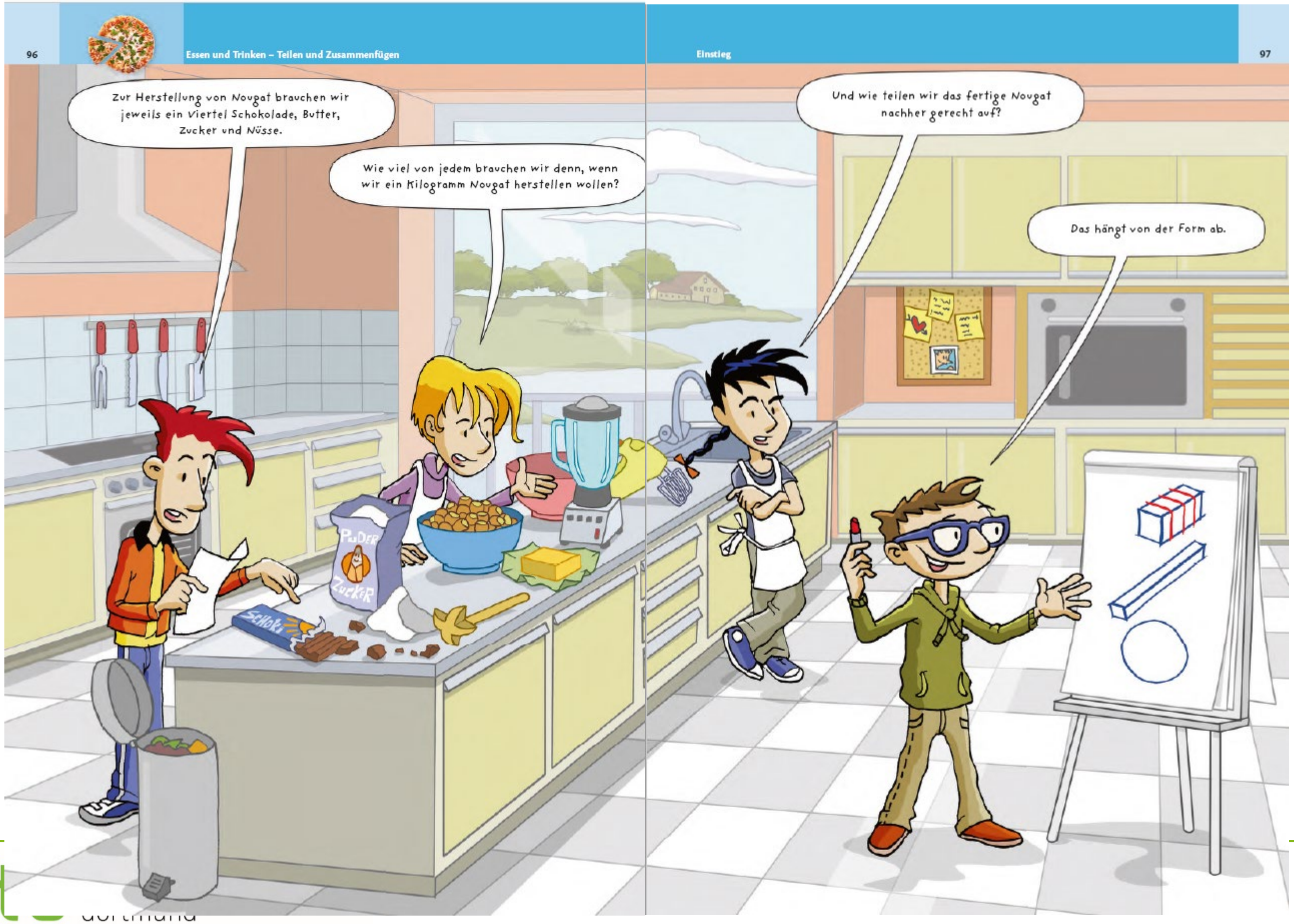
a) b) c) d)



3 a) $\frac{2}{3}$

(aus: Zahlenbuch 4)

