

Analysis III für Lehramt

Wintersemester 2022/23

Ivan Veselić

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Literatur	2
1 Integration im $\mathbb{R}^n$	4
1.1 Das Lebesgue-Maß	4
1.2 Das Lebesgue-Integral	16
1.3 Konvergenzsätze	30
1.4 Der Satz von Fubini	38
1.5 Transformationsformel	48
2 Vektoranalysis	59
2.1 Kurvenintegrale und Potentiale	59
2.2 Integralsätze in der Ebene	73
2.3 Flächenintegrale	83
3 Differentialgleichungen	98
3.1 Wachstumsprozesse	99
3.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	103
3.3 Differentialgleichungen der klassischen Mechanik	108

Vorwort

Wie dieses Skript entstanden ist

Im Wintersemester 2022/23 habe ich an der TU Dortmund die Vorlesung „Analysis III für Lehramt Gymnasium und Berufskolleg“ gehalten. Die Analysis I am Anfang des Vorlesungszyklus wurde wegen der damals aufgrund von Covid geltenden Einschränkungen mit Kamera aufgenommen und die entsprechenden Videos unter Moodle zu Verfügung gestellt. Da es bei Lehramtsstudenten häufiger zu Überschneidungen im Stundenplan kommt, habe ich mich entschieden, bei der Analysis III ebenfalls Videoaufnahmen zu erstellen.

Das vorliegende Skript orientiert sich zum einen an meinen handschriftlichen Notizen, anhand derer ich die Vorlesung gehalten habe, und zum anderen an der Vorlesung, wie sie an der Tafel stattgefunden hat und in den Videos festgehalten ist. Manchmal bin ich in der Vorlesung selbst von den Notizen abgewichen, im Großen und Ganzen hielt ich mich aber recht eng daran. An manchen Stellen habe ich die handschriftlichen Notizen nach der Vorlesung nochmal nachbearbeitet.

Die Videos — genauer: deren URLs in Moodle — sind an den Stellen im Skript, die dem entsprechenden Vorlesungsdatum entsprechen, verlinkt.

Es gibt sicherlich eine Reihe von kleineren Fehlern und ich arbeite — zusammen mit freundlichen Menschen, die mich auf Fehler hinweisen — daran, diese auszumerzen.

Ein genereller Hinweis zum Sinn und Zweck von Skripten: Das Lesen von Vorlesungsnotizen und Skripten kann das eigene Denken und Nachvollziehen der Sachverhalte, Schritte und Argumente nicht ersetzen. Das eigentliche Ziel ist die Verinnerlichung der mathematischen Wahrheiten, so dass man sie wie etwas Eigenes beherrscht und anderen mitteilen kann. Falls Ihnen an einzelnen Stellen ein Skript zu knapp formuliert ist, um die dargestellten Sachverhalte zu verstehen, konsultieren Sie die angegebene Literatur.

Quellen und Bezüge

In der Vorlesung bezog ich mich insbesondere auf die beiden Skripte [Bru21] und [Kab18], sowie die Bücher [Kab97, Kab99] und zu einem geringeren Maße auf das Buch [Bra10]. Ich bedanke mich bei den Kollegen Rainer Brück und Winfried Kaballo, dass sie mir ihre unveröffentlichten Skripte freundlicherweise zu Verfügung gestellt haben.

Als weitere Literatur können zum Beispiel die anderen im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher nützlich sein.

Danksagung

Ich bedanke mich bei den Assistenten der Vorlesung, Herrn Max Kämper, Frau Friederike Lemming und Herrn A. Seelmann. Herrn Seelmann danke ich in besonderer Weise für die

Organisation der Übungen und die Vertretung in einzelnen Vorlesungsterminen. Frau Henrike Bischoff danke ich für das Aufnehmen und Hochladen der Vorlesungsvideos. Den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung danke ich für die Hilfe beim Tafelwischen, das Interesse, die Fragen und die aktive Teilnahme.

Auch diese Vorlesung hat mir viel Freude bereitet!

Herrn A. Nuss danke ich für die kompetente und zügige Erstellung des $\text{\LaTeX}$ -Satzes dieses Skripts und Herrn Seelmann für Korrekturhinweise.

Dortmund, den 2. Juli 2024

Ivan Veselić

Literatur

- [Bra10] Christian Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. Berlin: De Gruyter Studium, 2010.
- [Bru21] Rainer Brück. Analysis I–III für Lehramt Gymnasium, 2021. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [For17a] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [For17b] Otto Forster. *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [FS13] Otto Forster and Thomas Szymczak. *Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [FW17] Otto Forster and Rüdiger Wessoly. *Übungsbuch zur Analysis 1. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.
- [Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.
- [Kab97] Winfried Kabbalo. *Einführung in die Analysis II*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [Kab99] Winfried Kabbalo. *Einführung in die Analysis III*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- [Kab00] Winfried Kabbalo. *Einführung in die Analysis I*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

- [Kab18] Winfried Kaballo. Vorlesung Analysis I / Lehramt, 2018. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [Koe04a] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Berlin: Springer, 2004.
- [Koe04b] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Berlin: Springer, 2004.
- [Tao16a] Terence Tao. *Analysis I*, volume 37. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.
- [Tao16b] Terence Tao. *Analysis II*, volume 38. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.

LINK: TEIL 1 DER 1. VORLESUNG VOM 12.10.2022

1 Integration im $\mathbb{R}^n$

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Definition und Berechnung von Integralen von Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Dies geht beispielsweise besonders einfach mit der Indikatorfunktion einer Menge A , also

$$f = \mathbb{1}_A.$$

Beispiel. Im Fall $n = 1$ setze $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Intuitiv erhält man dann:

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx = \int_a^b dx = b - a.$$

Im Fall $n = 2$ erhält man entsprechend zusätzlich für $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$:

$$\begin{aligned} f = \mathbb{1}_{[a,b] \times [c,d]} &\rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b] \times [c,d]}(x, y) dx \right) dy \\ &= \dots \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[c,d]}(y) dy \\ &= (b - a)(d - c). \end{aligned}$$

Fazit. Um Indikatorfunktionen integrieren zu können, muss zunächst herausgefunden werden, wie Flächeninhalte von Mengen im $\mathbb{R}^2$ und Volumina von Mengen im $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^n$) berechnet werden. Bei Rechtecken oder Quadern besitzt man eine gewisse Intuition, was das Volumen sein sollte – wie eben bestimmt wurde. Jedoch wird ein Volumenbegriff für allgemeine Mengen benötigt.

1.1 Das Lebesgue-Maß

Bezeichne für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \leq b_k$ für $k = 1, \dots, n$ die Menge

$$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k]$$

als einen *Quader im $\mathbb{R}^n$* oder *n -dimensionales Intervall*.

Der Menge Q wird dann das Volumen bzw. das *Lebesgue-Maß*

$$\lambda(Q) = \lambda^n(Q)^{[1]} = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) \tag{1.1.1}$$

zugeordnet.

^[1]Man schreibt zusätzlich das n in den Exponenten, um die Dimension zu betonen.

Beispiel. Für $n = 2$ setze $Q := [a, b) \times [c, d)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wie oben. Der Flächeninhalt des Rechtecks Q ist dann gegeben durch

$$\lambda^2(Q) = (b - a) \cdot (d - c).$$

Für $n = 3$ setze $\tilde{Q} := \bigtimes_{k=1}^3 [a_k, b_k)$. Das Volumen des Quaders $\tilde{Q}$ ist dann gegeben durch

$$\lambda^3(\tilde{Q}) = \prod_{k=1}^3 (b_k - a_k).$$

Bezeichne nun $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) := \{A \mid A \subset \mathbb{R}^n\}$ als die *Potenzmenge* von $\mathbb{R}^n$. Gesucht ist dann

- * eine möglichst große Klasse $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und
- * eine Abbildung

$$\lambda : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]^{[2]},$$

die die folgenden Axiome erfüllt:

- (A1) Für alle Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist die Formel (1.1.1) erfüllt; auf Quadern ist λ also schon festgelegt.
- (A2) *Translationsinvarianz:*
Für die folgende Translation

$$\tau_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tau_a(x) = x + a$$

um $a \in \mathbb{R}^n$ und jedes $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ gelten:

$$\tau_a(M) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \lambda(\tau_a(M)) = \lambda(M).$$

- (A3) *Rotations- und Spiegelungsinvarianz:*
Für jede orthogonale Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jedes $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ gelten:

$$\varphi(M) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \lambda(\varphi(M)) = \lambda(M).$$

- (A4) *Additivität*
Für $M, N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ gelten:

$$M \cap N, M \cup N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \lambda(M \cup N) + \lambda(M \cap N) = \lambda(M) + \lambda(N).$$

^[2] $[0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$

(A5) Ist $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und die Mengenfolge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *disjunkt*^[3], so gelten

$$A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\lambda(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k). \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

Motivation für σ -Additivität: Die σ -Additivität wird durch die Approximation des Flächeninhaltes eines Kreises motiviert: Dabei erhält man das $(k+1)$ -te Polygon durch das Hinzufügen von disjunkten Dreiecken ($\approx$ halben Rechtecken) zum k -ten Polygon.

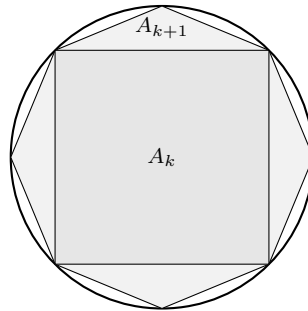


Abbildung 1: Visualisierung der Approximation einer Kreisfläche durch Hinzufügen von Polygonen

LINK: TEIL 2 DER 1. VORLESUNG VOM 12.10.2022

Leider ist es jedoch nicht möglich, eine Funktion λ auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ zu finden, die alle Axiome (A1) - (A5) erfüllt. Daher muss ein Kompromiss geschlossen werden: Entweder

- (a) behält man alle Axiome (A1) - (A5) bei, wählt aber stattdessen $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ echt kleiner als $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$,

oder

- (b) man verzichtet auf einen Teil der Axiome und definiert dann dadurch eine Abbildung

$$\lambda_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty].$$

In der Tat wird zunächst (b) umgesetzt, um dann schließlich ein passendes Mengensystem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ zu identifizieren, für welches (a) gilt.

^[3]Die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Mengen heißt disjunkt $\Leftrightarrow$ Für alle $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ existiert *genau ein* k_0 mit $x \in A_{k_0}$.

Definition 1.1.1. Zu beliebigem $A \subset \mathbb{R}^n$ setzt man

$$\lambda_*(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid \text{Alle } Q_k \text{ sind Quader und } A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\}$$

und nennt es *äußeres Maß* von A .

Beachte: Die Bedingung „ $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ “ ist immer erfüllbar wegen

$$A \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]^n =: \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k.$$

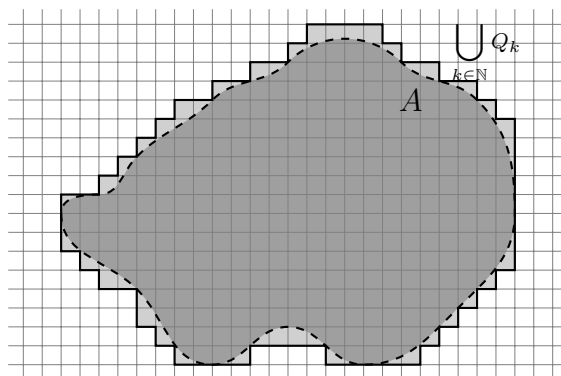


Abbildung 2: Visualisierung eines äußeren Maßes in $\mathbb{R}^2$

Außerdem kann $\lambda_*(A)$ alle Werte von $[0, \infty]$ annehmen. (Übung)

Die so definierte Abbildung $\lambda_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ ist nicht σ -additiv (vgl. (A5)), aber zumindest σ -subadditiv: Für beliebige $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, gilt also

$$\lambda_* \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_*(A_k). \quad (1.1.2)$$

Die σ -Additivität sollte dennoch irgendwie gesichert werden. Dazu „erzwingt“ man diese durch die Selektion von passenden Teilmengen:

Definition 1.1.2. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann *Lebesgue-messbar* (oder *L-messbar* bzw. *messbar*), wenn für alle Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda_*(Q) = \lambda_*(Q \cap A) + \lambda_*(Q \setminus A). \quad (1.1.3)$$

Das System aller solcher Mengen wird (jetzt) mit $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ bezeichnet. Für $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ wird dann $\lambda(A) := \lambda_*(A)$ gesetzt und als *Lebesgue-Maß* von A bezeichnet.

Die Formel (1.1.3) wird auch *Quaderbedingung* genannt.

Dank der (allgemein gültigen) σ -Subadditivität in (1.1.2) gilt automatisch

$$\lambda_*(Q) \leq \lambda_*(Q \cap A) + \lambda_*(Q \setminus A).$$

Statt (1.1.3) kann also äquivalent gefordert werden, dass

$$\lambda_*(Q) \geq \lambda_*(Q \cap A) + \lambda_*(Q \setminus A) \quad (1.1.4)$$

gilt.

Satz 1.1.3. *Das Mengensystem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ der L -messbaren Mengen ist eine σ -Algebra, also erfüllt die Bedingungen:*

- (i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,
- (ii) $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A^C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und
- (iii) $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

(Ohne Beweis)

Satz 1.1.4. *Das System $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und das Lebesgue-Maß λ erfüllen:*

- (a) λ gehorcht allen Axiomen (A1) - (A5).
- (b) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$, A offen und B abgeschlossen. Dann gilt

$$A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

- (c) Ist $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(A) < \infty$, so gilt

$$\lambda(A) = \sup \left\{ \lambda(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt} \right\}.$$

- (d) Ist $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, so gilt:

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \lambda(U) \mid U \supset A, U \text{ offen} \right\}.$$

- (e) Ist $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$, so existieren eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge B , so dass gilt

$$B \subset A \subset U \quad \text{und} \quad \lambda(\underbrace{U \setminus B}_{=U \cap B^C}) < \varepsilon$$

(Ohne Beweis)

Es gibt keine andere Abbildung $\tilde{\lambda} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, die alle Axiome (A1) - (A5) erfüllt; das heißt, dass das Lebesgue-Maß eindeutig durch die Axiome (A1) - (A5) festgelegt ist.

Frage: Erfüllen vielleicht alle $A \subset \mathbb{R}^n$ die **Quaderbedingung**? In diesem Fall würde dann doch $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gelten.

Dies ist tatsächlich *nicht* der Fall. Giuseppe Vitali konstruierte ein Beispiel von Mengen A mit $A \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. **Satz von Vitali**).

Es werden dementsprechend Hilfsmittel benötigt, um Lebesgue-Volumina von Mengen berechnen bzw. abschätzen zu können. Einen ersten Schritt bietet die folgende Definition:

Definition 1.1.5. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, falls

$$\lambda_*(M) = 0 \quad (*)$$

gilt.

Bemerkung 1.1.6.

- (a) Die Formel $(*)$ bedeutet ausgeschrieben:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit

$$M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < \varepsilon.$$

- (b) Ist $N \subset M$ und M eine Nullmenge, dann ist auch N eine Nullmenge.
(c) A priori wurde in Definition 1.1.5 nicht gefordert, dass M L-messbar ist. Allerdings gilt: Ist Q ein Quader und M eine Nullmenge, dann ist $Q \cap M \subset M$ auch eine Nullmenge, es gilt also $\lambda_*(Q \cap M) = 0$. Damit folgt

$$\lambda_*(Q) \geq \lambda_*(Q \setminus M) + 0 = \lambda_*(Q \setminus M) + \lambda_*(Q \cap M).$$

Also ist die Gleichung (1.1.4) (äquivalent zur **Quaderbedingung**) erfüllt und damit jede Nullmenge automatisch L-messbar.

