Prof. Dr. Ivan Veselić Dr. Michele Serra

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Aufgabe 1) (Beträge, Intervallen, Teilmengen von $\mathbb{R}$)

(a) Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$

i) die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die $|5 - |x - 2|\,| < 1$ erfüllen.

ii) die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die $|x-4| < 2$ erfüllen, geschnitten mit dem Intervall $(2, 6)$

iii) die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die $|4-x| \leq 2$ erfüllen, geschnitten mit dem Intervall $(2, 6)$

iv) (Schwieriger) die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die $|5 - \frac{2}{x}| < 1$ erfüllen.

(b) Entscheiden Sie, für jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ in Teil (a), ob sie

- ein Intervall ist;
- die Vereinigung von Intervallen ist.

(c) Geben Sie mit einer Fallunterscheidung an, wie die Menge

$$(a, b) \cap (c, d)$$

aussehen kann.

Ableitungsregeln: die Kettenregel

Verkettung von Funktionen

Man kann Funktionen miteinander *verketten*, d.h., hintereinander anwenden: Betrachte die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$. Dann gibt es die beiden *Verkettungen* (auch *Verknüpfungen* oder *Kompositionen* genannt)

$$g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 + 1$$
$$f(g(x)) = g(x)^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Hitergrund hierzu findet man in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitt 5.4.

Aufgabe 2) (Funktionsverkettung)

Skizzieren Sie die Verkettungen $f(g(x))$ und $g(f(x))$ für die Funktionen

(a) $f(x) = 3x$ und $g(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^2$ und $g(x) = |x|$

Die Kettenregel

Die Kettenregel bei Ableitung besagt:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Hitergrund zur Kettenregel findet man in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Seite 398.

Aufgabe 3) (Ableitung verketteter Funktionen)

Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen

(a) $f(x) = (x^{\frac{1}{5}} + 2x)^3$

(b) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^4$

(c) (Schwieriger aber wichtig!) können Sie eine allgemeine Formel angeben für die Ableitung der Potenz eines Polynoms?

$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j x^j\right)^M$ wobei M, N natürliche Zahlen sind und $a_j \in \mathbb{R}$