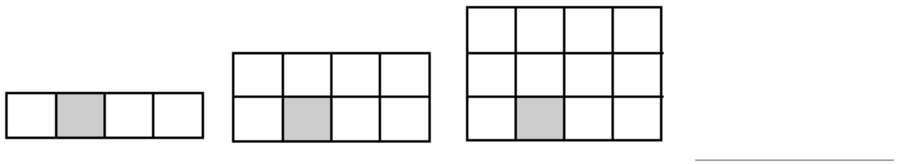
Der Bruch als Anteil – Einstieg in der Sekundarstufe



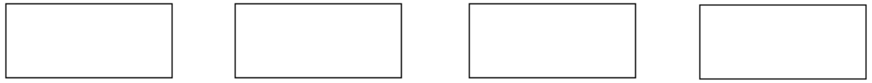
Aufgabe zum warm werden

1.4 Anteile bestimmen und ablesen

a) Bestimme für jedes Bild den Anteil. Wie könnte es weiter gehen?

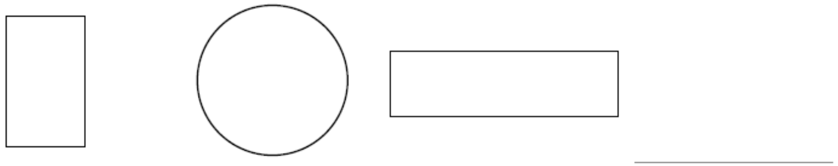


b) Zeichne für jedes Bild den Teil ungefähr passend ein. Wie könnte es weiter gehen?



Anteil: $\frac{1}{6}$ Anteil: $\frac{1}{8}$ Anteil: $\frac{1}{10}$ Anteil:

c) Zeichne für jedes Bild den Teil ungefähr passend ein. Ergänze ein 4. Bild.



Anteil: $\frac{1}{4}$ Anteil: $\frac{1}{4}$ Anteil: $\frac{1}{4}$ Anteil: $\frac{1}{4}$

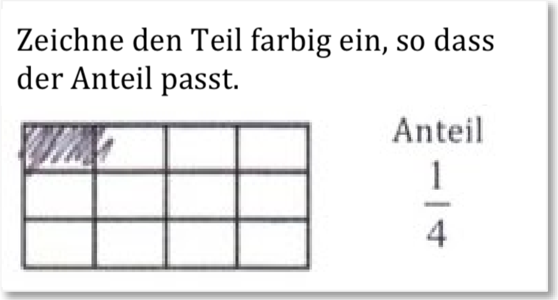
d) Vergleiche jeweils die Bilder in a), b) und c). Was stellst du fest?

Das **Ganze** in 3 Stücke zerlegen

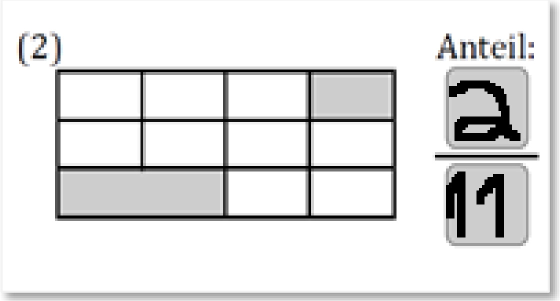
Der **Teil** ist 1 Stück groß

Der **Anteil** ist **1 von 3** Stücken

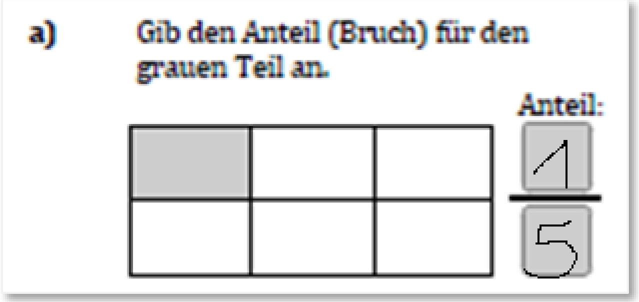
Und wenn es mal schief läuft?