LINK: TEIL 1 DER 2. VORLESUNG VOM 17.10.2022

Beispiel 1.1.7.

- (a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $N_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$. Dann ist M ebenfalls eine Nullmenge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Bemerkung 1.1.6 zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(Q_k^j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ von Quadern, so dass

$$N_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_k^j \quad \text{und} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_k^j) < \varepsilon \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Die Familie $\{Q_k^j \mid k, j \in \mathbb{N}\}$ ist eine abzählbare Menge von Quadern, also eine Folge von Quadern. Weiter gilt

$$M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_k^j$$

und damit

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_k^j) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon. \quad \square$$

(b) Für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\{a\} \subset \bigcap_{k=1}^n [a_k, a_k + \varepsilon)$$

und damit auch

$$\lambda_*^n(\{a\}) \leq \varepsilon^n \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Also ist jede einpunktige Menge eine Nullmenge.

Wegen (a) gilt insbesondere, dass jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist; so ist beispielsweise die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen eine Nullmenge in $\mathbb{R}$.

┌ **Definition 1.1.8.** Eine Menge M heißt genau dann **abzählbar** bzw. **überabzählbar**, wenn gilt

$$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow M, \quad \varphi \text{ ist bijektiv.}$$

└

(c) Setze $E_0 := [0, 1]$. Entfernt man aus dem Intervall das mittlere Drittel, also das Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, so erhält man dann

$$E_1 := E_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Setze nun analog

$$E_2 := E_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

und weiter

$$E_{k+1} := E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}\right),$$

wobei $I_{k,j}$ offene Intervalle der Länge $3^{-(k+1)}$ sind.

E_k ist eine disjunkte Vereinigung von 2^k abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-k} . Eine Menge C mit

$$C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

heißt dann *Cantor-Menge* oder *cantorsches Diskontinuum*.

Wie groß ist nun C ? Es enthält die Endpunkte aller entfernten Teilintervalle, das heißt $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \dots$, und sowohl die Zahl 0 als auch die Zahl 1. Wie man erkennen kann, ist C *nicht* endlich. Dennoch gilt, dass C eine Nullmenge ist.

Beweis. Es gilt

$$C \subset E_k \quad \text{und} \quad \lambda_*(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_*(C) \leq \inf \lambda_*(E_k).$$

Somit ist C eine Nullmenge. □

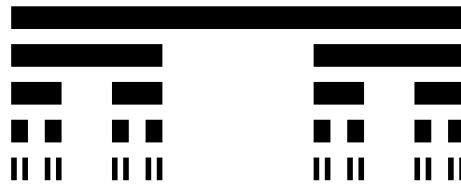


Abbildung 3: Visualisierung der ersten fünf Iterationsschritte zur Konstruktion der Cantor-Menge

Des Weiteren ist C überabzählbar.

Beweis. Um die Überabzählbarkeit von C zu zeigen, konstruiert man zunächst sowohl eine dyadische als auch eine triadische Darstellung von $s \in [0, 1]$ (vgl. Vorlesung Analysis II (Lehramt), Ende §. 4): Für $a_k \in \{0, 1\}$ bzw. $x_j \in \{0, 1, 2\}$ besitzt $s \in [0, 1]$ eine (fast) eindeutige dyadische bzw. triadische Entwicklung

$$s = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k 2^{-k} = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j 3^{-j}.$$

Wie bei Dezimalbrüchen kann eine abbrechende triadische Darstellung

$$s = \frac{x_1}{3} + \dots + \frac{x_{N-1}}{3^{N-1}} + \frac{1}{3^N}$$

geschrieben werden als

$$s = \frac{x_1}{3} + \dots + \frac{x_{N-1}}{3^{N-1}} + 0 + \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{2}{3^{N+m}}. [4]$$

Wird eine solche Darstellung gewählt, dann gilt:

$s \in C \Leftrightarrow$ In der triadischen Darstellung kommt nie die Ziffer 1 vor.

$\Leftrightarrow s \in [0, 1]$ wobei alle Mittelstücke entfernt wurden.

Begründung: Bei der Betrachtung von E_k , erkennt man, dass die triadischen Entwicklungen jeder Zahl in E_k niemals die Ziffer 1 an der k -ten Nachkommastelle besitzen, da jede Zahl auf den „mittleren Drittelintervallen“, die diese Eigenschaft besitzen, entfernt werden: Induktiv ergibt sich

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{\text{Triadische Entwicklungen ohne Ziffer 1}\}.$$

Dabei ist Folgendes zu beachten: Es gilt

$$\frac{1}{3} \in C \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} = 0,1_3 = 0,0\bar{2}_3,$$

$$\frac{1}{9} \in C \quad \text{und} \quad \frac{1}{9} = 0,01_3 = 0,00\bar{2}_3.$$

Diese Eigenschaft lässt sich für jegliche Randpunkte der Intervalle in E_k für alle $k \in \mathbb{N}$ aufweisen. Wegen dieser Darstellung gilt dann

$$C = \left\{ s \in [0, 1] \mid s \text{ besitzt eine triadische Entwicklung ohne die Ziffer 1} \right\}.$$

Betrachte nun für

$$C = \left\{ s \in [0, 1] \mid s = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{x_j}{3^j}, \quad x_j \in \{0, 2\} \right\}$$

die Abbildung $\psi: C \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\psi \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{x_j}{3^j} \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{x_j}{2} \cdot \frac{1}{2^j} \right).$$

ψ ist bijektiv, insbesondere auch surjektiv. Da das Intervall $[0, 1]$ überabzählbar ist (s. Lemma 1.1.9), ist auch C überabzählbar. $\square$

Dass das Intervall $[0, 1]$ überabzählbar ist, wird in dem folgenden Lemma gezeigt:

Lemma 1.1.9. *Das Intervall $[0, 1]$ ist überabzählbar.*

Beweis. Es sei $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung. Um zu zeigen, dass Φ nicht bijektiv ist, reicht es, zu zeigen, dass Φ nicht surjektiv ist. Konstruiere dazu dann ein $x \in [0, 1]$ mit $x \neq \Phi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer Intervallschachtelung (vgl. Vorlesung Analysis I (Lehramt), §. 6).

Sei dazu $J_1 \subset [0, 1]$ ein echtes abgeschlossenes Intervall mit $\Phi(1) \notin J_1$. Teile nun J_1 in drei

^[4]Dies ist vergleichbar mit der Darstellung $0,1 = 0,0\bar{9}$.

abgeschlossene Intervalle gleicher Länge. Mindestens eines davon enthält $\Phi(2)$ nicht – nenne dieses J_2 . Setze nun so analog fort, teile also J_k , $k \in \mathbb{N}$, in 3 gleich lange abgeschlossene Intervalle, wobei mindestens eines davon $\Phi(k+1)$ nicht enthält – nenne dieses Intervall J_{k+1} .

Nun gilt

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots \quad \text{und} \quad \lambda^1(J_{k+1}) = \frac{1}{3}\lambda^1(J_k) \quad \text{und} \quad \Phi(k) \notin J_k.$$

Aufgrund der Intervallschachtelung gilt nun:

$$\exists x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} J_k \subset [0, 1], \quad \text{insbesondere } x \neq \Phi(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad \square$$

LINK: TEIL 2 DER 2. VORLESUNG VOM 17.10.2022

┌ **Übung:** Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$ kompakt ist und keine inneren Punkte enthält. └

Bemerkung. Jedes $y \in C$ ist ein Häufungspunkt in C .

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ sei $J_k = J_k(y)$ dasjenige Intervall von E_k , das y enthält. Wegen $\lambda(J_k) = 3^{-k}$ gilt für $k \geq k_0$

$$J_k \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon).$$

Sei $x_k \in \{\min J_k, \max J_k\} \setminus \{y\}$ mindestens einer der J_k -Endpunkte mit $x_k \neq y$. Es folgt direkt

$$x_k \in C \quad (\text{vgl. Beispiel 1.1.7 (c)}) \quad \text{und} \quad |x_k - y| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhält man eine Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$. □

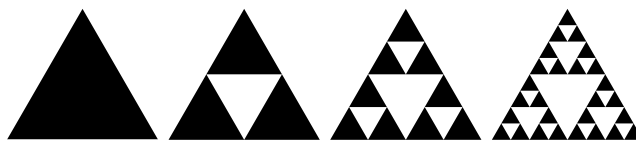


Abbildung 4: Eine analoge Konstruktion im $\mathbb{R}^2$: Das Sierpinski-Dreieck

Beispiel 1.1.10.

(a) Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existiert eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}$ ohne innere Punkte mit $\lambda^1(A) \geq N$.

Beweis. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ und $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Setze nun

$$I_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right)$$

und $M := [0, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Da I_k offen ist, ist M abgeschlossen, insbesondere messbar. Wegen $M \subset [0, 1]$ ist es auch beschränkt und damit kompakt. Weiter gilt

$$\lambda^1 \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right) \stackrel{(A5)}{\leq} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \lambda \left([0, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right) \\ &\geq 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k) \\ &\geq 1 - \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man durch die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Translaten von M eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}$ erhalten, wie behauptet und mit beliebig großem Lebesgue-Maß. $\square$

Übung: A hat keine inneren Punkte.

(b) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann gilt

$$\lambda(G) = 0.$$

Beweis. Es existiert ein $a \in \mathbb{R}^2$ und eine „Rotation“ $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass

$$G_0 := \tau_a \circ \rho(G) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Wähle nun zu $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ein Q_k mit

$$Q_k := [-k, k] \times \left[-\frac{\varepsilon}{k} \cdot 2^{-(k+2)}, \frac{\varepsilon}{k} \cdot 2^{-(k+2)} \right],$$

dann gilt

$$G_0 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$$

und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(2k \cdot \frac{2\varepsilon}{k} \cdot \frac{1}{2^{k+2}} \right) = \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt somit $\lambda(G_0) = 0$. $\square$

Allgemeiner: Für jedes $\nu \in \mathbb{R}^n$ ist

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \nu \rangle = \alpha\}$$

ist eine $n - 1$ -dimensionale Hyperebene und erfüllt

$$\lambda^n(H) = 0.$$

┌ **Achtung:** $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine solche Hyperebene mit $\lambda^n(H) = 0$, aber es gilt

$$\lambda^{n-1}(H) = \infty.$$

└

- (c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (echtes) Teilintervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\gamma \in C^1(I)$. Dann ist $\gamma(I)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.
Allerdings existieren auch (stetige) Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (also $\gamma \in C([0, 1])$), genannt **Peano-Kurven**, so dass $\gamma([0, 1]) = [0, 1]^2$.
- (d) Allgemeiner gilt: Für $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $d < n$, ist $f(D)$ eine λ^n -Nullmenge.

Beachte, dass wir $\mathbb{R}^d$ als Hyperebene von $\mathbb{R}^n$ wie in Beispiel (c) auffassen können und dass stetige Differenzierbarkeit Lipschitz-stetigkeit impliziert. Eine Anwendung des nächsten Lemmas liefert dann die behauptete Aussage (d).

Lemma 1.1.11. Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Dann ist $f(N)$ auch eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Da f Lipschitz-stetig ist, existiert ein $L < \infty$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty^{[5]}$$

Da N eine Nullmenge ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ von Quadern mit

$$N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < \varepsilon.$$

Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von f ist außerdem jedes $f(Q_k)$ in einem Quader W_k mit L -mal größerem Durchmesser enthalten.^[6]

Also gilt

$$f(N) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$$

und damit

$$\lambda(f(N)) \leq \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\lambda(W_k)}_{\leq L^n \lambda(Q_k)} \leq L^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < L^n \cdot \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist, ist $L^n \cdot \varepsilon$ ebenfalls beliebig klein und damit $f(N)$ eine Nullmenge. $\square$

^[5]Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, darf die Lipschitz-Stetigkeit mit $\|\cdot\|_\infty$ formuliert werden.

^[6]z.B. $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, a_k + R) \Rightarrow f(Q) \subset W = \prod_{j=1}^n [c_j, c_j + L \cdot R)$.

LINK: TEIL 1 DER 3. VORLESUNG VOM 19.10.2022

1.2 Das Lebesgue-Integral

Sei $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

- Wann ist das (Lebesgue-)Integral auf f definiert?
- Wie kann dieses berechnet werden?

Diese Fragen sollen in diesem Abschnitt behandelt werden.

Dazu gelte im Folgenden:

- * Für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathbb{1}_E: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ wie üblich die Indikatorfunktion.
- * Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, so wird

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das gleiche Integral haben wie f . Es reicht also, zunächst nur auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Funktionen zu betrachten.

- * Als Wertebereich wird sogar $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zugelassen.
- * Auch für Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ werden das *Maximum* bzw. *Minimum* von f und g

$$\max(f, g), \min(f, g): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

definiert durch

$$\max(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \min(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Weiter sei

$$f^+(x) := \max(f, 0)(x), \quad f^-(x) := -\min(f, 0)(x),$$

wobei $f = f^+ - f^-$ gilt.

Definition 1.2.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt genau dann *messbar*, wenn gilt

$$\forall a \in \mathbb{R}: f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

┌ **Übung:** Ist f messbar, dann gilt auch

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > -\infty\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \pm\infty\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

└ **Satz 1.2.2.** Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$
- (ii) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$
- (iii) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$
- (iv) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$

Beweis. Um die Äquivalenz der jeweiligen Aussagen zu zeigen, werden zum einen die Eigenschaften von $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ als σ -Algebra und zum anderen die De-Morganschen-Komplementregeln^[7] angewendet.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Für alle $a \in \mathbb{R}$ gelte $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a\} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a - \frac{1}{k}\right\}}_{\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a - \frac{1}{k}\right\} \right)^C \stackrel{1.1.3 \text{ (ii)+(iii)}}{\in} \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Für alle $a \in \mathbb{R}$ gelte $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\} = (\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a\})^C \stackrel{1.1.3 \text{ (ii)}}{\in} \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Für alle $a \in \mathbb{R}$ gelte $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}}_{\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a + \frac{1}{k}\right\} \right)^C \stackrel{1.1.3 \text{ (ii)+(iii)}}{\in} \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Für alle $a \in \mathbb{R}$ gelte $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} = (\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\})^C \stackrel{1.1.3 \text{ (ii)}}{\in} \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \quad \square$$

Bemerkung.

(i) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

^[7]z.B. $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$

(ii) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_E$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{1}_E(x) = 1\} = E, \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{1}_E(x) = 0\} = E^C.$$

Es gilt also:

$$\mathbb{1}_E \text{ ist messbar} \quad \Leftrightarrow \quad E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist jede stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} : (a, \infty) \text{ offen} &\xrightarrow[\text{Ana I}]{f \in C(U)} f^{-1}((a, \infty)) \text{ offen} \\ \Rightarrow \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} &\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \\ \Rightarrow \quad f \text{ ist messbar.} \end{aligned}$$

Was noch interessant ist: Messbare Funktionen lassen sich – wie bei stetigen, differenzierbaren oder integrierbaren Funktionen – zu neuen messbaren Funktionen kombinieren.

Satz 1.2.3. *Es seien $f, g, h, w, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

- (a) *Falls f und g messbar sind, dann sind auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ messbar. Insbesondere sind dann auch f^+, f^- und $|f| = f^+ + f^-$ messbar.*
- (b) *Ist f_k messbar für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt*

$$f(x) := \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad g(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad h(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \quad w(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

dann sind f, g, h und w ebenfalls messbar.

LINK: TEIL 2 DER 3. VORLESUNG VOM 19.10.2022

- (c) *Ist f_k messbar für alle $k \in \mathbb{N}$ und der Grenzwert*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) =: f(x)$$

existiert, dann ist f messbar.

