technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Michele Serra

Synopse zur 3. Vorlesung – 04.09.2024

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel I – Methode der kleinsten Quadraten

Aufgabe 1: Wir suchen eine Gerade, mit allgemeiner Gleichung

$$g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x)ax + b \tag{1}$$

die durch den Punkten (2,2) und (4,3) läuft. Also die Aufgabe erfordert, dass zwei Bedingungen erfüllt seien:

$$\begin{aligned} &\text{in } (2,2): && 2a + c = 2 && \text{(Gl. I)} \\ &\text{in } (4,3): && 4a + c = 3 && \text{(Gl. II)} \end{aligned}$$

Dies ergibt die Lösungen $a = \frac{1}{2},\ c = 1$. Meine Gerade ist somit $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Aufgabe 2: Allgemeiner, suche ich die Gerade $g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = ax + c$ durch die beiden Punkte $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, und $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} &\text{in } (x_1,y_1): && ax_1 + c = y_1 && \text{(Gl. I)} \\ &\text{in } (x_2,y_2): && ax_2 + c = y_2 && \text{(Gl. II)} \end{aligned}$$

Kopiere aus Aufgabe 1, und bekomme

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

also ich bekomme

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Warnung: dies ist nur erlaubt, wenn $x_1 \neq x_2$. Anderenfalls, ist die Gerade durch zwei Punkte mit gleicher x-Koordinate senkrecht, und somit auch **keine Funktion**.

Wir setzen nun diesen Wert für a ein und bekommen

$$c = y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

und, wenn wir die Werte für a und c in (1) einsetzen und umformen, bekommen wir die kompakte Gleichung:

Allgemeine Gleichung einer Geraden durch 2 Punkte

$$g(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{2}$$

Diese ist eine allg. gültige Lösungsformes: man muss nur die "Datenwerte" (x_1, y_1) und (x_2, y_2) einsetzen um eine explizite Funktion zu erhalten.

Aufgabe 3: Suche Gerade durch 3 Punkte

$$g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x)ax + b$$

die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$.
Durch jedes Paar (es gibt 3 davon) von Punkten läuft eine Gerade. Die drei Geraden, die so entstehen können alle verschieden sein.

Bonusaufgabe: Überzeugen Sie sich davon, dass die drei Geraden, die so entstehen, entweder *alle verschieden* oder *alle gleich* sind! Es kann also nicht passieren, dass zwei gleich sind und die dritte verschieden.

"Generische" Situation

Meistens gibt es keine Gerade die alle 3 Punkte enthält.

Wir stellen dager die folgende Frage.

Frage 1: Wir gehen wir im generischen Fall vor, wenn es keine Gerade durch alle 3 Punkte gibt?
Wir machen Kompromisse: wir möchten allen drei Punkten möglichst *nahe* mit der Gerade kommen.

Frage 2: Was ist dann die *beste* Gerade?

Frage 3: Wie messe ich die *Qualität*, bzw. den *Fehler* der Gerade?

Vorschlag für Frage 3: Ich messe die "vertikale Abstand" (warum, wird später klar) zwischen der Gerade unn dem jeweiligen Punkt, also zwischen x_j und $g(x_j)$. Und ich nehme die Summe dieser Abstände:

$$Q = \sum_{i=1}^{3} |g(x_i) - y_i|$$

Bemerkung: Die Beträge hebe ich eingesetzt, damit es sich keine "negative Abstände" gibt, also damit $Q \geq 0$ immer gilt. Sonst könnten sich Terme gegenseitig wegheben, und es könnte sich ein Nullfehler ergeben, obwohl die Gerade durch keinen Punkt läuft.

Verbesserte Definition des Fehlers: Wir nehmen nun die Summe der Quadrate der einzelnen Abständen:

$$Q := \sum_{n=1}^{3} (g(x_n) - y_n)^2$$

Frage 4: Warum ist diese eine gute Definition? Warum, z.B., zweite Potenze und nicht dritte oder vierte?

(erste) Antwort zu Frage 4: setze
$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Dann ist $Q = ||\vec{z} - \vec{y}||^2$ die (das Quadrat des) *Euklidische Abstands zwischen den Punkten $\vec{z}$ und $\vec{y}$ in* $\mathbb{R}^3$. Ich kann also dieses Q als den Abstand zwischen den "Dateisätze" (y_1, y_2, y_3) und $(g(x_1), g(x_2), g(x_3))$ versehen.
Wenn ich Q minimiere, minimiere ich diesen Abstand.

Frage 5: Wie sieht das entsprechende Problem aus, wenn ich mehr als 3 Punkte in der x-y-Ebene habe?

Frage 6: Wir haben gesehen, dass das quadratische Gesamtfehler Q eine Funktion von 2 Variablen ist: $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a, c) \mapsto Q(a, c)$. Wie finde ich das Minimum dieser Funktion Q?

Rollentausch der "konstanten" und "Variablen"

Jetzt sind die Werte x_i, y_i sind bekannt, und die Parameter a, c sind gesucht!

Wir suchen also die Werte (a_0, c_0), die Q minimieren. Also (a_0, c_0) sodass, $Q(a_0, c_0)$ der kleinste Wert ist, den die Funktion $Q(a, c)$ annehmen kann.