Aaron

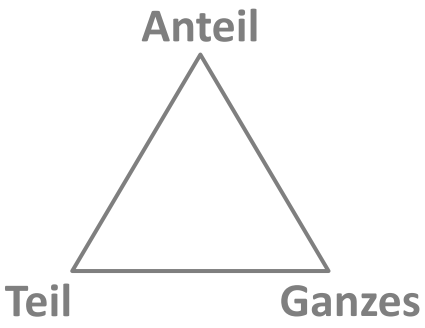


Sina



Moritz

- Nur die Anzahl der Stücke (Zähler) wird berücksichtigt

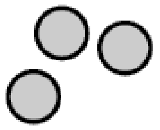


- Keine gleichgroßen Stücke
- Daraus resultierend falschen Anteil aus markiertem Teil abgeleitet

- Markierter Teil wird im Verhältnis zum nicht markierten Teil gesehen
- Das Ganze wird nicht richtig strukturiert

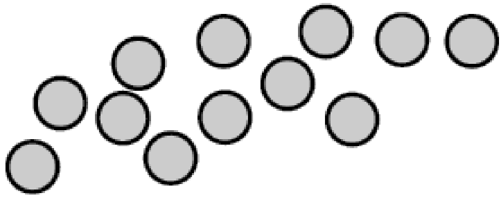
Was ist hier das Problem?

Und wenn es mehr als ein Ganzes ist?



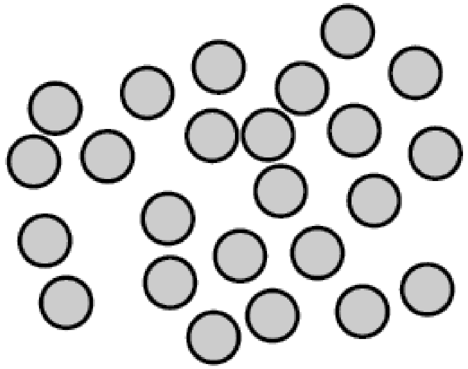
$\frac{2}{3}$ von $\boxed{}$ Punkten

sind $\boxed{}$ Punkte.



$\frac{2}{3}$ von $\boxed{}$ Punkten

sind $\boxed{}$ Punkte.



$\frac{2}{3}$ von $\boxed{}$ Punkten

sind $\boxed{}$ Punkte.

Wie gehen Sie vor?
Was ist anders als bei den bisherigen Anteilen?

Zusammenfassung

- **Bruch als Anteil**
  - Ein Bruch beschreibt immer einen Anteil, von einem Ganzen oder einer Menge
  - Dabei steht der Nenner für die Anzahl der Stücke, in die das Ganze oder die Menge aufgeteilt wird, der Zähler „zählt“ die Stücke des Anteils.

Das **Ganze** in 3 Stücke zerlegen

Der **Teil** ist 1 Stück groß

Der **Anteil** ist **1 von 3** Stücken

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Bruchvorstellung
2. Gleichwertigkeit von Brüchen
3. Rechnen mit Brüchen