Beweis.

- (a) Wegen Satz 1.1.3 gilt direkt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max(f, g)(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

Für den Beweis der übrigen Aussagen wird analog vorgegangen oder es wird ein Spezialfall betrachtet, der ähnlich lösbar ist.

(b) Sei f_k messbar für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt wegen Satz 1.1.3 direkt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) > a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Die übrigen Aussagen sind auf ähnliche Weise beweisbar. $\square$

Bei der Betrachtung von offenen Mengen fällt auf, dass diese interessante Eigenschaften in Bezug zur Messbarkeit aufweisen:

Satz 1.2.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann gilt:*

(i) Für $k \in \mathbb{N}$ existieren Folgen $U_k = B_{r_k}(x_k)$ von offenen Bällen mit

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k.$$

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ existieren Folgen $W_k = \times_{j=1}^n (a_j^k, b_j^k)$ von offenen Quadern mit

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k.$$

(iii) Für $k \in \mathbb{N}$ existieren Folgen $Q_k = \times_{j=1}^n [a_j^k, b_j^k]$ von Quadern mit

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k.$$

Beachte: Es handelt sich um abzählbare Vereinigungen.

Beweis.

(i) Falls $U = \mathbb{R}^n$, dann setze $U_k = B_k(0)$. Es gilt direkt

$$\mathbb{R}^n = U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k.$$

Betrachte nun den Fall $U \neq \mathbb{R}^n$ und setze $A = U \cap \mathbb{Q}^n$. Dann gilt wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^n$, dass A abzählbar ist, es gilt also

$$A = \{q_1, q_2, \dots\}.$$

Da $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ und U offen ist, ist A dicht in U . (Übung!)

Setze nun für $k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_k := \sup \{ \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(q_k) \subset U, q_k \in A \} \in (0, \infty).$$

Dabei ist $\varepsilon_k > 0$, da $q_k \in A \subset U$ und U offen ist; dadurch existiert nämlich ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q_k) \subset U$. Setze nun $U_k := B_{\varepsilon_k}(q_k)$. Dann gilt

$$U_k \subset U.$$

Behauptung: Es gilt $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$.

Beweis. Es sei $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Da $\mathbb{Q}$ dicht ist in $\mathbb{R}^n$, existiert ein $q \in \mathbb{Q}^n$ mit $\|x - q\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt also $q \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset U$, es existiert also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $q = q_k \in A$. Daraus folgt dann

$$\|x - q_k\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset U \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon_k$$

und schließlich

$$\|x - q_k\| < \varepsilon_k \quad \Rightarrow \quad x \in B_{\varepsilon_k}(q_k) = U_k.$$

Damit ist dann (i) gezeigt.

(ii) Analog.

(iii) Ähnlich beweisbar. □

Satz 1.2.5. Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen und $w \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) = w(f(x), g(x))$$

messbar.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und w stetig. Dann ist G_a gegeben durch

$$G_a := w^{-1}((a, \infty))$$

offen in $\mathbb{R}^2$. Wegen Satz 1.2.4 existiert dann eine Folge von offenen Quadern W_k , $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k = G_a, \quad W_k := (a_k, b_k) \times (c_k, d_k).$$

Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k < f(x) < b_k\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k < f(x)\}}_{\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < b_k\}}_{\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

da f messbar ist; dasselbe gilt analog für g . Also gilt

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^n \mid ((f(x), g(x)) \in W_k\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in (a_k, b_k)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in (c_k, d_k)\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) > a\} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid w(f(x), g(x)) > a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (f(x), g(x)) \in G_a\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (f(x), g(x)) \in W_k\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad \square$$

LINK: TEIL 1 DER 4. VORLESUNG VOM 24.10.2022

Korollar 1.2.6. Sind $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen, dann sind auch $f + g, f \cdot g$ messbar.

Beweis. Setze $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, w(y, z) := y + z$. Wegen Satz 1.2.5 ist dann h gegeben durch

$$h(x) = w(f(x), g(x)) = f(x) + g(x)$$

messbar.

Der Beweis ist analog für $w(y, z) := y \cdot z$. □

Die Beweisidee von Satz 1.2.5 liefert auch:

Korollar 1.2.7. Sind $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $w: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto w(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

messbar.

Beispiel 1.2.8. Seien $f_1, \dots, f_d, g_1, \dots, g_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist auch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_d(x) \end{pmatrix} \right\rangle$$

messbar, denn

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$$

ist stetig.

Definition 1.2.9.

- (a) Eine Funktion $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann *einfach* bzw. *elementar*, wenn sie ein endliches Bild $s(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$ hat.

So ist beispielsweise für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_E$ einfach. Ist des Weiteren g eine Linearkombination von solchen Indikatorfunktionen, dann ist auch g einfach.

- (b) Ist $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ einfach, $s(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, und $E_k = s^{-1}(\alpha_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = \alpha_k\}$, für $k = 1, \dots, m$, so gilt

$$s = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{E_k}. \quad (1.2.1)$$

Gleichung (1.2.1) wird die *kanonische Darstellung* einer einfachen Funktion genannt und ist eindeutig.

Des Weiteren ist jede elementare Funktion eine Linearkombination von Indikatorfunktionen und es gilt:

$$s \text{ ist eine messbare Funktion} \quad \Leftrightarrow \quad E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Erklärung zur kanonischen Darstellung: Sind $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f := \alpha \cdot \mathbb{1}_{E_1} + \beta \cdot \mathbb{1}_{E_2}, \quad (1.2.2)$$

so ist auch f eine einfache Funktion.

Für $\alpha \neq \beta$ ist (1.2.2) die kanonische Darstellung von f . Für $\alpha = \beta$ ist dies nicht der Fall; dann ist nämlich

$$f = \alpha \cdot \mathbb{1}_{E_1 \cup E_2}$$

die kanonische Darstellung von f . Diese besitzt die minimale Anzahl von Summanden von Indikatorfunktionen.

Satz 1.2.10. *Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von einfachen, messbaren Funktionen derart, dass*

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Ist sogar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, so kann eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie oben konstruiert werden, so dass gilt:

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto s_k(x) \text{ isoton} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Betrachte zunächst eine messbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$. Setze dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 2, \dots, k \cdot 2^k\}$

$$F_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq k\}, \quad E_{k,j} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j}{2^k}\right\}$$

und

$$s_k = k \cdot \mathbb{1}_{F_k} + \sum_{j=1}^{k \cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k} \mathbb{1}_{E_{k,j}} \leq f(x).$$

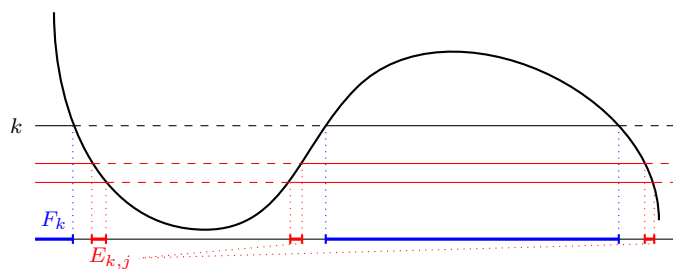


Abbildung 5: Beispielhafte Darstellung von F_k und $E_{k,j}$

s_k ist als Linearkombination von Indikatorfunktionen elementar. Weiter sind wegen der Messbarkeit von f sowohl F_k als auch $E_{k,j}$ messbar, weshalb auch s_k messbar ist. Außerdem ist $\mathbb{N} \ni k \mapsto s_k(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ isoton (Übung) und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = f(x).$$

Betrachte nun eine messbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann kann der erste Teil des Beweises auf $f^+, f^-: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ angewendet werden und man erhält zwei Folgen $(s_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(s_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ von einfachen und messbaren Funktionen, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k^+(x) - s_k^-(x)) = (f^+ - f^-)(x) = f(x). \quad \square$$

Korollar 1.2.11 (Fehlerabschätzung). *Für messbare Funktion f mit $f \geq 0$ gilt nach Konstruktion:*

$$0 \leq f(x) - s_k(x) \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall x \in F_k^C.$$

Ist sogar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, b]$ beschränkt, so gilt

$$\forall k \geq b: \quad F_k = \emptyset, \text{ es gilt also } F_k^C = \mathbb{R}^n,$$

so dass s_k gleichmäßig gegen f konvergiert. Auch für messbare Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-b, b]$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|s_k - f\|_\infty = 0.$$

LINK: TEIL 2 DER 4. VORLESUNG VOM 24.10.2022

Definition 1.2.12. Für eine einfache Funktion

$$s = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{E_k}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty] \quad (1.2.3)$$

mit $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ definiere das Integral

$$I_E(s) := \int_E s \, \lambda := \sum_{k=1}^m \alpha_k \lambda(E_k \cap E) \in [0, \infty].$$

Dabei ist (1.2.3) häufig (aber nicht notwendig) die kanonische Darstellung von s .

[Der resultierende Wert $I_E(s)$ bleibt in diesem Fall gleich. (Übung)]

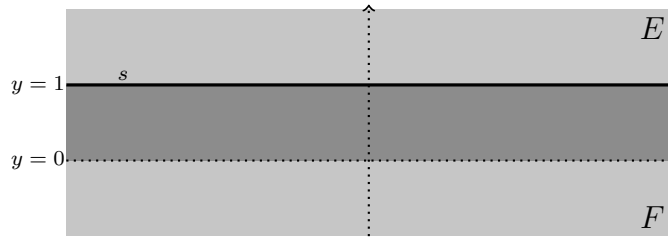
Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ eine messbare Funktion, so setzt man

$$\int_E f \, \lambda(dx) := \sup_{s \in \mathcal{F}_f(E)} I_E(s), \quad (1.2.4)$$

wobei $\mathcal{F}_f(E) := \left\{ g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty] \mid g|_{E^C} = 0, g(E) \text{ endlich, } \forall x \in E: g(x) \leq f(x) \right\}$.

Insbesondere gilt für die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus dem Beweis von Satz 1.2.10:

$$\mathbb{1}_E \cdot s_k \in \mathcal{F}_f(E).$$

Abbildung 6: Visualisierung der Funktion s sowie der Mengen E und F

Das Supremum in (1.2.4) kann den Wert $+\infty$ annehmen, da bereits $I_E(s) = +\infty$ gelten kann; beispielsweise gilt für

$$s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}, \quad s = \mathbb{1}_F, \quad F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1\} \quad \text{und} \quad E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\},$$

dass der Streifen $E \cap F$ ein Volumen von ∞ besitzt.

Erfüllt weiter $f = f^+ - f^- : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die beiden Bedingungen

(i) f ist messbar und

$$(ii) \quad \int_E f^+ \lambda(dx) < \infty \quad \text{oder} \quad \int_E f^- \lambda(dx) < \infty,$$

so setzt man:

$$\int_E f \lambda(dx) := \int_E f^+ \lambda(dx) - \int_E f^- \lambda(dx). \quad (1.2.5)$$

Beachte: Wegen (i) sind die beiden Integrale in (ii) wohldefinierte Zahlen in $[0, \infty]$. Wegen (ii) kann die Situation $\infty - \infty$ in (1.2.5) nicht vorkommen, wohl aber

$$+\infty - a = +\infty \quad \text{oder} \quad b - \infty = -\infty$$

für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$.

Statt $\int_E f \lambda(dx)$ schreibt man manchmal auch

$$\int_E f(x) \lambda(dx), \quad \int_E f \lambda, \quad \int_E f$$

oder sogar

$$\int_E f(x) \lambda^n(dx) \quad \text{oder} \quad \int_E f(x_1, \dots, x_n) \underbrace{\lambda(dx_1, \dots, dx_n)}_{=\lambda(d(x_1, \dots, x_n))}.$$

So schreibt man beispielsweise im Fall $n = 3$:

$$\int_E f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz).$$

Sind beide Summanden in (1.2.5) endlich, so ist $\int_E f \lambda \in (-\infty, \infty)$ und f heißt *Lebesgue-integrierbar* – oder einfach *L-integrierbar* – auf E . Die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen f auf E wird mit $\mathcal{L}(E)$ oder $\mathcal{L}^1(E)$ bezeichnet.

Anhand der Definition 1.2.12 leitet man folgende Eigenschaften her:

Satz 1.2.13 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals). *Sei $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:*

(i) *Linearität:*

Für $f, g \in \mathcal{L}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten $\alpha f + g \in \mathcal{L}(E)$ mit

$$\int_E (\alpha f + g) \, \lambda = \alpha \int_E f \, \lambda + \int_E g \, \lambda.$$

Also ist $\mathcal{L}(E)$ ein Vektorraum und die Abbildung

$$\int_E : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist linear.

(ii) *Majorante:*

Ist $f \in \mathcal{L}(E)$ und $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion mit $|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \in E$, dann gilt $g \in \mathcal{L}(E)$ und

$$\left| \int_E g \, \lambda \right| \leq \int_E f \, \lambda.$$

Ist zusätzlich $g \geq 0$, so gilt $\int_E g \, \lambda \leq \int_E f \, \lambda$.

(iii) *Dreiecks-Ungleichung:*

Für $f \in \mathcal{L}(E)$ ist auch $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}(E)$ und es gilt

$$\left| \int_E f \, \lambda \right| \leq \int_E |f| \, \lambda.$$

(iv) *Monotonie:*

Sind $f, g \in \mathcal{L}(E)$ und $f \leq g$ auf E , dann gilt

$$\int_E f \, \lambda(dx) \leq \int_E g \, \lambda(dx).$$

(v) *Beschränktheit:*

Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b]$ eine messbare Funktion und es gilt $\lambda(E) < \infty$, dann ist $f \in \mathcal{L}(E)$ und es gilt

$$a \cdot \lambda(E) \leq \int_E f \leq b \cdot \lambda(E).$$

Insbesondere gilt $\int_E \mathbb{1}_F = \lambda(E \cap F)$. (Übung)

(vi) *(Spezialfall) Hölder-Ungleichung:*

Ist $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion und auf $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ beschränkte Funktion und ist $f \in \mathcal{L}(E)$, dann ist auch $g \cdot f \in \mathcal{L}(E)$ und es gilt

$$\left| \int_E (f \cdot g) \, \lambda \right| \leq \int_E |f \cdot g| \, \lambda \leq \|\mathbb{1}_E \cdot g\|_\infty \int_E |f| \, \lambda.$$

┌ **Beachte:** Es gilt $\|\mathbb{1}_E \cdot g\|_\infty = \sup_{x \in E} |g(x)| < \infty$, obwohl $\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|$ unendlich sein kann. ┐

(vii) Nullmengen:

Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion und $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ eine Nullmenge, dann gilt $f \in \mathcal{L}(E)$ und

$$\int_E f \, \lambda = 0.$$

(viii) Mengen-Monotonie:

Sind $A, E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset E$, und $f \in \mathcal{L}(E)$, dann gilt auch $f \in \mathcal{L}(A)$.

LINK: TEIL 1 DER 5. VORLESUNG VOM 26.10.2022

Definition 1.2.14.

(a) Sei $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und für jedes $x \in E$ sei $A(x)$ eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann. Dann sagt man

A gilt fast überall (f.ü.) auf E

$$\iff A(x) \text{ gilt für fast alle (f.a.) } x \in E$$

$$:\iff \{x \in E \mid A(x) \text{ ist falsch}\} \text{ ist eine Nullmenge.}$$

(b) Definiere auf $\mathcal{L}(E)$ eine Äquivalenzrelation durch

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ für fast alle } x \in E.$$

Bemerkung 1.2.15.

