

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel I – Methode der kleinsten Quadraten

Newton'sches erste Gesetz (*Lex Prima*)

Corpus in motu continuare im motu, et corpus quietum manere quietum solet nisi a vi agitur.

Aus *Natura Principia Mathematica*

Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich entlang einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit.

Problem: Vorhersage der Trajektorie einer Sonde anhand von einer großen Anzahl fehlerbehafteten Messungen. Wir wollen eine Gerade durch eine Punktwolke im $\mathbb{R}^3$ legen, die durch N Messungen entstanden ist. Zu jeder Messung gehören 4 Koordinaten:

1. Messung : (t_1, x_1, y_1, z_1)
2. Messung : (t_2, x_2, y_2, z_2)
- $\vdots$
- N . Messung : (t_N, x_N, y_N, z_N)

Wobei t_i die Zeit der i -ten Messung und (x_i, y_i, z_i) die gemessene Position der Sonde zu der Zeit t_i bezeichnen.

Der Datensatz besteht aus N Punkten im $\mathbb{R}^4$. In der Tat ist es auch möglich eine bestapproximierende Gerade zu bestimmen.

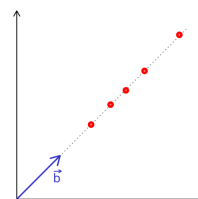
Da wir das Problem so nicht lösen können, führen wir plausible vereinfachende Annahmen ein, die zu einem Problem führen, das wir schließlich lösen können.

Annahme: Die Geschwindigkeit der Sonde hat keine Winkelkomponente.

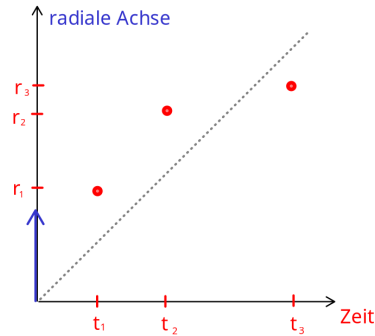
Es folgt, dass sich alle gemessene Positionen der Sonde auf der Richtungsachse des Vektors $\vec{b}$ befinden, wobei $\vec{b}$ der Richtungsvektor der Geschwindigkeit der Sonde ist.

Ich kann so annehme, dass alle gemessene Positionen Vielfache des Vektors $\vec{b}$ sind. Also kann ich annehmen, dass die i -te Messung die Form (t_i, r_i) hat, was bedeutet, dass sich die Sonde an der Zeit t_i an der Stelle $r_i \vec{b}$ befindet. Mein Datensatz sieht nun so aus:

1. Messung: : (t_1, r_1)
2. Messung: : (t_2, r_2)
- $\vdots$
- N . Messung: : (t_N, r_n)



Nach Newtons 1. Gesetz sollen alle Punkte (t_j, r_j) auf einer Geraden liegen, dann müssen wir noch die Steigung a der Geraden (hier die Geschwindigkeit) bestimmen, ebenso wie die Konstante c (Abstand zur Sonne, ab dem das 1. Newtonsche Gesetz anwendung findet) und dann die zukünftige Zeit $t > t_N$ in die erhaltene Geradengleichung $g(x) = at + c$ einsetzen. Somit erhalten wir die Position $r = g(t)$ entlang $\vec{b}$ -Achse zum Zeitpunkt t . Wegen des schon erwähnten Messfehler bei den Messungen $(t_i, r_1), \dots, (t_N, r_N)$ werden die Punkte nicht exakt auf einer Geraden liegen, sondern davon abweichen.



Aufgabe 1 (Ausgleichsgerade für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$)

Finde Parameter a und c so, dass der quadratische Gesamtfehler möglichst klein ist.

Wir suchen also Werte a_0, c_0 , sodass

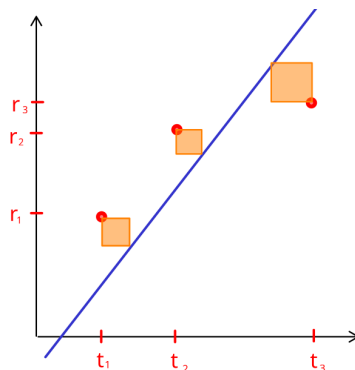
$$Q = Q(a_0, c_0) = \sum_{n=1}^N (g(t_n) - r_n)^2 = \sum_{n=1}^N (a_0 t_n + c_0 - r_n)^2$$

kleinstmöglich ist. Genauer: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ soll gelten

$$Q(a_0, c_0) \leq \sum_{n=1}^N (a t_n + c - r_n)^2 = Q(a, c) \quad (3)$$

kurze Schreibweise: $Q(a_0, c_0) = \min_{a, c \in \mathbb{R}} Q(a, c).$

Situation ähnlich wie in der Schule (Kurvendiskussion) aber $(a, c) \mapsto Q(a, c)$ ist eine Funktion zweier Variablen.



