technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

DR. MICHELE SERRA

Synopse zur 2. Vorlesung – 03.09.2024

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel I – Grundlagen

1 Notation für Funktionen

Häufige Situation:

$$f\colon D \longrightarrow W,\ x \longmapsto f(x)$$

.

Dabei sind D, W Teilmengen von $\mathbb{R}$

- D heißt *Definitionsbereich*;
- W heißt *Wertbereich*;
- $f(x)$ ist die *Abbildungsvorschrift*. z.B.
  - $f(x) = \sqrt{x}$
  - $f(x) = 2x^2 + 3$
  - $f(x) = \sin(x)$
- Definitions-, Wertbereich und Abbildungsvorschift müssen zusammenpassen! z. B., die Vorschrift $f(x) = \frac{1}{x-3}$ is nicht erlaubt, wenn $3 \in D$. In der Tat, für $x = 3$ ist $f(x) = \frac{1}{x-3}$ nicht definiert.

1.1 Definitions-, Wertbereich und Abbildungsvorschift müssen zusammenpassen!

- Der Definitionsbereich darf nicht zu groß gewählt werden. z.B.:
  - für die Vorschrift $f(x) = \frac{1}{x-3}$ darf D die Zahl 3 nicht enthalten. In der Tat, für $x = 3$ ist $f(x) = \frac{1}{x-3}$ nicht definiert.
  - für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ müssen wir D innerhalb von $[0, \infty)$ wählen, etwa $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, denn aus negativen Zahlen kann ich keine Wurzel ziehen.
    Hier dürfen wir den Wertbereich einschränken, weil die Quadratwurzel immer nichtnegativ ist. Also
    $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \sqrt{x}$.
- Der Wertbereich darf nicht zu klein gewählt werden. z.B.:
  - Für die Vorschrift $f(x) = \sqrt{x}$ mit Definitionsbereich $[0, \infty)$ darf ich nicht $(5, \infty)$ als Wertbereich wählen, da $4 \in [0, \infty)$ aber $f(4) = \sqrt{4} = 2 \notin (5, \infty)$

1.2 Benennung der Variable

Die Funktionen
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(z) = z^2$ stellen genau die gleiche Funktion dar.

Warnung! Bei Definition/Angabe einer Funktion, nicht nur die Abbildungsvorschrift sondern immer auch den Definitions- und Wertbereich angeben.

2 Wiederholung: Intervallen

2.1 Schreibweise von Intervallen

Einfache Intervallen kann man so schreiben

(a) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

(b) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \text{ und } x < b\}$ offenes Intervall

(c) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x < b\}$ halboffenes Intervall

(d) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \text{ und } x \leq b\}$ halboffenes Intervall

(e) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

(f) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

(g) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

(h) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

und die obige Schreibweise kann man kombinieren:

- $[a, \infty) \cap (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\} = [a, b]$

2.2 Länge eines Intervalles

- Beispiele (a) bis (d) in 2.1 sind *endliche Intervalle*. Die Länge ist dabei $b - a$.
- Beispiele (e) bis (h) sind *unendliche Intervalle.*

2.3 Schnitt von Intervallen

$$\begin{aligned}(2, 5) \cap [3, 9] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ und } x < 5 \text{ und } x \geq 3 \text{ und } x \leq 9\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ und } x \geq 3\} \\ &= [3, 5)\end{aligned}$$

Der Schnitt zweier Intervallen ist immer ein Intervall. Betrachte z.B.:

$$[-5, -2] \cap)0, \infty = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \text{ und } x \leq -2 \text{ und } x > 0\} = \varnothing.$$

die leere Menge ist also auch ein Intervall. Auf folgender Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung benutzen.

$$(a, b) \cap (0, \infty) = \begin{cases} (0, b) & \text{falls } a \leq 0 \text{ und } b > 0 \\ (a, b) & \text{falls } a < 0 \text{ und } b > 0 \\ \varnothing & \text{falls } b \leq 0 \end{cases}$$

2.4 Vereinigung von Intervallen

- $(2,5) \cup [3,9] = \ldots = (2,9]$
  $[-5,-2] \cap (0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq -5 \text{ und } x \leq -2) \text{ oder } x > 0\}$

Also die Vereinigung zweier Intervallen ist nicht immer ein Intervall.

3 Ableitungen von Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die wir annehmen, dass es eine Ableitung existiert.

- Notation/Definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- Andere Schreibweise für die Ableitung

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

- Zweite Ableitung

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{df'}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

3.1 Summenregel

Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

oder, in der anderen Notation

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

Allgemeiner gilt, für N Funktionen $f_1, \ldots, f_N$,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dx} f_j(x)$$

Beispiel $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3$. Dann

$$\frac{d}{dx}(f_1+f_2+f_3)(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{3} f_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dx} f_j(x) = \sum_{j=1}^{3} j x^{j-1} = 1 + 2x + 3x^2$$

Summe von Funktionen

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **definieren wir** eine **neue** Funktion $f+g$ wie folgt:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$