(a) Gilt $f \sim g$ für $f, g \in \mathcal{L}(E)$, so ist

$$\int_E f - \int_E g = \underbrace{\int_{E \cap \{f=g\}} (f-g)}_{=0} + \underbrace{\int_{E \cap \{f \neq g\}} (f-g)}_{\text{Nullmenge}} = 0 + 0,$$

also $\int_E f = \int_E g$. Für alle Elemente einer Äquivalenzklasse nimmt das Integral denselben Wert an.

(b) Für das Auswerten von Integralen (und die meisten anderen Fragen der Integrationstheorie) ist es daher erlaubt, eine Funktion $f \in \mathcal{L}(E)$ auf einer Nullmenge $N \subset E$ zu verändern, beispielsweise durch den Übergang von f zu $g = f \cdot \mathbb{1}_{N^c}$.

(c) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ für $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\infty > \int_E f(x) \, \lambda(dx) = \underbrace{\int_{E \cap \{f(x) < \infty\}} f(x) \, \lambda(dx)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{E \cap \{f(x) = \infty\}} f(x) \, \lambda(dx)}_{\geq 0}.$$

Daraus folgt, dass $N = E \cap \{f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist, da ansonsten $\lambda(N) = \varepsilon > 0$ und damit

$$\int_N f(x) \lambda(dx) = \infty \cdot \lambda(N) = \infty$$

gelten würde, was ein Widerspruch wäre. Daraus folgt, dass für $f \in \mathcal{L}(E)$ die Menge

$$\{x \in E \mid f(x) = -\infty \text{ oder } f(x) = +\infty\} = \{x \in E \mid f^+ = \infty\} \cup \{x \in E \mid f^- = \infty\}$$

eine Nullmenge ist. Setzt man $g = f \cdot \mathbb{1}_{N^c}$, so folgt:

$$\forall x \in E : g(x) \in (-\infty, \infty), \quad g \sim f.$$

Es darf also im Kontext dieser Vorlesung implizit angenommen werden, dass eine Funktion $f \in \mathcal{L}(E)$ nur endliche Werte auf E annimmt.

- (d) Dies bedeutet wiederum, dass im Satz 1.2.13 überall der Ausdruck „für alle $x \in E$ “ durch „für fast alle $x \in E$ “ ersetzt werden darf, ebenso wie „ g beschränkt auf E “ durch „ g beschränkt fast überall auf E “.

Insbesondere darf in Teil (a) im Fall, dass $x \in E$ existiert mit $\alpha f(x) = \pm\infty$ und $g(x) = \mp\infty$, der Wert an dieser Stelle so verändert werden, dass der Ausdruck $\alpha f(x) + g(x)$ Sinn ergibt; dies tut man, um denn Fall $\infty - \infty$ zu vermeiden. Alle solche Punkte $x \in E$ zusammen bilden ja wegen $f, g \in \mathcal{L}(E)$ eine Nullmenge.

- (e) Ist die Funktion f messbar auf E und $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\int_E |f| \lambda = 0 \iff \{x \in E \mid f(x) \neq 0\} \text{ ist eine Nullmenge}$$

$$\iff f|_E \sim 0|_E$$

$$\iff f = 0 \text{ fast überall auf } E.$$

Beispiel. Die auf $\mathbb{R}$ messbare Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ist äquivalent zur Nullfunktion in $\mathbb{R}$, es gilt also

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \lambda = 0. [8]$$

- (f) Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt auch $f \in \mathcal{L}([a, b])$ und die beiden Integrale stimmen überein. Es gibt jedoch Funktionen, die zwar Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar sind wie die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ aus dem obigen Beispiel.

Damit bildet das Lebesgue-Integral

$$\int_{[a,b]} : \mathcal{L}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

eine echte Fortsetzung des Riemann-Integrals.

[8] $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ wird auch *Dirichlet-Funktion* genannt.

LINK: TEIL 2 DER 6. VORLESUNG VOM 26.10.2022

- (g) *Lebesguesches Integrabilitätskriterium*: Sei die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge

$$\{x \in [a, b] \mid f \text{ ist nicht stetig in } \mathbb{R}\}$$

eine Nullmenge ist.^[9]

- (h) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes offenes Intervall und die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Teilintervall $[c, d] \subset I$ Riemann-integrierbar, dann gilt:

$$f \in \mathcal{L}(I) \iff \text{Das uneigentliche Riemann-Integral } \int_I |f| \, dx \text{ existiert.}$$

Beispiel. Setze $I = (0, \infty)$. Es existieren Funktionen f derart, so dass $f \notin \mathcal{L}((0, \infty))$, aber uneigentlich Riemann-integrierbar sind (vgl. Abbildung 7).

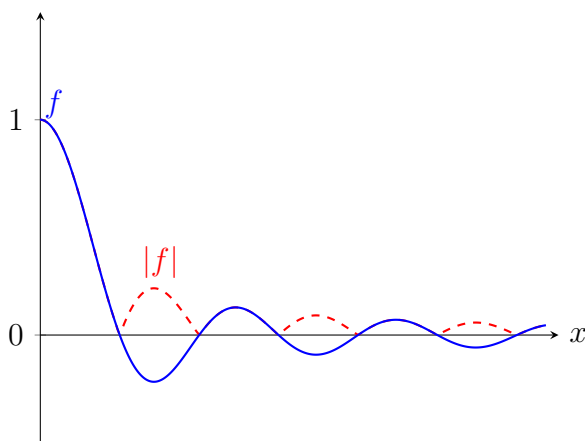


Abbildung 7: Ein Beispiel einer Funktion f mit $f \notin \mathcal{L}((0, \infty))$, welche aber uneigentlich Riemann-integrierbar ist: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

- (i) Für $f, g \in \mathcal{L}(E)$ muss nicht unbedingt $f \cdot g \in \mathcal{L}(E)$ gelten.

Beispiel. Setze $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ und $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dann gelten

- (i) f ist auf jedem $[c, d] \subset E$ beschränkt und stetig, damit auch insbesondere Riemann-integrierbar,

und

- (ii) $|f|$ ist auf E uneigentlich Riemann-integrierbar.

^[9]Die Menge umfasst also eine *abzählbare* Anzahl von Unstetigkeitsstellen von f .

Damit ist dann f Lebesgue-integrierbar auf E .

Betrachte nun $f^2 = f \cdot f: E \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f^2(x) = \frac{1}{x}$. Für f^2 ist zwar (i) erfüllt, aber (ii) nicht mehr; insbesondere gilt $f^2 \notin \mathcal{L}(E)$.

Denselben Sachverhalt wird das nächste Beispiel ohne Rückgriff auf Riemann-Integrierbarkeit illustrieren:

Beispiel 1.2.16. Sei $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

(1) Sei $f: E \rightarrow [0, \infty)$ gegeben durch

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{k+1} \mathbb{1}_{I_k}$$

mit $I_k = (2^{-k-1}, 2^{-k})$ und $\lambda(I_k) = 2^{-k-1}$. Dann ist f_N gegeben durch

$$f_N = \sum_{k=1}^N 2^{k+1} \mathbb{1}_{I_k}$$

eine einfache Funktion mit

- $\int_E f_N = \sum_{k=1}^N \underbrace{2^{k+1} \cdot 2^{-k-1}}_{=1} = N$ und
- $\forall x \in E: f_N(x) \nearrow f(x)$.

Damit gilt

$$\int_E f \lambda = \sup_{s \in \mathcal{F}_f(E)} \int_E s \lambda \geq \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_E f_N \lambda = +\infty.$$

(2) Für $g: E \rightarrow [0, \infty)$ gegeben durch

$$g = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} \cdot 2^{k+1} \cdot \mathbb{1}_{I_k}$$

folgt analog

$$\forall x \in E: N \mapsto g_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{2^{k+1}}{k^2} \mathbb{1}_{I_k}(x) \nearrow g(x)$$

und

$$\int_E g \lambda = \sup_{s \in \mathcal{F}_g(E)} \int_E s \lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \cdot 1 < +\infty. \quad [10]$$

(3) Es gilt:

$$g^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{k^2} \mathbb{1}_{I_k} \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2^{j+1}}{j^2} \mathbb{1}_{I_j}$$

^[10]vgl. Vorlesung Analysis II

Da $I_k \cap I_j = \emptyset$ für $k \neq j$ gilt insbesondere $\mathbb{1}_{I_k} \cdot \mathbb{1}_{I_j} = 0$ für $k \neq j$ und man erhält

$$\begin{aligned} g^2 &= \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \frac{2^{k+1} \cdot 2^{j+1}}{k^2 j^2} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{I_k} \cdot \mathbb{1}_{I_j}}_{=0, \text{ für } k \neq j} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^{2k+2}}{k^4} \cdot \mathbb{1}_{I_k}, \end{aligned}$$

also $g^2 : E \rightarrow [0, \infty)$.

Weiter gilt für die einfache Funktion h_N

$$h_N = \sum_{k=1}^N \frac{2^{k+1} \cdot 2^{k+1}}{k^4} \mathbb{1}_{I_k} \nearrow g^2 \text{ punktweise monoton}$$

und

$$\int_E h_N = \sum_{k=1}^N \underbrace{\frac{2^{k+1}}{k^4}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty} \cdot \underbrace{1}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty} \rightarrow \infty.$$

Damit gilt insbesondere

$$\int_E g^2 \lambda = \sup_{s \in \mathcal{F}_{g^2}(E)} \int_E s \geq \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_E h_N = +\infty.$$

Diese Beispiele illustrieren den Bedarf des nächsten Abschnitts:

1.3 Konvergenzsätze

Seien $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in \mathcal{L}(E)$ für $k \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\forall x \in E : f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \text{ punktweise.}$$

Damit lässt sich nun die folgende Frage stellen: Sind die beiden Eigenschaften

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f \tag{1.3.1}$$

erfüllt? Betrachte dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 1.3.0.

(i) Sei $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 2k^2 x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2k}\right], \\ 2k - 2k^2 x & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right), \\ 0 & \text{für } \left[\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Dann ist $f_k(0) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\forall \delta > 0 : f_k(x) = 0,$$

sobald $x \geq \delta$ und $k \geq \frac{1}{\delta}$. Damit folgt

$$f_k \longrightarrow f \equiv 0 \quad \text{punktweise auf } [0, 1]$$

und

$$\int_{[0,1]} f_k = \int_0^{\frac{1}{2k}} 2k^2 x dx + \int_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{k}} (2k - 2k^2 x) dx + \int_{\frac{1}{k}}^1 0 dx = \frac{1}{2}.$$

Es gilt jedoch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_k = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_{[0,1]} f.$$

┌ **Übung:** Zeige: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| \neq 0$. ┐

(ii) Ist jedes $f_k : E = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und gilt

$$f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \quad \text{gleichmäßig auf } [a, b],$$

so ist f Riemann-integrierbar, damit auch Lebesgue-integrierbar, und die Gleichung (1.3.1) gilt. Die Forderung der uniformen Konvergenz ist jedoch in vielen Fällen zu stark.

(iii) Sei $g_k : E = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_k(x) = \begin{cases} 2kx & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2k}\right], \\ 2 - 2kx & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right), \\ 0 & \text{für } \left[\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Es gilt wieder

$$g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \equiv 0 \quad \text{punktweise auf } [0, 1], \text{ aber nicht gleichmäßig.}$$

Für die Integrale gilt jedoch

$$\int_E g_k = k \left[x^2 \right]_0^{\frac{1}{2k}} + \frac{2}{2k} - k \left[x^2 \right]_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

die Gleichung (1.3.1) ist also erfüllt.

Eine „moralische Ursache“ für diesen Sachverhalt ist damit gegeben durch

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in [0,1]} |g_k(x)| \leq 1, \quad (1.3.2)$$

man kann also uniform beschränkte g_k betrachten.

(iv) Sei $h_k : E = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{x}{k^2} & \text{für } x \in [0, k], \\ \frac{2k-x}{k^2} & \text{für } x \in (k, 2k), \\ 0 & \text{für } [2k, \infty). \end{cases}$$

Es gilt $\|h_k\|_\infty = h_k(k) = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ und damit auch

$$h_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h \equiv 0 \quad \text{gleichmäßig auf } [0, \infty).$$

Jedoch gilt

$$\int_0^\infty h_k(x) dx = \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^k + \frac{2k}{k^2} \cdot k - \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_k^{2k} = 1 + 2 - (2 - 1) = 1 \neq 0 = \int_0^\infty h(x) dx.$$

Fazit: Die gleichmäßige Konvergenz ist kein Allheilmittel, um die Gleichung (1.3.1) zu gewährleisten; dies ist zumindest der Fall, wenn E unbeschränkt ist.

LINK: TEIL 1 DER 7. VORLESUNG VOM 31.10.2022

Satz 1.3.1 (Beppo Levi: Über monotone Konvergenz). Sei $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_k : E \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ und für fast alle } x \in E, \quad (1.3.3)$$

wobei wegen der Isotonie dann die Funktion f existiert gegeben durch

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \in [0, \infty] \quad \text{für fast alle } x \in E. \quad (1.3.4)$$

Setze weiter auf der Nullmenge $N \subset E$, auf der (1.3.4) nicht gilt, $f = 0$. Dann gilt

$$f \text{ ist messbar und } \int_E f \, \lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, \lambda \in [0, \infty].$$

Beweis. Setze zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{N} &:= \left\{ x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : (1.3.3) \text{ ist verletzt.} \right\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ x \in E \mid (1.3.3) \text{ ist verletzt für } k \in \mathbb{N}. \right\} \supset N. \end{aligned}$$

Damit ist N als Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen ebenfalls eine Nullmenge und damit insbesondere messbar, es gilt also $N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Damit sind g_k gegeben durch

$$g_k := \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_k$$

und wegen Satz 1.2.3 auch f gegeben durch

$$f = \mathbb{1}_{N^C} \cdot f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

messbare Funktionen. Betrachte nun

$$\beta_k := \int_E f_k \lambda = \int_E g_k \in [0, \infty].$$

Wegen Satz 1.2.13 und (1.3.3) gilt dann

$$\beta_k \leq \beta_{k+1}$$

$$\implies \exists \beta := \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} \beta_k \in [0, \infty].$$

Wegen $g_k \leq f$ auf E , gilt dann

$$\beta_k = \int_E g_k \leq \int_E f$$

$$\implies \beta \leq \int_E f.$$

Sei nun $t \in (0, 1)$ und $s \in \mathcal{F}_f(E)$ mit

$$0 \leq s \leq f,$$

sowie

$$\begin{aligned} F_k &= F_k(t, s) \\ &:= \{x \in E \mid g_k(x) \geq t \cdot s(x)\} \\ &\stackrel{g_k \leq g_{k+1}}{\subset} \{x \in E \mid g_{k+1} \geq t \cdot s(x)\} \\ &= F_{k+1} \stackrel{[11]}{\in} \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Zeige nun die folgende Behauptung: Es gilt

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k = E.$$

Beweis. Sei $x \in E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$. Dann gilt

$$g_k(x) < t \cdot s(x), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

und damit

$$f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) \leq t \cdot s(x) < s(x),$$

im Widerspruch zu $f \geq s$ (siehe oben).

