technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

DR. MICHELE SERRA

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Hinweis

In grünen Kästchen wie diesem sind Ergänzungen zur Theorie mit Definitionen, Beispielen und Hinweisen zu finden.

Ausdrücke von Summen und Produkten

Hintergrund zum Thema der Aufgaben finden Sie in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitte 4.1 und 4.2.

Aufgabe 1)

Schreiben Sie folgende Summen unter Verwendung des Summen-Zeichens $\sum$

(a) $12 + 14 + 16 + 18 + \ldots + 42$

(b) $1 + 6 + 11 + \ldots + 36$

(c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 25 - 26$

(d) $-\frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} + \frac{5}{64}$

(e) $\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{3}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(5x) + \frac{1}{5}\sin(6x)$

Aufgabe 2)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\sum_{k=2}^{5}(2k+1)$

(b) $\sum_{k=2}^{5} 2k+1$

(c) $\sum_{k=5}^{2}(2k+1)$

(d) $\sum_{k=2}^{5} 3$

Weitere Übungsaufgaben zum Thema befinden sich z.B. in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitt 4.4

Ableitungsregeln: Summe, Produkt, Polynome

Hintergrund zum Thema der Aufgaben finden Sie in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitt 10.3

Monomiale Funktionen

Eine *monomiale Funktion* ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax^b$, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{N}$ Konstante sind. Dazu gehören, z.B., Funktionen wie

- $f_1(x) = 3x^2, \qquad \text{mit } a = 3 \text{ und } b = 2$
- $f_2(x) = x^{2024}, \qquad \text{mit } a = 1 \text{ und } b = 2024$
- $f_3(x) = ex^{15}, \qquad \text{mit } a = e \approx 2.71828 \text{ und } b = 15$

sowie die Spezialfälle

- $f_4(x) = a \qquad \text{mit } a = 1 \text{ und } b = 0$
- $f_5(x) = 1 \qquad \text{mit } a = 1 \text{ und } b = 0$
- $f_6(x) = 0 \qquad \text{mit } a = 0 \text{ und } b \text{ beliebig}$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = ax^b$ wird als $f'(x) = b \cdot ax^{b-1}$ berechnet. Man multipliziert mit dem Exponent von x und reduziert den Exponent um 1.
Wir werden auch folgende Schreibweise benutzen.

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

Für die obige Funktionen haben wir z.B.:

- $\frac{d}{dx} f_1(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} = 6x$
- $\frac{d}{dx} f_4(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \qquad$ *die Ableitung einer konstanten Funktion ist immer* 0.

Die selbe Regeln gelten auch, wenn die Exponente keine natürliche Zahlen sind, sonder allgemeine reelle Zahlen:

$$\frac{d}{dx}(x^\pi) = \pi x^{\pi-1}; \qquad \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Polynomiale Funktionen

Eine *polynomiale Funktion* ist die Summe mehrerer monomialen Funktionen. Also eine Funktion der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N \quad \text{wobei } a_0, \ldots, a_N \text{ reelle Zahlen sind}$$

oder allgemeiner

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

wobei jede f_i eine monomiale Funktion ist. Also z.B., mit den Funktionen von Oben

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 3x^2 + x^{2024} + ex^{15}$$

Summenregel bei Ableitungen

Die Summenregel besagt:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{N} f_j'(x) \qquad \text{oder anders geschrieben} \qquad \frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{N} f_j(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dx} f_j(x)$$

(vgl. Vorlesung).
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ gelten

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a} \qquad \text{und} \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Aufgabe 3)

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 3x^2 + x + 4$

(b) $f(x) = 2 + x - 2x^{12}$

(c) $f(x) = 7x^5 + x^2 + 3x + 1$

(d) $f(x) = x^{33}$

(e) $f(x) = 3x^{-2} + x + 4$

(f) $f(x) = 2 + \sqrt{x} - 2x^{5/2}$

Produktenregel bei Ableitungen

die Produktenregel bei Ableitungen besagt

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

oder anders notiert

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)$$

Also z.B., für $f(x) = 3x^2$ und $g(x) = x^2 + 2$ gelten
einerseits: $\frac{d}{dx} f(x) = 6x$ und $\frac{d}{dx} g(x) = 2x$ und somit, nach der Produktenregel

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = 6x(x^2 + 2) + 3x^2(2x) = 6x^3 + 12x + 6x^3 = 12x^3 + 12x$$

Andererseits, es gilt
$f(x)g(x) = 3x^4 + 6x^2$ und somit, nach der Summenregel $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = 12x^3 + 12x$.

Aufgabe 4)

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = (x^3 + 2x)(\sqrt{x} - 2)$

(b) $f(x) = (x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{4}})(3\sqrt{x} - 6)$

Weitere Übungsaufgaben zum Thema befinden sich z.B. in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Ende von Abschnitt 10.5.