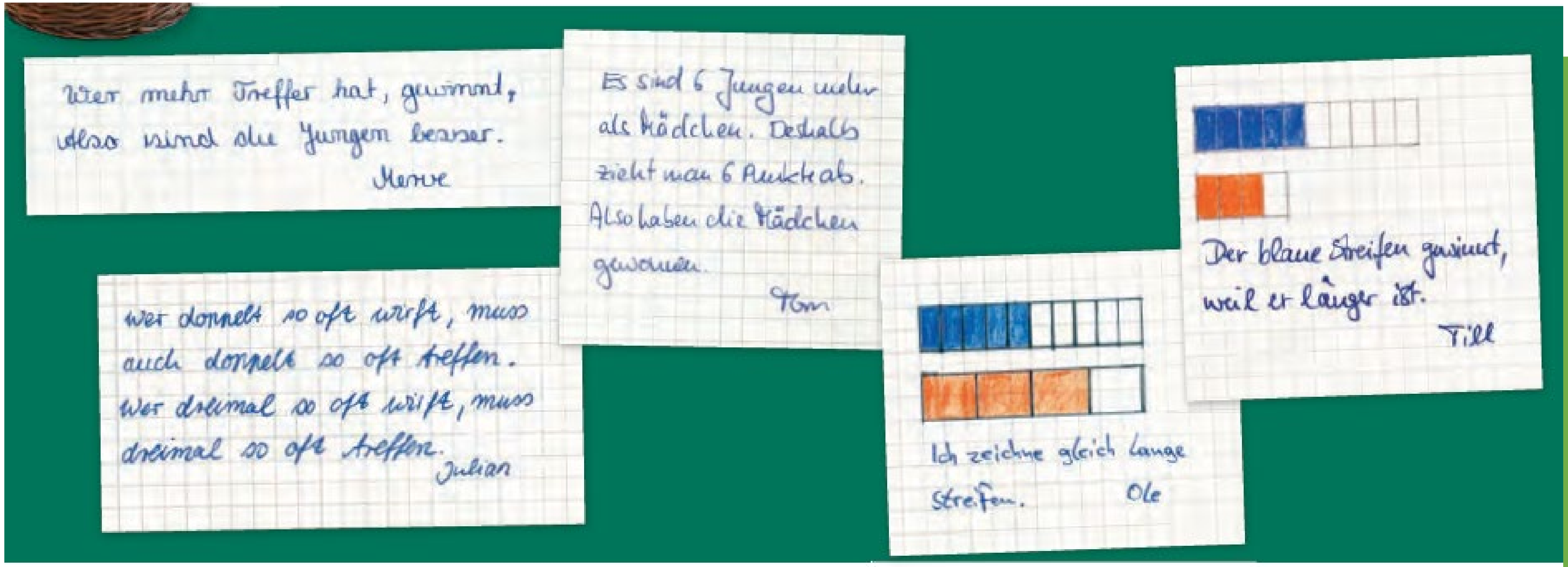
Gleichwertigkeit von Brüchen

Was stimmt denn nun?

(Quelle: Prediger / Barzel / Hußmann / Leuders 2013: mathewerkstatt 6, hier speziell Glade / Prediger / Schmidt 2013)

Gleichwertigkeit von Brüchen – Fair vergleichen

Erkunden 47



Hinweis
Du kannst die Streifen aus dem Materialblock verwenden.

▶ Materialblock S. 34 Arbeitsmaterial *Streifen für Anteile*

a) Wie würden diese fünf bei folgenden Ergebnissen entscheiden, wer gewonnen hat?

	Papierkorbball	Ringe werfen
Jungengruppe	10 von 100	9 von 10
Mädchengruppe	9 von 10	3 von 4

nachgedacht

b) Schreibe für jeden der fünf Wege auf, ob du ihn fair oder unfair findest. Begründe deine Entscheidungen. Nutze die Streifen aus dem Materialblock zur Kontrolle.