^[11]Da f und g messbar sind, gilt insbesondere $\{f \geq g\} := \{x \in E \mid f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \int_E \underbrace{g_k}_{\geq 0} \lambda \\
&\geq \int_E \mathbb{1}_{F_k} \cdot g_k \lambda \\
&\geq t \cdot \int_E \mathbb{1}_{F_k} \cdot s \lambda \\
&= t \cdot \int_E \left(\mathbb{1}_{F_k} \cdot \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mathbb{1}_{E_j} \right) \lambda \\
&= t \cdot \sum_{k=1}^m \alpha_j \cdot \underbrace{\lambda(F_k \cap E_j)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda(E_j)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t \cdot \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda(E_j) = t \cdot \int_E s \lambda
\end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
\beta &= \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k \geq t \cdot \int_E s \lambda \\
\implies \int_E f \lambda &= \sup_{t \in (0,1)} \sup_{s \in \mathcal{F}_f(E)} \underbrace{t \int_E s \lambda}_{\leq \beta} \leq \beta. \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 1.3.2. *Das Lebesgue-Maß $\lambda : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ ist stetig von unten, für eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $A_k \subset A_{k+1}$ und $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k) = \lambda(A).$$

Beweis. Man definiere zunächst die Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $B_1 := A_1$ und $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geq 2$. Dabei gilt

$$\bigcup_{j=1}^k B_j = A_k \stackrel{A_j \subset A_{j+1}}{=} \bigcup_{j=1}^k A_j \quad (**)$$

und $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ nach Definition von $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Falls $\lambda^d(A_k) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda^d(A) &= \lambda^d \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \\
&\stackrel{(**)}{\underset{k \rightarrow \infty}{=}} \lambda^d \left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) \\
&\stackrel{(A5)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^d(B_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \lambda^d(B_j) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=2}^k (\lambda^d(A_j) - \lambda^d(A_{j-1})) + \lambda^d(A_1) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda^d(A_k) - \lambda^d(A_1) + \lambda^d(A_1)) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^d(A_k).
\end{aligned}$$

Falls $\lambda^d(A_k) = \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\lambda^d(A_n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, und damit auch $\lambda^d(A) = \infty$. $\square$

Bemerkung. Tatsächlich gilt Lemma 1.3.2 für jedes Maß.

Eine Umformulierung von Satz 1.3.1 liefert:

Korollar 1.3.3. Gegeben sei eine Menge $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_k \in \mathcal{L}(E)$ derart, dass gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_E |f_k(x)| \lambda(dx) < \infty.$$

Dann ist für fast alle $x \in E$ die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ absolut konvergent in $\mathbb{R}$ und für jede Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \quad \text{fast überall auf } E$$

gilt dann

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k \lambda = \int_E f \lambda.$$

Eine etwas schwächere Aussage, welche jedoch einfacher zu zeigen ist, ist:

Lemma 1.3.4 (Fatou). Sei $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ mit $f_k \in \mathcal{L}(E)$ mit

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda < \infty.$$

Für eine Funktion $f: E \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch

$$f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$$

gilt dann

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{und} \quad \int_E f \lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda.$$

LINK: TEIL 2 DER 7. VORLESUNG VOM 31.10.2022

Beweis. Übung. (Ansatz: vgl. Beweis zu Satz 1.3.1) □

Ebenso wichtig wie der Satz 1.3.1 über monotone Konvergenz – und dazu äquivalent – ist:

Satz 1.3.5 (Lebesgue: Über majorisierte Konvergenz). *Sei $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}(E)$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{L}(E)$, so dass für fast alle $x \in E$ gilt:*

$$* \quad \forall k \in \mathbb{N} : |f_k(x)| \leq g(x) \text{ und}$$

$$* \quad f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ existiert.}$$

Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{und} \quad \int_E f(x) \lambda(dx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \lambda(dx).$$

Beweis. Zunächst gilt

$$|f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x)| \leq g(x) \quad \text{für fast alle } x \in E.$$

Wegen der Monotonie von $\int_E$ folgt

$$\int_E |f| \lambda \leq \int_E g \lambda < \infty$$

$$\implies f \in \mathcal{L}(E).$$

Für fast alle $x \in E$ gilt dann

$$|f_k(x)| \leq g(x)$$

$$\implies 0 \leq (g + f_k)(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\implies 0 \leq g + f$$

und

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (g + f_k) \lambda \stackrel{f_k \leq g}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (g + g) \lambda \stackrel{g \in \mathcal{L}(E)}{<} \infty.$$

Lemma 1.3.4 (Fatou) liefert dann

$$\int_E (f + g) \lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (f_k + g) < \infty.$$

Wegen $g \in \mathcal{L}(E)$ gilt $f + g \in \mathcal{L}(E)$ und damit auch $f \in \mathcal{L}(E)$; damit ist insbesondere Umstellung erlaubt:

$$\begin{aligned} \int_E f \lambda &= \int_E (f + g) \lambda - \int_E g \lambda \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (f_k + g) \lambda - \int_E g \lambda \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda + \int_E g \lambda - \int_E g \lambda \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda. \end{aligned} \tag{▼}$$

Ebenso gilt für fast alle $x \in E$

$$0 \leq g(x) - f_k(x) \implies 0 \leq g(x) - f(x)$$

und

$$\int_E (g - f) \lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (g - f_k) \lambda < \infty.$$

Analog zu (▼) gilt dann:

$$-\int_E f \lambda = \int_E (g - f) \lambda - \int_E g \lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(-\int_E f_k \lambda \right)$$

$$\implies \int_E f \lambda \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda \geq \int_E f \lambda. \quad \square$$

Die Stetigkeit einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann mithilfe von Folgen $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$ beschrieben werden, ebenso mit einem kontinuierlichen Parametern $y \rightarrow x_0$. Ebenso kann die majorisierte Konvergenz mit kontinuierlichen Parametern umformuliert werden und man erhält beispielsweise die folgende Aussage zu parameterabhängigen Integralen:

Satz 1.3.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $f: \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass gilt:

$$f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E) \quad \forall x \in \Omega.$$

Definiere nun eine Funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_E f(x, y) \lambda(dy).$$

Gelten zudem die Bedingungen

(a) Ist für fast alle $y \in E$ $f(\cdot, y)$ stetig in $x \in \Omega$ und $g \in \mathcal{L}(E)$ eine Funktion mit

$$|f(x, y)| \leq g(y) \quad \text{für fast alle } y \in E \text{ und alle } x \in \Omega,$$

dann ist F stetig in $x \in \Omega$.

(b) Sei $j \in \{1, \dots, d\}$. Für fast alle $y \in E$ und alle $x \in \Omega$ existiere weiter $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$ und sei $h \in \mathcal{L}(E)$ gegeben durch

$$|D_j f(x, y)| \leq h(y) \quad \text{für fast alle } y \in E \text{ und alle } x \in \Omega.$$

Dann ist F auf Ω partiell nach x_j differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \int_E \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) \lambda(dy), \quad x \in \Omega.$$

Beweis. Übung!

1.4 Der Satz von Fubini

Nach Möglichkeit soll die Berechnung von Integralen auf $\mathbb{R}^n$ auf die Berechnung von Integralen auf $\mathbb{R}$ zurückgeführt werden (vgl. Doppelintegrale, Übungsblatt 1). Zunächst wird jedoch eine Faserungsformel (Desintegrationsformel) für das Lebesgue-Volumen vorgestellt:

Satz 1.4.1 (Das Prinzip von Cavalieri). *Sei $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(M) < \infty$. Für $z \in \mathbb{R}$ setze dann*

$$M(z) := \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in M \right\}$$

Nehme weiter an, dass $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

$$M(z) = \emptyset, \quad \text{falls } z > b \text{ oder } z < a,$$

M liegt also zwischen zwei Hyperebenen.

Dann gilt

- *Es existiert eine Nullmenge $N \subset [a, b]$, so dass gilt*

$$M(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \forall z \in [a, b] \setminus N$$

- *Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch*

$$f(z) := \lambda^{n-1}(M(z)) \cdot \mathbb{1}_N(z)$$

ist Lebesgue-integrierbar, es gilt also $f \in \mathcal{L}([a, b])$

- *Es gilt*

$$\lambda^n(M) = \underbrace{\int_a^b f(z) \, dz}_{\text{Riemann-Integral}} = \int_{[a,b]} f(z) \, \lambda(dz).$$

LINK: TEIL 1 DER 8. VORLESUNG VOM 2.11.2022

Beweis.

- 1) Sei zunächst $M = Q$ ein endlicher halboffener Quader

$$Q = \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k).$$

Setze $a = a_n$ und $b = b_n$, dann erhält man

$$M(z) = \begin{cases} \bigtimes_{k=1}^{n-1} [a_k, b_k), & \text{falls } z \in [a, b) \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachte dann die Funktion f gegeben durch

$$f(z) = \lambda^{n-1}(M(z)) = \prod_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) \cdot \mathbb{1}_{[a,b)}(z).$$

f ist sogar stückweise konstant und somit eine Treppenfunktion. Damit ist sie beschränkt und insbesondere Riemann-integrierbar. Für die Treppenfunktion ist dann das Riemann-Integral gegeben durch

$$\int_a^b f(z) \, dz = \int_a^b \prod_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) \, dz = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \lambda^n(Q)$$

wohldefiniert und damit gleich dem uneigentlichen Riemann-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n)}(z) \, dz$$

und damit insbesondere gleich dem Lebesgue-Integral

$$\int_{[a_n, b_n)} \prod_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) \, \lambda^1(dz).$$

- 2) Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann existiert eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von disjunkten halboffenen Quadern mit $M = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ (vgl. Übungsblatt 3 der Vorlesung). Mit der σ -Additivität von λ^n folgt dann

$$\lambda^n(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_k).$$

Setze nun $Q_k(z) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, z) \in Q_k \subset \mathbb{R}^n\}$ und $f_k(z) = \lambda^{n-1}(Q_k(z))$. Mit Teil 1) folgt dann

$$\lambda^n(Q_k) = \int_a^b f_k(z) \, dz,$$

es gilt also

$$\begin{aligned} \lambda^n(M) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_a^b f_k(z) \, \lambda(dz) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^N \underbrace{f_k(z)}_{\geq 0} \, \lambda(dz) \\ &\stackrel{1.3.1}{=} \int_a^b g(z) \, \lambda(dz), \quad \text{mit } g(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(z). \end{aligned}$$

Dabei stellt sich nun die folgende Frage: Ist g die ‚richtige‘ Funktion? Tatsächlich ist das der Fall, denn:

Da Q_k disjunkt ist, ist sogar $Q_k(z)$ disjunkt für alle z . Damit folgt

$$\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} Q_k(z) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, z) \in Q_k\} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \exists k \in \mathbb{N} : (x, z) \in Q_k\} = M(z).$$

Wegen der σ -Additivität von λ^{n-1} folgt dann

$$f(z) = \lambda^{n-1}(M(z)) = \lambda^{n-1} \left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} Q_k(z) \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\lambda^{n-1}(Q_k(z))}_{= f_k(z)} =: g(z)$$

$$\implies f \equiv g.$$

3) Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, so existieren offene Würfel W mit $M \subset W \subset \mathbb{R}^n$. Damit folgt

$$U := W \setminus M \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n$$

und zusammen mit $\lambda^{n-1}(U(z)) = \lambda^{n-1}(W(z) \setminus M(z)) = \lambda^{n-1}(W(z)) - \lambda^{n-1}(M(z))$ erhält man

$$\begin{aligned} \lambda^n(W) - \lambda^n(M) &= \lambda^n(U) \\ &\stackrel{2)}{=} \int_a^b \lambda^{n-1}(U(z)) \, dz \\ &= \underbrace{\int_a^b \lambda^{n-1}(W(z)) \, dz}_{\lambda^n(W)} - \int_a^b \lambda^{n-1}(M(z)) \, dz. \end{aligned}$$

Umstellung liefert dann

$$\lambda^n(M) = \int_a^b \lambda^{n-1}(M(z)) \, dz.$$

4) Sei nun $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(M) < \infty$. Damit existieren $U_m \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K_m \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit

$$K_m \subset M \subset U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Man erhält dann

$$\lambda(U_m \setminus K_m) < \frac{1}{m}$$

$$\implies \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^n(K_m) = \lambda^n(M) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^n(U_m).$$

Die Aussage des Satzes folgt dann mit Satz 1.3.1 über monotone Konvergenz. $\square$

Mit erweiterten Argumenten folgt ähnlich:

Satz 1.4.2. Seien $n, p, q \in \mathbb{N}$ mit $n = p + q$, $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ und $\lambda^n(M) < \infty$. Für $z = (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{R}^q$ setze

$$M(z) := \{x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid (x, z) \in M\}.$$

Dann existiert eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^d$, so dass gilt:

- * $\forall z \in \mathbb{R}^q \setminus N : M(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p),$
- * Die Funktion $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(z) := \mathbb{1}_{N^c}(z) \lambda^p(M(z))$$

ist Lebesgue-integrierbar, es gilt also $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q)$, und

$$* \lambda^n(M) = \int_{\mathbb{R}^q} f(z) \lambda^q(dz).$$

(Ohne Beweis)

LINK: TEIL 2 DER 8. VORLESUNG VOM 2.11.2022

Beispiel 1.4.3.

(i) *Kartesische Produkte:*

Seien $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$, $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$ mit $\lambda^p(M) < \infty$ und $\lambda^q(D) < \infty$. Dann gilt $M := A \times D \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, mit $n = p + q$ (vgl. Übungsblatt 3 zur Vorlesung). Für $z = (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{R}^q$ ist dann

$$M(z) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \underbrace{(x, z) \in M = A \times D}_{\Leftrightarrow x \in A \text{ und } z \in D}\} = \begin{cases} A, & \text{falls } z \in D \\ \emptyset, & \text{falls } z \notin D. \end{cases}$$

Es folgt

$$f(z) = \lambda^p(M(z)) = \lambda^p(A) \cdot \mathbb{1}_D(z)$$

und

$$\lambda^n(A \times B) = \lambda^n(M) \stackrel[\text{Cavalieri}]{\text{Satz 1.4.1}} \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^p(A) \mathbb{1}_D(z) \lambda^q(dz) = \lambda^p(A) \lambda^q(D).$$

(ii) *Spezialfall: Zylinder*

Setze $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $D = B_1(c) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Für die Höhe $h := b - a$ gilt dann

$$Z(h, B) = M = A \times B \implies \lambda^n(M) = h \cdot \lambda^{n-1}(B).$$

(iii) *Abwandlung: Kegel* Sei $G \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\lambda^{n-1}(G) < \infty$ die Grundfläche. Wähle dann einen beliebigen Punkt $(p, h) \in \mathbb{R}^n$ in der Höhe $h > 0$ über der Grundfläche G , damit also $p \in \mathbb{R}^{n-1}$, und verbinde (p, h) mit jedem Punkt in $G \times \{0\}$ durch eine Strecke

$$\begin{aligned} C_{G,h} &= \bigcup_{g \in G} \{(1-t)(g, 0) + t(p, h) \mid t \in [0, 1]\} \\ &= \{(1-t)(g, 0) + \underbrace{t(p, h)}_{=(t \cdot p, t \cdot h)} \mid t \in [0, 1], g \in G\} \\ &\stackrel{s:=t \cdot h}{=} \left\{ \left(1 - \frac{s}{h}\right)(g, 0) + \left(\frac{s}{h}p, s\right) \mid s \in [0, h], g \in G \right\}. \end{aligned}$$

$C_{G,h} =: M$ ist ein Kegel. Für $z \in [0, h]$ gilt dann:

$$\underbrace{M(z)}_{\subset \mathbb{R}^{n-1}} \stackrel{s=z}{=} \left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot g + \frac{z}{h} \cdot p \mid g \in G \right\} = \tau_{\frac{z}{h}p} \left(\left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot g \mid g \in G \right\} \right).$$

Aufgrund der Translationsinvarianz von λ^{n-1} folgt dann:

$$\lambda^{n-1}(M(z)) = \lambda^{n-1} \left(\tau_{\frac{z}{h}p} \left(\left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot g \mid g \in G \right\} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{n-1} \left(\left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot g \mid g \in G \right\} \right) \\
&= \lambda^{n-1} \left(\left(1 - \frac{z}{h}\right) G \right) \\
&= \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{n-1} \lambda^{n-1}(G).
\end{aligned}$$