Dies lösen wir später. Wir betrachten zunächst ein ähnliches Problem, wo der Fehler den wir minimieren wollen, von einer einzelnen Variable abhängt.

Ohmsches Gesetz

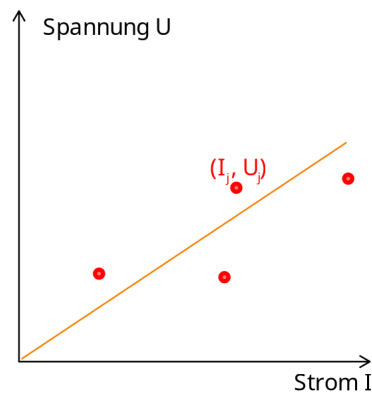
Die Stärke I des durch ein Objekt (elektrischen Leiter) fließenden Stroms ist proportional zur elektrischen Spannung U . Falls wir die Proportionalitätskonstante mit R bezeichnen ("resistance" – Widerstand des Leiters) ergibt sich die Relation

$$U = R \cdot I$$

Die Konstante R hängt vom Leiter ab.

Aufgabe 2 Bestimme R indem ich verschiedene Ströme $I_1, I_2, \dots, I_N$ anlege und die entsprechenden resultierenden Spannungen $U_1, U_2, \dots, U_N$ messe.

Da die Messungen Fehler beinhalten, mache ich eine ganze Messreihe



Da $U = 0 \iff I = 0$ (keine Spannung $\iff$ kein Strom) folgt, dass der konstante Term c in der Funktion der Geraden verschwindet (d.h., die Gerade läuft durch die Ursprung). Wir suchen also eine Gerade der Form

$$g(I) = R \cdot I$$

sodass, der Fehler

$$Q(R) = \sum_{j=1}^N (g(I_j) - U_j)^2 = \sum_{j=1}^N (R \cdot I_j - U_j)^2$$

minimal sei.

Konkreter, suchen wir $R_0 \in \mathbb{R}$, sodass

$$Q(R_0) = \min_{R \in \mathbb{R}} Q(R)$$

Hier haben wir eine Funktion $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $R \mapsto Q(R)$ einer Variablen.

Um Kandidaten für Minima zu finden berechnen wir zunächst die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dR}Q(R) &= \frac{d}{dR} \sum_{j=1}^N (RI_j - U_j)^2 \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dR} (RI_j - U_j)^2 \\
&= \sum_{j=1}^N 2(RI_j - U_j) \frac{d}{dR} (RI_j - U_j) \\
&= 2 \sum_{j=1}^N (RI_j - U_j) I_j \\
&= 2R \sum_{j=1}^N I_j^2 - 2 \sum_{j=1}^N U_j I_j
\end{aligned}$$

Bei einem Minimum muss $\frac{d}{dR}Q(R) = 0$ gelten, also

$$R \sum_{j=1}^N I_j^2 = \sum_{j=1}^N U_j I_j$$

und somit

$$R = \frac{\sum_{j=1}^N U_j I_j}{\sum_{j=1}^N I_j^2}$$

was sinnvoll ist, weil der Nenner eine Summe von Quadraten ist: er kann nur 0 sein wenn alle einzelne Terme 0 sind, und in dem Fall wären auch alle angelegte Ströme, bei allen Messungen, gleich 0.

Um zu entscheiden, ob an dem Punkt $R = R_0$ tatsächlich ein Minimum liegt

- Berechne die 2. Ableitung
- setze dort den Wert R_0 ein
- prüfe, ob diese Zahl positiv ist.

Also

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{d}{dR} Q(R) \right) = \frac{d}{dR} \left(2 \sum_{j=1}^N RI_j^2 - U_j I_j \right) = 2 \sum_{j=1}^N I_j^2$$

ist immer ≥ 0 aber, wenn die Experimente sinnvoll ausgeführt wurden (siehe oben) ist tatsächlich > 0 . In $R = R_0$ liegt somit ein Minimum der Funktion $Q(R)$ vor.