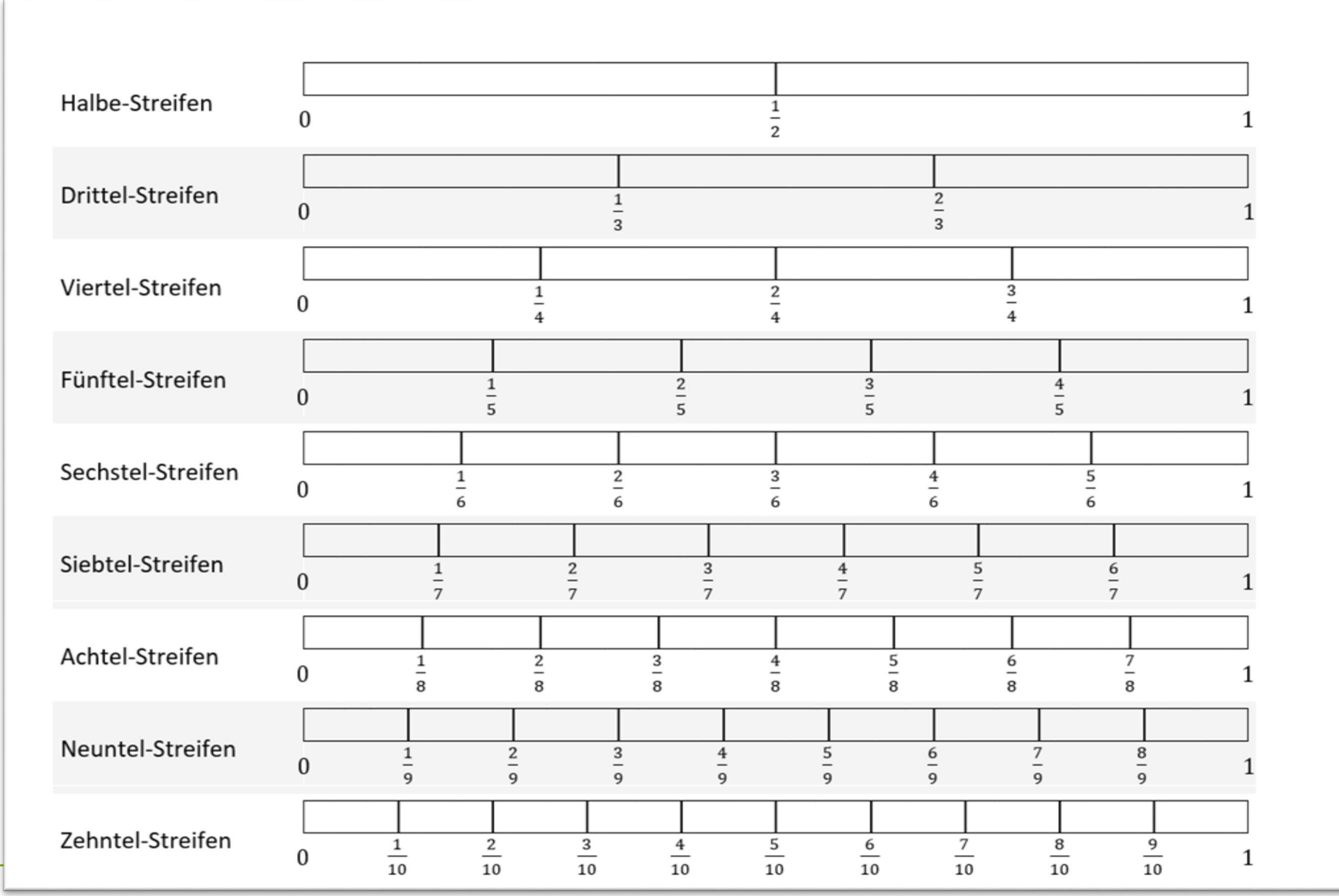
[☺ ☺ DU – 5 Minuten]
Schauen Sie sich die Lösungen der 5 Kinder an.
Beantworten Sie dann Aufgabe 3.b)
Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Überlegungen.
Hilft Ihnen Ihr Wissen über das Ganze, den Teil und den Anteil?

Die Streifentafel

[☺ ☺ DU – 5 Minuten]
Schauen Sie sich die Streifentafel einmal gemeinsam an (auch in Moodle verfügbar)

Wie können Sie schnell ablesen, ob Brüche gleichwertig sind?

Beschreiben Sie ihr Vorgehen und warum Sie sich sicher sein können, dass das stimmt.
Was bedeutet es, wenn zwei Brüche gleichwertig sind?



Brüche vergleichen – besondere Fälle

Definition *Vollständig gekürzte Brüche (teilerfremd)*:

- Zwei ganze Zahlen heißen *teilerfremd*, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist.

- **Beispiel:** $\frac{7}{15}$

Bemerkung

- Gilt ggT (a,b) = 1, so nennt man $\frac{a}{b}$ einen (vollständig) *gekürzten* Bruch.
  Die Darstellung als gekürzter Bruch ist eindeutig.

Definition *Gleichnamige Brüche*:

- Zwei (oder mehr) Brüche heißen *gleichnamig*, wenn sie den gleichen Nenner haben.
  Diesen Nenner nennt man Hauptnenner.