Wegen $M(z) = \emptyset$ für $z \notin [0, h]$ gilt dann für das Gesamtvolumen:

$$\lambda^n(M) = \int_0^h \lambda^{n-1}(M(z)) \, dz = \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{n-1} \lambda^{n-1}(G) \, dz = \lambda^{n-1}(G) \cdot \frac{h}{n}.$$

Ein Spezialfall ergibt sich bei der Betrachtung der Fläche eines Dreiecks: Bezeichnet $D \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck und $G \subset \mathbb{R}$ die Grundlänge des Dreiecks, dann gilt

$$\lambda^2(D) = \frac{h}{n} \cdot \lambda^1(G) = \frac{h}{2} \cdot \text{Breite}.$$

- (iv) Sei $M = B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ der euklidische Einheitsball und setze dazu $\omega_n := \lambda^n(B)$. Sei weiter $z \in \mathbb{R}$, dann besitzt $M(z)$ gegeben durch

$$M(z) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (y, z) = (y_1, \dots, y_{n-1}, z) \in B \right\}$$

die folgende Eigenschaft:

$$M(z) = \begin{cases} B_{\sqrt{1-z^2}}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} & \text{falls } z \in (-1, 1) \\ \emptyset & \text{falls } z \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Man erhält dann:

$$f(z) = \lambda^{n-1}(M(z)) \stackrel{\text{Trafo-Formel}}{=} \text{Vorfaktor} \cdot \text{Radius}^{n-1} [12] = \omega_{n-1} \cdot \left(\sqrt{1-z^2}\right)^{n-1}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \lambda^n(B_1) \\
&= \int_{-1}^1 \omega_{n-1} \left(1 - z^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \, dz \\
&\stackrel{\substack{z=\sin t \\ \frac{dz}{dt}=\cos t}}{=} \omega_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(1 - \sin^2 t\right)^{\frac{n-1}{2}}}_{=\cos^2 t} \cos t \, dt
\end{aligned}$$

[12] Dieser Teil wird im nächsten Abschnitt zur Transformations-Formel bewiesen.

$$= \omega_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

Setze $c_n := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ und man erhält dann durch zweifache partielle Integration den rekursiven Ausdruck

$$c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

wobei:

$$c_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \pi, \quad c_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2.$$

Man erhält dann:

$$c_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \quad \text{und} \quad c_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2.$$

Damit folgt

$$\omega_{2k+1} = \omega_{2k} \cdot c_{2k+1} = \omega_{2k-1} \cdot \underbrace{(c_{2k+1} \cdot c_{2k})}_{=\frac{2\pi}{2k+1}}$$

und

$$\omega_{2k} = \omega_{2k-1} \cdot c_{2k} = \omega_{2k-2} \cdot c_{2k} \cdot c_{2k-1} = \omega_{2k-2} \cdot \frac{2\pi}{2k} = \omega_{2k-2} \cdot \frac{\pi}{k}.$$

w_1 beschreibt die Länge des Intervalls $(-1, 1)$ und entspricht $\lambda^1((-1, 1)) = 2$. ω_2 beschreibt die Fläche $\lambda^2(B_1) = \pi$. Rekursiv folgt:

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}.$$

LINK: TEIL 1 DER 9. VORLESUNG VOM 7.11.2022

Damit gilt dann allgemein für ω_n :

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \quad [13].$$

┌ *Bemerkung.* Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0.$$

└

(v) *Spezialfall von Kegeln: (Standard-)Simplizes*

Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Simplizes S_n und $G := S_{n-1}$ mit Höhe $h = 1$ gegeben durch

$$S_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in [0, \infty), \sum_{j=1}^n x_j \leq 1 \right\}$$

^[13] Γ bezeichnet hier die Eulersche Gammafunktion.

bzw.

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y_1, \dots, y_{n-1} \in [0, \infty), \sum_{j=1}^{n-1} y_j \leq 1 \right\}.$$

Damit ergibt sich für das Volumen $\lambda^n(S_n)$ über eine Rekursionsformel:

$$\lambda^n(S_n) = \frac{h}{n} \cdot \lambda^{n-1}(G) = \frac{1}{n} \cdot \lambda^{n-1}(S_{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \cdot \lambda^{n-2}(S_{n-2}) = \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\lambda(S_1)}_{=1}^{[14]} = \frac{1}{n!}.$$

Eine Verallgemeinerung des Prinzips von Cavalieri für die Berechnung von Volumina bzw. Integrale von Indikatorfunktionen liefert der folgende Satz von Guido Fubini:

Satz 1.4.4 (Fubini). *Seien $p, q, n \in \mathbb{N}$ mit $n = p + q$ und $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

(i) *Für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ gilt für $f_x: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$:*

$$f_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p),$$

die Menge $N \subset \mathbb{R}^q$, in der dies nicht erfüllt ist, ist also eine Nullmenge.

(ii) *Die Funktion $F: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$F(y) = \mathbb{1}_{N^c}(y) \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \lambda^p(dx)$$

ist Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}^q$, es gilt also $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q)$.

(iii) *Es gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \lambda^n(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^q} F(y) \lambda^q(dy) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^p(dx) f(x, y).$$

Beweisskizze. Da jedes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ durch $f = f^+ - f^-$ mit $f^+, f^- \geq 0$ dargestellt werden kann und das Integral linear ist, reicht es aus, $f \geq 0$ zu betrachten. Sei dann also $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x, y) \mapsto f(x, y) =: z.$$

Betrachte nun den Graphen $G(f)$ von f und die Menge M_f gegeben durch

$$G(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = f(x)\} \quad \text{bzw.} \quad M_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq z \leq f(x)\}$$

Da $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, ist f insbesondere messbar und es folgt $M_f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1})$ (Übung).

Die Idee ist nun die Folgende: Das Integral von f approximiert die Fläche unter dem Graphen $G(f)$, es gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \lambda^n(dx, dy) = \lambda^{n+1}(M_f). \quad (1.4.1)$$

^[14]Das ergibt sich wegen $S_1 = [0, 1]$ und $\lambda^1([0, 1]) = 1$.

Das ist auch wahr für elementare Funktionen, das heißt das Integral ergibt sich bei der Betrachtung von $f = s$ durch die Summe von Volumina von Quadern. Weiter gilt $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$, wobei $y \in \mathbb{R}^q$.

„Faserung“ nach $y \in \mathbb{R}^q$ liefert:

$$M_f(y) = \left\{ (x_1, \dots, x_p, z) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \underbrace{(x_1, \dots, x_p)}_{\in \mathbb{R}^p}, \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^q}, \underbrace{z}_{\in \mathbb{R}} \in \underbrace{M_f}_{\subset \mathbb{R}^{p+1}} \right\}$$

ist nach Satz 1.4.1 messbar und die Funktion $h: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(y) := \lambda^{p+1}(M_f(y))$$

ist fast überall auf $\mathbb{R}^q$ wohldefiniert und integrierbar. Analog zu (1.4.1) gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \lambda^p(dx) = \lambda^{p+1}(M_f(y)). \quad (1.4.2)$$

Ebenfalls nach Satz 1.4.1 gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(M_f) &\stackrel{(1.4.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \lambda^n(dx, dy) \\ &\stackrel[\text{Cavalieri}]{1.4.1} \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^{p+1}(M_f(y)) \lambda^q(dy) \\ &\stackrel{(1.4.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \lambda^p(dx) \lambda^q(dy). \end{aligned}$$

Durch die Rollenvertauschung von $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^q$ erhält man dann insgesamt:

$$\int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^p(dx) f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n(dx, dy) f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^p(dx) \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) f(x, y). \quad \square$$

Diese Konstruktion nennt man auch „iteriertes Integral“. Induktiv folgt für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n(dx) f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx_1) \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx_2) \cdots \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx_n) f(x_1, \dots, x_n).$$

Um den Satz 1.4.4 von Fubini anwenden zu können, muss zunächst herausgefunden werden, ob $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ gilt. Um die zu überprüfen, ist der folgende Satz von Leonida Tonelli von Nutzen:

LINK: TEIL 2 DER 9. VORLESUNG VOM 7.11.2022

Satz 1.4.5 (Tonelli). Seien $p, q, n \in \mathbb{N}$ mit $n = p + q$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^p(dx) |f(x, y)| < \infty.$$

Dann gilt $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und die Aussage des Satzes 1.4.4 von Fubini gilt.

(Ohne Beweis)

Betrachte nun eine Verallgemeinerung vom kartesischen Produkt $G \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$:

Definition 1.4.6. Eine Menge $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Normalbereich* bezüglich x_n , falls eine Menge $G \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-1})$ und messbare Funktionen $a, b : G \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

- (i) $\forall x \in G \subset \mathbb{R}^{n-1} : a(x) \leq b(x)$ und
- (ii) $M = \left\{ (x, x_n) \mid x \in G, a(x) \leq x_n \leq b(x) \right\}$.

Korollar 1.4.7 (Fubini). Sei $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ein Normalbereich bezüglich x_n und $f \in \mathcal{L}(M)$. Dann gilt:

$$\int_M f \lambda^n = \int_G \lambda^{n-1}(dx) \int_{[a(x), b(x)]} \lambda^1(dx_n) f(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^{n-1}}, x_n)$$

Beispiel 1.4.8.

- (i) Sei $[c, d] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : G \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $a \leq b$ auf G . Dann ist $M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in G, a(x) \leq y \leq b(x) \right\}$ ein Normalbereich bezüglich y und für $f \in \mathcal{L}(M)$ gilt

$$\int_M f \lambda^2 = \int_{[c, d]} \lambda^1(dx) \int_{[a(x), b(x)]} \lambda^1(dy) f(x, y).$$

Ebenso ist $M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in G, a(y) \leq x \leq b(y) \right\}$ ein Normalbereich bezüglich x und es gilt für $g \in \mathcal{L}(M)$:

$$\int_M g \lambda^2 = \int_{[c, d]} \lambda^1(dy) \int_{[a(y), b(y)]} \lambda^1(dx) g(x, y).$$

- (ii) Sei M gegeben durch

$$\begin{aligned} M &:= \left\{ (x, y) \in [0, \infty)^2 \mid x \leq 4, y \leq 2, y \leq \sqrt{x} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 4], 0 \leq y \leq \sqrt{x} \right\} \text{ (Normalbereich bezüglich } y) \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 2], y^2 \leq x \leq 4 \right\} \text{ (Normalbereich bezüglich } x). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{L}(M)$:

$$\begin{aligned} \int_M f \lambda^2 &= \int_{[0, 4]} \lambda^1(dx) \int_{[0, \sqrt{x}]} \lambda^1(dy) f(x, y) \\ &= \int_{[0, 2]} \lambda^1(dy) \int_{[y^2, 4]} \lambda^1(dx) f(x, y) \\ &\stackrel{\substack{f(x, y) = x \cdot y \\ \text{stetig}}}{=} \int_0^2 dy \underbrace{\left(\int_{y^2}^4 dx \right)}_{= \frac{1}{2} [x^2]_{y^2}^4 = \frac{1}{2} (16 - y^4)} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^2 dy (16y - y^5) \\
&= \frac{1}{2} \left(32 - \frac{32}{3} \right) \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

(iii) Sei $M := S_3 = \{(x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x + y + z \leq 1\}$ ein Tetraeder. Anzumerken ist, dass die Begrenzungsbedingungen gleich bleiben, falls die Koordinaten vertauscht bzw. permutiert werden. Das heißt:

Falls M ein Normalbereich bezüglich z ist, dann ist M auch ein Normalbereich bezüglich x bzw. y .

Setze nun

$$G := S_2 = \{(x, y) \in [0, \infty)^2 \mid x + y \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Dann ist M ein Normalbereich bezüglich z mit

$$M = S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Für $f \in \mathcal{L}(S_3)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_3} \lambda^3(dx, dy, dz) f(x, y, z) \\
&= \int_{[0,1]} \lambda^1(dx) \int_{[0,1-x]} \lambda^1(dy) \int_{[0,1-x-y]} \lambda^1(dz) f(x, y, z) \\
&\stackrel{f(x,y,z)=1+2x}{=} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz (1 + 2x) \\
&\quad \vdots \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Beispiel 1.4.9. Sei $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $\rho : M \rightarrow [0, \infty)$ messbar, wobei ρ als Dichte der Masseverteilung in der Menge M interpretiert wird. Gilt

$$m(\rho) := \int_M \lambda^n(dx) \rho(x) \in (0, \infty),$$

so beschreibt $m(\rho)$ die Masse bezüglich der Dichte ρ . Gilt sogar

$$\int_M \lambda^n(dx) \rho(x) (1 + |x|) < \infty,$$

dann ist der Schwerpunkt der Masseverteilung gegeben durch $s(\rho) = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_k = \frac{1}{m(\rho)} \int_M \lambda^n(dx) \rho(x) \cdot x_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Ist die Dichte innerhalb des Körpers $M \subset \mathbb{R}^3$ konstant gleich 1, so gilt

$$s(\rho) = (s_1, s_2, s_3) \quad \text{mit} \quad s_k = \frac{1}{\lambda^3(M)} \int_M \lambda^3(dx) x_k.$$

LINK: TEIL 1 DER 10. VORLESUNG VOM 9.11.2022

1.5 Transformationsformel

Die Transformationsformel ist eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Integrale. So lässt sich beispielsweise eine Kreisfläche nicht so einfach in kartesischen Koordinaten berechnen, wohl aber in Polarkoordinaten für Radien $r > 0$ und Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Definition 1.5.1. Seien $U, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Psi: U \rightarrow D$ bijektiv. Dann heißt Ψ C^1 -Diffeomorphismus oder C^1 -Koordinatentransformation, falls sowohl $\Psi: U \rightarrow D$ als auch $\Psi^{-1}: D \rightarrow U$ stetig differenzierbar sind.

Bemerkung. Nach Definition gilt $\text{id} = \Psi^{-1} \circ \Psi: u \mapsto u$ und $J_{\text{id}} = \text{id}$.^[15] Somit liefert die Kettenregel:

$$\text{id}(u) = D \text{id}(u) = D(\Psi^{-1} \circ \Psi) = D\Psi^{-1}(\Psi(u)) \cdot D\Psi(u),$$

also

$$\text{id} = J_{\text{id}}(u) = J_{\Psi^{-1} \circ \Psi}(u) = J_{\Psi^{-1}}(\Psi(u)) \cdot J_{\Psi}(u)$$

$$\implies J_{\Psi}^{-1}(u) = J_{\Psi^{-1}}(\Psi(u)) \text{ existiert für alle } u \in U$$

Also ist J_{Ψ} invertierbar; insbesondere gilt

$$\det J_{\Psi}(u) = \det D\Psi(u) \neq 0. \quad [16]$$

Satz 1.5.2 (Transformationssatz). Seien $U, W, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $W \supset A \supset U$ und $\lambda^n(A \setminus U) = 0$. Weiter sei $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\Psi|_U: U \rightarrow D = \Psi(U)$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Für eine Funktion $f: \Psi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $f \in \mathcal{L}(\Psi(A))$
- (ii) $|\det D\Psi| \cdot (f \circ \Psi) \in \mathcal{L}(A)$.

Falls eine der beiden Aussagen erfüllt ist, gilt dann

$$\int_{\Psi(A)} f(x) \lambda^n(dx) = \int_A f(\Psi(u)) \cdot |\det J_{\Psi}(u)| \lambda^n(du).$$

^[15]Dabei bezeichnet J_f wie üblich die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion.

^[16]Dies bezeichnet man auch als *Funktionaldeterminante*.