- **Beispiele:** $\frac{3}{15}, \frac{6}{15}, \frac{9}{15}$

Bemerkung

- Durch Erweitern und Kürzen können Brüche gleichnamig gemacht werden.
- Um einen möglichst kleinen Nenner zu erhalten, wählt man oft das kgV (kleinste gemeinsame Vielfache) als Hauptnenner. Dieses kann mithilfe der Primfaktorzerlegung berechnet werden.

Zusammenfassung

Bruch als Anteil

- Ein Bruch beschreibt immer einen Anteil, von einem Ganzen oder einer Menge
- Dabei steht der Nenner für die Anzahl der Stücke, in die das Ganze oder die Menge aufgeteilt wird, der Zähler „zählt“ die Stücke des Anteils.

Das **Ganze** in 3 Stücke zerlegen

Der **Teil** ist 1 Stück groß

Der **Anteil** ist **1 von 3** Stücken

Gleichwertige Brüche

- Zwei Brüche sind gleichwertig, wenn sie den gleichen Anteil beschreiben
- Um zwei Brüche vergleichen zu können, können wir ihren Anteil in der Streifentafel ablesen und vergleichen oder die Brüche gleichnamig machen.

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Bruchvorstellung
2. Gleichwertigkeit von Brüchen
3. Rechnen mit Brüchen

Addition und Subtraktion von Brüchen

- Berechnen Sie: $\frac{3}{11} + \frac{2}{7}$
- Wie gehen Sie vor? Können Sie ihr Vorgehen auch an einem Bild zeigen?

- Berechnen Sie nun: $\frac{5}{11} - \frac{2}{7}$
- Hilft Ihnen ihr Bild von der Addition?

Addition und Subtraktion von Brüchen

- **Definition *Addition und Subtraktion*:**
- Zwei Brüche addiert bzw. subtrahiert man, indem man sie *gleichnamig macht* und dann die Zähler *addiert bzw. subtrahiert.*

  - **Beispiel:** $\frac{5}{12}+\frac{7}{16}=\frac{5\cdot 4}{12\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{16\cdot 3}=\frac{20}{48}+\frac{21}{48}=\frac{41}{48}$

Definition *Kehrwert*:

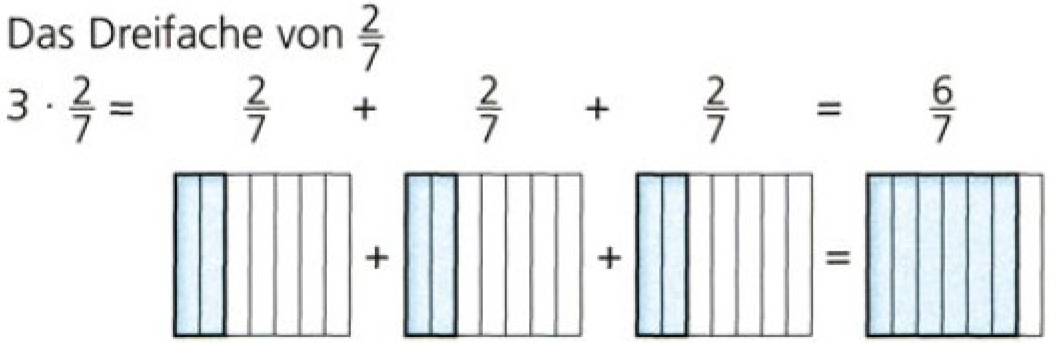
Der Kehrwert eines Bruches $\frac{a}{b}$ ist der Bruch $\frac{b}{a}$, wobei $a, b \neq 0$ gelten muss.

Der Kehrwert einer ganzen Zahl $a=\frac{a}{1}$ ist der Bruch $\frac{1}{a}$.