Beweisskizze. Betrachtung im $\mathbb{R}^2$:

Sei $A := [a, b] \times [c, d]$. Falls Ψ affin-linear ist, dann ist $\Psi(A)$ ein Parallelogramm mit Volumen $\lambda^2(\Psi(A))$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda^2(\Psi(A)) &= |\det(v_1, v_2)| \\ &= |\det(\Psi((b-a)e_1, (d-c)e_2))| \\ &\stackrel{\text{multilin.}}{=} (b-a) \cdot (d-c) |\det D\Psi(e_1, e_2)| \\ &= \lambda^2(A) |\det D\Psi|. \end{aligned}$$

Falls Ψ affin-linear und zusätzlich A eine endliche Vereinigung von Rechtecken, dann gilt aufgrund der Additivität des Lebesgue-Maßes:

$$\lambda^2(\Psi(A)) = |\det D\Psi| \cdot \lambda^2(A).$$

Man sieht, wie die Determinante als „Verzerrungsfaktor“ des Volumens auftaucht.

Ist A ein Rechteck, aber Ψ ein nichtlinearer C^1 -Diffeomorphismus, so ist $\Psi(A)$ näherungsweise ein Parallelogramm. Der Näherungsfaktor ist umso kleiner, je kleiner das Rechteck A ist, da Ψ stetig differenzierbar ist und somit über kleine Differenzen gut durch das lineare $D\Psi$ approximiert wird.

Beide Beobachtungen motivieren nun Folgendes: Man zerlege A in kleinere Rechtecke und wende die Transformationsformel auf jedes Einzelne an – dabei ist der Fehler klein, da auf kleinen Skalen Ψ durch $D\Psi$ approximiert werden darf – und addiere danach über die Beträge der Skalierung.

Sei nun im Folgenden wieder $A = [a, b] \times [c, d]$. Weiter seien Z_1 und Z_2 jeweils eine Zerlegung von $[a, b]$ bzw. $[c, d]$ gegeben durch

$$Z_1 := \{u_0, u_1, \dots, u_r\} \quad \text{bzw.} \quad Z_2 := \{v_0, v_1, \dots, v_s\}.$$

Dann bilden die Rechtecke gegeben durch $R_{j,k} = [u_{j-1}, u_j] \times [v_{k-1}, v_k]$ eine Zerlegung von A .

LINK: TEIL 2 DER 10. VORLESUNG VOM 9.11.2022

Setze nun $S_{j,k} = \Psi(R_{j,k})$. Dann können die „neuen“ $x-y$ -Koordinaten als Komponente von Ψ aufgefasst werden:

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \Psi(u, v) = \begin{pmatrix} \Psi_1(u, v) \\ \Psi_2(u, v) \end{pmatrix}.$$

Zumindest für stetige Abbildungen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann die Approximation

$$\int_{S=\Psi(A)} f(x, y) \lambda^2(dx, dy) \sim \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(x_{j-1}, y_{k-1}) \lambda^2(S_{j,k})^{[17]}$$

glaubwürdig.

Das Volumen $\lambda^2(S_{j,k})$ wird dann approximativ wie oben ermittelt. Da Ψ nicht notwendigerweise linear sein muss, werden die folgende Approximationen w_1 und w_2 gegeben durch

$$w_1 := \Psi(u_j, v_{k-1}) - \Psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \sim (D_1 \Psi(u_{j-1}, v_{k-1})) \cdot (u_j - u_{j-1})$$

bzw.

$$w_2 := \Psi(u_{j-1}, v_k) - \Psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \sim (D_2 \Psi(u_{j-1}, v_{k-1})) \cdot (v_k - v_{k-1})$$

verwendet; dies gilt aufgrund des Mittelwertsatzes und weil $D_1 \Psi$ und $D_2 \Psi$ stetig sind. Damit erhält man nun

$$\begin{aligned} \lambda^2(S_{j,k}) &= |\det(w_1, w_2)| \\ &\sim |\det(D_1 \Psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \cdot (u_j - u_{j-1}), D_2 \Psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \cdot (v_k - v_{k-1}))| \\ &\stackrel{\text{multilin.}}{=} (u_j - u_{j-1})(v_k - v_{k-1}) |\det(D_1 \Psi(u_{j-1}, v_{k-1}), D_2 \Psi(u_{j-1}, v_{k-1}))| \\ &= \lambda^2(R_{j,k}) |\det D\Psi(u_{j-1}, v_{k-1})|. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man dann

$$\begin{aligned} \int_{S=\Psi(A)} f(x, y) \lambda^2(dx, dy) &\sim \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(x_{j-1}, y_{k-1}) \cdot \underbrace{\lambda^2(S_{j,k})}_{= \lambda^2(R_{j,k}) |\det Df(u_{j-1}, v_{k-1})|} \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(\Psi(u_{j-1}, v_{k-1})) |\det Df(u_{j-1}, v_{k-1})| \lambda^2(R_{j,k}) \\ &\sim \int_A f(\Psi(u, v)) |\det D\Psi(uv)| \lambda^2(du, dv). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 1.5.3.

(a) *Translationsinvarianz des Lebesguemaßes:*

Ist $\tau_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + c$ eine Translation, $\Psi = \tau_c$, so ist $D\Psi = D\tau_c = \text{id}$. Insbesondere gilt $\det D\Psi(u) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$. Damit erhält man

$$\lambda^n(\tau_c(A)) = \lambda^n(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), c \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\int_{\tau_c(A)} f(x) \lambda^n(dx) = \int_A f(u + c) \lambda^n(du).$$

^[17] $f(x_{j-1}, y_{k-1})$ beschreibt dabei den Wert in einer Ecke nahe (x, y) und $\lambda^2(S_{j,k})$ das Volumen vom deformierten Rechteck.

(b) *Orthogonaltransformationsinvarianz des Lebesguemaßes:*

Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine zugehörige Abbildungsmatrix. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\det(DL) = \det(L) = \det(B).$$

Insbesondere gilt für beliebige $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda^n(L(A)) = |\det B| \lambda^n(A).$$

Ist L sogar orthogonal, dann gilt

$$|\det DL(u)| = |\det DL| = 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies \lambda^n(L(A)) = \lambda^n(A).$$

(c) Für $r > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ setze $rA := \{r \cdot u \mid u \in A\}$. Dann ist $rA = B(A)$ mit

$$B = r \cdot \text{id} = \begin{pmatrix} r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ist A messbar auf $\mathbb{R}^n$, so auch rA und es gilt

$$\lambda^n(rA) = \lambda^n(B(A)) = |\det B| \lambda^n(A) = r^n \lambda^n(A).$$

Insbesondere gilt $\lambda^n(K_r) = \lambda^n(rK_1) = r^n \lambda^n(K_1)$, wobei $K_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$. Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{rA} f(x) \lambda^n(dx) = \int_A f(r \cdot u) \cdot r^n \lambda^n(du).$$

LINK: TEIL 1 DER 11. VORLESUNG VOM 14.11.2022

Beispiel 1.5.4 (Krummliniges Viereck). Sei $V \subset (0, \infty)^2$ berundet durch $\{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid x = 1\}$, $\{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid y = 2\}$, $\{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid xy = 1\}$ und $\{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid xy = 2\}$.

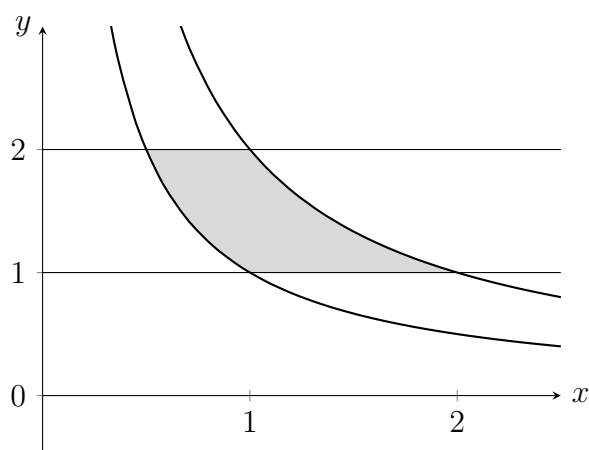


Abbildung 8: Illustration des gegebenen krummlinigen Vierecks.

Berechne das Integral $\int_V xy^2 \lambda^2(dx, dy)$: Suche dazu einen C^1 -Diffeomorphismus Ψ derart, dass $\Psi^{-1}(V)$ ein Rechteck ist. Dazu naheliegend sind $u := xy \in [1, 2]$ und $v := y \in [1, 2]$. Definiere also $\Psi: \underbrace{(0, \infty)^2}_{=:W} \rightarrow [0, \infty)^2$ durch

$$\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/v \\ v \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\Psi([1, 2]^2) = V$, $\Psi((1, 2)^2) = V^\circ$ und es gilt

$$J_\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $\det J_\Psi = \frac{1}{v} > 0$. Außerdem ist $\underbrace{[1, 2]^2}_{=:A} \setminus \underbrace{(1, 2)^2}_{=:U}$ eine Nullmenge (vgl. Übungsblatt 1 der Vorlesung, Aufgabe 3 (c)). Also gilt

$$\int_V \underbrace{xy^2}_{=(xy)y} \lambda^2(dx, dy) = \int_A \underbrace{(uv)\frac{1}{v}}_{=u} \lambda^2(du, dv) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_1^2 dv \underbrace{\int_1^2 du u}_{=[\frac{1}{2}u^2]_1^2} = \frac{3}{2}.$$

Beispiel 1.5.5 (Polarkoordinaten). Sei $\Psi: [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $W = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ ist $([0, \infty) \times [-\pi, \pi]) \setminus W$ eine Nullmenge und $\Psi|_W: W \rightarrow \Psi(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ein C^1 -Diffeomorphismus (leicht zu zeigen) und $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(W)$ eine Nullmenge. Weiter gilt

$$J_\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

also $\det J_\Psi(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0$. Betrachte nun einige Bilder $\Psi(Q)$ von Rechtecken Q :

- $[0, R] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (Kreis)
- $[R_1, R_2] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ (Kreisring)
- $[0, R] \times [\alpha, \beta] \longrightarrow$ Kreissektor

Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ folgt aus der Transformationsformel und Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \lambda^2(dx, dy) = \int_{[-\pi, \pi]} \lambda^1(d\varphi) \int_{[0, \infty)} \lambda^1(dr) f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r.$$

Ist insbesondere f rotationssymmetrisch, das heißt, es gilt $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ mit $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \lambda^2(dx, dy) = 2\pi \int_{[0, \infty)} \lambda^1(dr) g(r) \cdot r.$$

Beispiel. Der Flächeninhalt des Kreises K gegeben durch

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} = \Psi(\underbrace{[0, R] \times [-\pi, \pi]}_{=: A})$$

bestimmt man mit $U = (0, R) \times (-\pi, \pi)$ zu

$$\begin{aligned} \lambda^2(K) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(dx, dy) \\ &\stackrel{\lambda(K \setminus \Psi(U))=0}{\stackrel{\lambda(A \setminus U)=0}{=}} \int_{\Psi(U)} \lambda^2(dx, dy) \\ &= \int_U r \lambda^2(dr, d\varphi) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R r \, dr = 2\pi \frac{1}{2} R^2 = \pi R^2. \end{aligned}$$

LINK: TEIL 2 DER 11. VORLESUNG VOM 14.11.2022

Beispiel 1.5.6. Gesucht sei das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \stackrel{\text{Blatt 5}}{\stackrel{\text{Aufg. 2}}{=}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda^1(dx).$$

Dieses findet Anwendung in der Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerrechnung, Quantenmechanik und in der kinetischen Gastheorie. Das Problem ist jedoch, dass die Funktion $x \mapsto e^{-x^2}$ nicht elementar integrierbar ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda^1(dx) \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda^1(dx) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \lambda^1(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx) \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dy) e^{-(x^2+y^2)} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \lambda^2(dx, dy) \\ &\stackrel{\text{Polark.}}{\stackrel{\text{Fubini}}{=}} \int_{[-\pi, \pi]} \lambda^1(d\varphi) \int_{[0, \infty)} \lambda^1(dr) \underbrace{e^{-r^2} \cdot r}_{\geq 0} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr \\ &= -\pi \left[e^{-r^2} \right]_0^{r \rightarrow \infty} \\ &= \pi < \infty, \end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Beispiel 1.5.7 (Leibnitzsche Sektorformel). Seien $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$ und $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty)$ stetig. Dann heißt $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := \rho(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

eine *Kurve in Polarkoordinaten*.

Gesucht ist der Flächeninhalt des Sektors S gegeben durch

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq r \leq \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]\}.$$

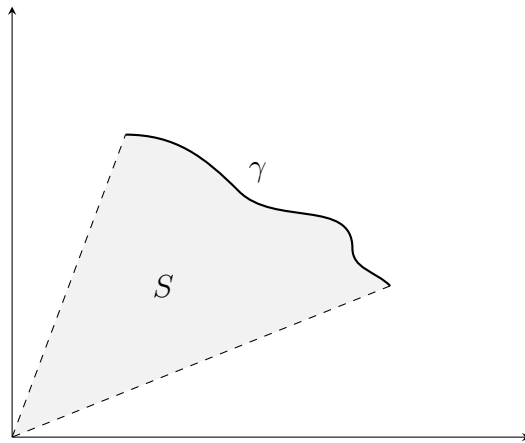


Abbildung 9: Illustration einer Abbildung γ und Sektor S

Mit der Betrachtung von Polarkoordinaten erhält man:

$$\lambda^2(S) = \int_S \lambda^2(dx, dy) = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} dr r = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)^2 d\varphi.$$

Beispiel (Vierblättriges Kleeblatt). Die Randkurve eines vierblättrigen Kleeblattes S in Polarkoordinaten sei gegeben durch $\rho(\varphi) = |\sin 2\varphi|$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Weiter gilt $\cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1 - 2\sin^2 2\varphi$ und man erhält

$$\lambda^2(S) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 1.5.8 (Zylinderkoordinaten). Sei $\Psi : [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Psi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Dabei sind (r, φ) die Polarkoordinaten der Projektion (x, y) des Punktes (x, y, z) auf die xy -Ebene. Mit $W := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ ist $([0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}) \setminus W$ eine Nullmenge,

$\Psi|_W : W \rightarrow \Psi(W) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $\mathbb{R}^3 \setminus \Psi(W)$ ebenfalls eine Nullmenge. Es gilt

$$J_{\Psi|_W}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\det J_{\Psi|_W}(r, \varphi, z) \stackrel{\text{Laplace}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0.$$

Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ folgt dann aus der Transformationsformel und dem Satz von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dz) \int_{[-\pi, \pi]} \lambda^1(d\varphi) \int_{[0, \infty)} \lambda^1(dr) f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r.$$

Beispiel. Bestimme das Volumen eines Kegels $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der Grundfläche $F := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ und einer Spitze in $(0, 0, h)$. Dann ist K gegeben durch:

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \frac{h}{R}(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \right\}.$$

Mit $U := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < R, -\pi < \varphi < \pi, 0 < z < \frac{h}{R}(R - r)\}$ ist $K = \Psi(\overline{U}, \overline{U} \setminus U)$ eine Nullmenge und es gilt

$$\begin{aligned} \lambda^3(K) &= \int_K \lambda^3(dx, dy, dz) \\ &= \int_{\Psi(U)} \lambda^3(dx, dy, dz) \\ &= \int_U \lambda^3(dr, d\varphi, dz) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^{\frac{h}{r}(R-r)} dz \, r \\ &= 2\pi \cdot \frac{h}{R} \underbrace{\int_0^R r(R-r) \, dr}_{=\frac{1}{2}R^3 - \frac{1}{3}R^3} \\ &= \frac{\pi}{3} R^3 \cdot h. \end{aligned}$$