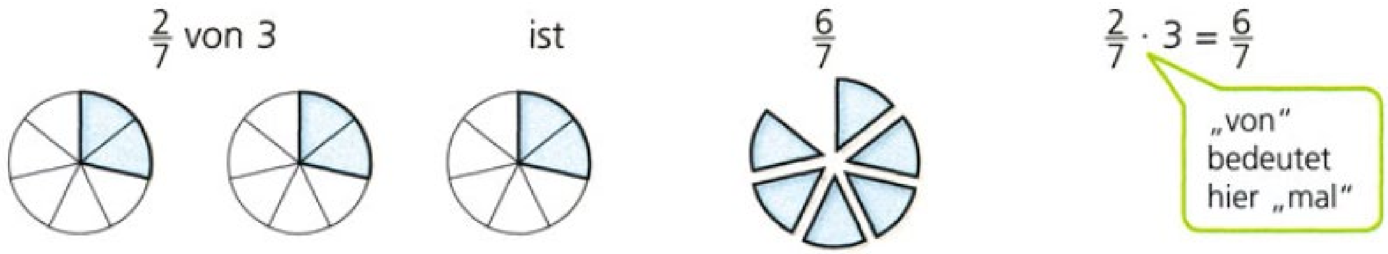
Mit Brüchen multiplizieren

Abbildungen aus: Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer. [S. 105 ff.]

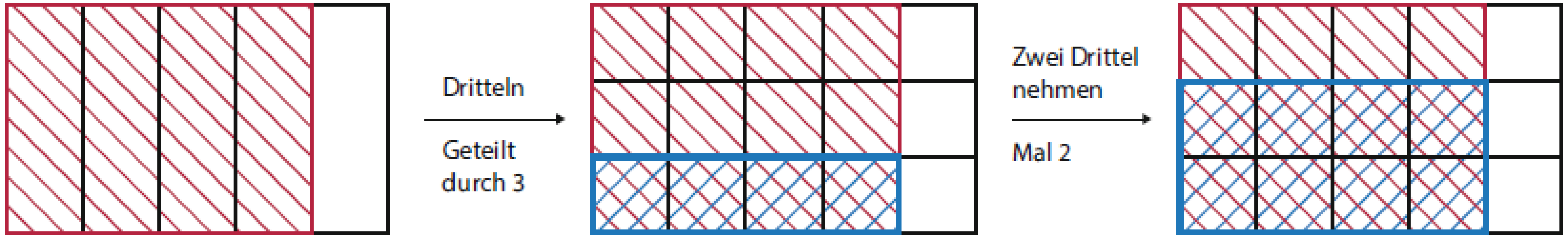
$3 \cdot \frac{2}{7}$?



$\frac{2}{7} \cdot 3$?



$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$?



Anteile von Anteilen – Bsp. aus der Anwendung

„Anja kauft bei einem Schulfest zweimal hintereinander ein Los. Im Loseimer liegen am Anfang drei Gewinnlose und sieben Nieten. Es sind folgende vier Ergebnisse möglich: GG, GN, NG und NN.“ Wie wahrscheinlich ist es, das Anja zwei Gewinne zieht?

Lambacher Schweizer 6 (2006), S. 194

Anteile von Anteilen – Bsp. aus der Anwendung

„Anja kauft bei einem Schulfest zweimal hintereinander ein Los. Im Loseimer liegen am Anfang drei Gewinnlose und sieben Nieten. Es sind folgende vier Ergebnisse möglich: GG, GN, NG und NN." Wie wahrscheinlich ist es, das Anja zwei Gewinne zieht?

Zunächst wird das erste Ergebnis (GG) untersucht: In etwa $\frac{3}{10}$ der Fälle zieht Anja beim ersten Zug ein Gewinnlos. Beim zweiten Zug sind jetzt nur noch neun Lose mit zwei Gewinnen im Eimer. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit für ein Gewinnlos im zweiten Zug nur noch $\frac{2}{9}$. Damit sind in ca. $\frac{2}{9}$ von $\frac{3}{10}$ aller Fälle beide Lose Gewinne.

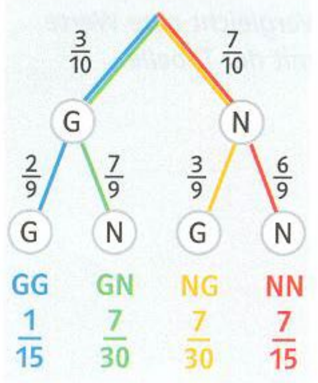


Fig. 2

Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
GG	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$
GN	$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30} \approx 23{,}3\,\%$
NG	$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30} \approx 23{,}3\,\%$
NN	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15} \approx 46{,}7\,\%$
Summe:	$1 = 100\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (GG) erhält man also, indem man die Wahrscheinlichkeiten der beiden Einzelergebnisse mutlipliziert: $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{15}$.

Um die Wahrscheinlichkeiten der anderen Ergebnisse zu bestimmen, beschriftet man wie in Fig. 2 die Pfade des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten der Einzelergebnisse und erhält die Tabelle.

Lambacher Schweizer 6 (2006), S. 194

Durch Brüche dividieren

- Berechnen Sie zunächst so, wie Sie es in der Schule gelernt haben:

$$\mathbf{6 : \frac{1}{3}} \ ?$$

- Warum gilt diese Regel? Wie können Sie erklären, dass Sie so rechnen dürfen?
- Achtung: eine Schritt-für-Schritt Anleitung ist keine Erklärung!

- Versuchen Sie, die Rechnung in einem Bild darzustellen

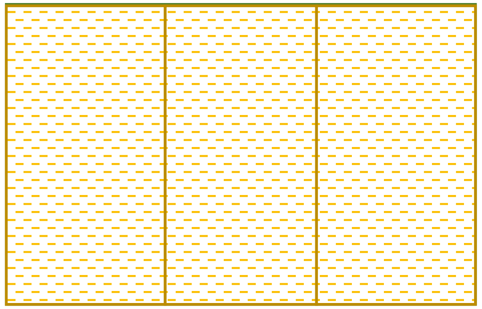
Durch Brüche dividieren

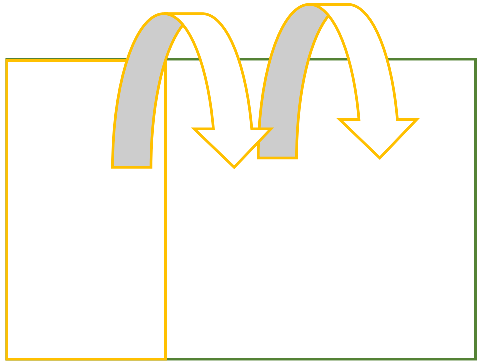
- Berechnen Sie zunächst so, wie Sie es in der Schule gelernt haben:

  $\mathbf{6} : \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$?

- Warum gilt diese Regel? Wie können Sie erklären, dass Sie so rechnen dürfen?
- Achtung: eine Schritt-für-Schritt Anleitung ist keine Erklärung!

- Versuchen Sie, die Rechnung in einem Bild darzustellen





Wie oft passt 1/3 in die 6?

Zusammenfassung

Bruch als Anteil

- Ein Bruch beschreibt immer einen Anteil, von einem Ganzen oder einer Menge
- Dabei steht der Nenner für die Anzahl der Stücke, in die das Ganze oder die Menge aufgeteilt wird, der Zähler „zählt“ die Stücke des Anteils.

Das **Ganze** in 3 Stücke zerlegen

Der **Teil** ist 1 Stück groß

Der **Anteil** ist **1 von 3** Stücken

Gleichwertige Brüche

- Zwei Brüche sind gleichwertig, wenn sie den gleichen Anteil beschreiben
- Um zwei Brüche vergleichen zu können, können wir ihren Anteil in der Streifentafel ablesen und vergleichen oder die Brüche gleichnamig machen.

Mit Brüchen rechnen

- Zwei Brüche addiert bzw. subtrahiert man, indem man sie gleichnamig macht und dann die Zähler addiert bzw. subtrahiert.
- Bei der Multiplikation mit Brüchen hilft die „von“-Vorstellung: $\boldsymbol{\frac{2}{7} \cdot 3}$ meint $\boldsymbol{\frac{2}{7}\ von\ 3}$
- Durch Brüche teilen stellt die Frage, wie oft der Bruch in etwas hineinpasst.

Fragen? Vielen Dank!