Beispiel 1.5.9 (Rotationskörper). Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig. Dann wird die Ordinatenmenge M_f über f gegeben durch

$$M_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$$

als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ aufgefasst, genauer gesagt, kann M_f folgendermaßen dargestellt werden:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, 0 \leq z \leq f(x), x \in [a, b]\}.$$

Letztere Darstellung lässt sich dann um die x -Achse rotieren und es entsteht ein Rotationskörper K , dessen Volumen sich über Zylinderkoordinaten erfassen lässt: Es gilt

$$\lambda^3(K) = \int_K \lambda^3(dx, dy, dz) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b dx \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{f(x)} dr r = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Beispiel. Betrachte die Funktion $f: [0, h] \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) := \sqrt{x}$. Dann gilt

$$\lambda^3(K) = \pi \int_0^h x dx = \frac{1}{2} \pi h^2.$$

LINK: [TEIL 1 DER 12. VORLESUNG VOM 16.11.2022](#)

Beispiel 1.5.10 (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$). Sei $\Psi: W = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} (r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, \vartheta) \\ y(r, \varphi, \vartheta) \\ z(r, \varphi, \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \cdot \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \cdot \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Interpretation bzw Konvention:

- $r > 0$: Abstand zwischen den Ursprung O und $P = \Psi(r, \varphi, \vartheta)$
- φ (Polarwinkel): Winkel zwischen der Projektion $\overline{OP}$ auf der $x-y$ -Ebene und der positiven x -Achse
- ϑ : Azimutwinkel zwischen dem Strahl $\overline{OP}$ und der $x-y$ -Ebene
- $D = \Psi(W) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R}, x \leq 0 \right\}$ ist eine Nullmenge
- $\Psi: W \rightarrow D$ ist bijektiv und stetig differenzierbar mit

$$J_{\Psi}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \cdot \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cdot \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cdot \cos \varphi \cos \vartheta & -r \cdot \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} & \det J_{\Psi}(r, \varphi, \vartheta) \\ &= r^2 \left(\cos^2 \varphi \cos^3 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \cos^2 \varphi \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^3 \vartheta \right) \\ &= r^2 \left(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \right) \cos \vartheta \\ &= r^2 \cos \vartheta > 0 \quad \text{auf } W. \end{aligned}$$

Da $\Psi^{-1} : D \rightarrow W$ ebenfalls stetig differenzierbar ist, ist $\Psi : W \rightarrow D$ ein C^1 -Diffeomorphismus und die Transformationsformel ist anwendbar. Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) \\
 \stackrel{\text{Nullmenge}}{\underset{\text{weg}}{=}} & \int_D f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) \\
 \stackrel{\text{Trafo}}{=} & \int_W f(\Psi(r, \varphi, \vartheta)) \cdot \underbrace{|\det J_\Psi(r, \varphi, \vartheta)|}_{=r^2 \cos \vartheta} \lambda^3(dr, d\varphi, d\vartheta) \\
 \stackrel{\text{Fubini}}{=} & \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \lambda^1(d\vartheta) \int_{(-\pi, \pi)} \lambda^1(d\varphi) \int_{(0, \infty)} \lambda^1(dr) f \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \cot \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot r^2 \cos \vartheta.
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.5.11.

- (a) Wähle W , D , Ψ und f wie oben, zusätzlich sei jedoch f rotationssymmetrisch, das heißt, es existiert eine messbare Abbildung $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = g\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\|\right) = g(r).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) \\
 = & \underbrace{\int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \lambda^1(d\vartheta) \cos \vartheta}_{=[\sin \vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2}=2} \underbrace{\int_{(-\pi, \pi)} \lambda^1(d\varphi)}_{=2\pi} \int_{(0, \infty)} \lambda^1(dr) g(r) \cdot r^2 \\
 = & 2 \cdot 2\pi \int_{(0, \infty)} g(r) \cdot r^2 \lambda^1(dr)
 \end{aligned}$$

- (b) Konkret: Sei D eine offene obere Halbkugel gegeben durch

$$D = \{(x, y, z) \in B_1(0) \mid z > 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dann ist $\Psi(A) = D$ für

$$A = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid r \in (0, 1), \varphi \in (-\pi, \pi], \vartheta \in (0, \pi/2)\}.$$

Sei weiter $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := z \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \cdot r.$$

Damit gilt $f \in C(\mathbb{R}^3)$ und man erhält

$$\begin{aligned}
 \int_D f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) &= \int_A r \cdot \sin \vartheta \cdot r \cdot r^2 \cos \vartheta \lambda^3(dr, d\varphi, d\vartheta) \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^1 dr r^4}_{=\frac{1}{5}} \\
 &= \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5} \\
 &= \frac{\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.5.12 (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$).

- (a) Man betrachte die Zuordnung $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ ^[18]. Sei weiter $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, es gilt also

$$f(x) = g(\|x\|).$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda^n(dx) = \tau_n \int_{(0, \infty)} \lambda^1(dr) g(r) \cdot r^{n-1}$$

mit einer nur von der Dimension n abhängigen Konstanten τ_n . Setze nun speziell $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$, um τ_n zu ermitteln. Damit folgt $f = \mathbb{1}_{B_1(0)}$ und man erhält

$$\omega_n = \lambda^n(B_1(0)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda^n(dx) = \tau_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \tau_n \left[\frac{1}{n} r^n \right]_0^1 = \frac{\tau_n}{n},$$

also $\tau_n = n \cdot \omega_n$.

- (b) Sei $g(r) = \mathbb{1}_{[0,1]}(r)r^{-\alpha}$. Dann ist $f = f_\alpha$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha} & \text{für } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es folgt

$$f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff \alpha < n \iff n - \alpha > 0.$$

Man erhält dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha \lambda^n = n \cdot \int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr = n \cdot \omega_n \cdot \left[\frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_0^1 = \frac{n}{n-\alpha} \omega_n.$$

^[18] Dabei bezeichnet $r = \|x\|$ den Radius und $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ entsprechende Winkelkoordinaten.

(c) Sei $g(r) = \mathbb{1}_{[1,\infty)}(r)r^{-\alpha}$. Dann ist $f = f_\alpha$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(\|x\|)\|x\|^{-\alpha}$$

und es folgt

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff \alpha > n \iff n - \alpha < 0.$$

Man erhält dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n f_\alpha = n \cdot \omega_n \int_1^\infty dr r^{n-1-\alpha} = n \cdot \omega_n \left[\frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_1^\infty = \frac{n}{|n-\alpha|} \omega_n$$

LINK: TEIL 2 DER 12. VORLESUNG VOM 16.11.2022

2 Vektoranalysis

2.1 Kurvenintegrale und Potentiale

Definition 2.1.1. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, nennt man jede stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ einen *Weg* in $\mathbb{R}^n$. Das Bild $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Bahn* oder *Spur* von γ , während $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ als Anfangs- bzw. Endpunkt von γ bezeichnet werden.

Für $a \leq b$, $c \leq d \in \mathbb{R}$ heißt eine streng isotone, bijektive und stetige Abbildung $\alpha : [a, b] = I \rightarrow [c, d] = J$ eine (*orientierungserhaltende*) *Parametertransformation*.

Führe nun auf der Menge $\{\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid I \text{ echt abgeschlossenes Intervall, } \gamma \text{ stetig}\}$ die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \sim \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$:\iff$ Es ex. orientierungserhaltende Parametertransformation $\alpha : I \rightarrow J$ mit $\gamma = \varphi \circ \alpha$.

Dabei besitzen zwei äquivalente Wege $\varphi \sim \gamma$ denselben Anfangs- und Endpunkt sowie dieselbe Bahnen, es gilt also $\gamma(I) = \alpha(I)$, und die Bahnen durchlaufen auch stets dieselbe Richtung. Man sagt in diesem Fall, dass φ und γ *dieselbe Orientierung* besitzen. Dagegen hat der Weg $-\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

die entgegengesetzte Orientierung bzw. Laufrichtung zu γ .

Setze $\Gamma = [\gamma] = \{\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Weg} \mid \varphi \sim \gamma\}$. Γ heißt dann *Kurve* mit *Parameterdarstellung* oder *Repräsentanten* γ .

Beachte: Es gilt $-\Gamma := [-\gamma] \neq [\gamma]$.

Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Wege mit $\varphi(c) = \gamma(b)$, so definiert man den *zusammengesetzten Weg* $(\gamma \rightarrow \varphi) : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$(\gamma \rightarrow \varphi)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \varphi(c - b + t), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}.$$

Speziell für $\varphi: [b, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($c = b$) gilt

$$(\gamma \uplus \varphi)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \varphi(t), & t \in [b, d] \end{cases}.$$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(b) = \gamma(a)$ gilt, so ist beispielsweise für jeden Weg $\gamma \in \mathbb{R}^n$ der Weg

$$\gamma := \varphi \uplus (-\varphi)$$

geschlossen.

Eine Kurve Γ heißt *glatt*, falls eine Parameterdarstellung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, also $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma \in C^1([a, b])$, existiert, und *stückweise glatt*, falls $\Gamma = [\gamma_1 \uplus \gamma_2 \uplus \dots \uplus \gamma_n]$ (insbesondere ist jeder Anfangspunkt von γ_k der Endpunkt von γ_{k-1}). Damit ist die folgende Äquivalenzbedingung gegeben:

Γ stückweise glatt

$$\iff \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}: \gamma|_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} \text{ stetig differenzierbar für } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Bemerkung 2.1.2 (Motivation der Kurvenintegrale durch Arbeit im Kraftfeld). Verschiebt sich eine Masse durch Einwirkung einer konstanten (Anziehungs-) Kraft $F \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2, 3\}$) um einen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ ist die geleistete Arbeit (Zugewinn an kinetischer Energie) $W = \langle F, s \rangle$. Falls F nicht konstant ist, und sie durch ein Kraft- oder Vektorfeld $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben wird – zum Beispiel durch das Gravitationsfeld der Erde: Wie groß ist dann die geleistete Arbeit, falls sich der Massepunkt entlang einer Kurve γ mit Parameter $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Kraftfeld v bewegt?

LINK: TEIL 1 DER 13. VORLESUNG VOM 21.11.2022

Um diese Frage zu beantworten, wird vorausgesetzt, dass $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise glatt sowie $\gamma([a, b]) \subset D$ ist. Sei weiter $Z = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\} \subset [a, b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, die alle Unstetigkeitsstellen von γ' enthält. Ist die Zerlegung fein genug, es gilt also $\|Z\| < \varepsilon$ ^[19] für ein $\varepsilon > 0$, so erwartet man:

$$\text{Arbeit} \sim \sum_{k=1}^m \left\langle v(\gamma(t_{k-1})), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \right\rangle = \sum_{k=1}^m \left\langle v(\gamma(t_{k-1})), \underbrace{\gamma'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})}_{\substack{\text{MWS} \\ \text{für } \|Z\| < \varepsilon}} \right\rangle$$

Dies ergibt gerade eine Riemann-Summen-Näherung für ein Integral

$$\int_a^b \left\langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt.$$

Dies motiviert die folgende Definition:

^[19]Dabei bezeichnet $\|Z\|$ den größten Abstand zwischen zwei Nachbarpunkten in Z .

Definition 2.1.3. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei weiter $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ stückweise glatt (d.h. stetig und stückweise stetig differenzierbar). Dann bezeichnet man

$$\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \quad (*)$$

als das *Kurvenintegral* (bzw. *Linienintegral*) vom Feld v längs γ , wobei $\Gamma = [\gamma]$.

Alternative Schreibweisen sind gegeben durch

$$\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle =: \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n v_k(x) dx_k,$$

wobei beide durch die Koordinatendarstellungen

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

motiviert werden, da man durch

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{k=1}^n v_k(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b v_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt$$

eine Summe von skalaren Integranden bzw. Integralen erhält. Für eine stückweise glatte Kurve $\Gamma = \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_m$ mit glatten Γ_k gilt dann:

$$\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \langle v(x), dx \rangle.$$

Bemerkung 2.1.4.

- (a) Sind $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Parameterdarstellungen der Kurve $\Gamma = [\gamma] = [\varphi]$, so existiert nach Definition 2.1.3 eine Parametertransformation $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$, so dass $\gamma = \varphi \circ \alpha$. Nach der Ketten- und dann Substitutionsregel gilt dann:

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle v(\varphi(\alpha(t))), \underbrace{\varphi'(\alpha(t))}_{=:s} \rangle \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d \langle v(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds.$$

Insbesondere hängt die Definition von $\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle$ in $(*)$ nicht von dem gewählten Repräsentanten γ der Klasse Γ ab.

- (b) Wegen $\varphi(t) = (-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t) \Rightarrow \varphi'(t) = -\gamma'(a + b - t)$ folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} v(x) \cdot dx &= \int_a^b \langle v(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle v(\underbrace{\gamma(a + b - t)}_{=:s}), \underbrace{\gamma'(a + b - t)}_{=:s} \rangle \underbrace{dt}_{=-ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_b^a \langle v(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds \\
&= - \int_a^b \langle v(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds \\
&= - \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx.
\end{aligned}$$

(c) Für ein kompaktes Intervall I und einen Weg $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ setze:

$$\gamma^A := \gamma(\min I), \quad \gamma^E := \gamma(\max I).$$

Diese Notation wird folgendermaßen begründet: Betrachte einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t) = \gamma(t - 1)$. Dann ist $\gamma(1)$ der Endpunkt von Γ , aber $\varphi(1)$ der Startpunkt von Γ für $\Gamma = [\gamma] = [\varphi]$.

Sind γ und φ Wege in $\mathbb{R}^n$ mit $\gamma^E = \varphi^A$, setze:

$$\int_{\Gamma \rightarrow \Phi} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx + \int_{\Phi} v(x) \cdot dx.$$

LINK: TEIL 2 DER 13. VORLESUNG VOM 21.11.2022

(d) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1 -Parametrisierung einer Kurve Γ , dann setzt man:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt.$$

Ist φ eine andere solche Parametrisierung von Γ , so ergibt sich ähnlich wie oben $L(\gamma) = L(\varphi)$, und man darf dann diesen Wert mit $L(\Gamma)$ bezeichnen. Wegen der Norm gilt hier sogar $L(-\Gamma) = L(\Gamma)$.

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig und stückweise stetig differenzierbar mit einer Zerlegung $\{t_1, \dots, t_N\} \subset [a, b]$, die alle Unstetigkeitsstellen von γ' enthält, so setzt man

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^{N-1} L(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) .$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.1.5. Für einen injektiven und stückweise glatten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = [\gamma]$ bezeichnet $L(\Gamma) = L(\gamma)$ die *Länge der (unorientierten) Kurve* Γ .

Motivation: Sei γ stückweise affin, das heißt, es existieren Vektoren $v_1, \dots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}(t) = \gamma(t_j) + v_{j+1}(t - t_j)$ gilt. Dann gilt

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=v_j} dt = \sum_{j=1}^{N-1} \|v_j\| (t_{j+1} - t_j)^{[20]}$$

^[20]Dabei bezeichnet $\|v_j\|$ die Länge des Geschwindigkeitsvektors und $(t_{j+1} - t_j)$ die Länge des Zeitintervalls.

(e) Es gilt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_a^b \underbrace{\langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}_{\substack{\text{Cauchy-} \\ \leq \\ \text{Schwarz}}} dt \leq \underbrace{\max_{t \in [a,b]} \|v(\gamma(t))\| \cdot L(\Gamma)}_{= \max_{x \in \Gamma} \|v(x)\|}.$$

Beispiel 2.1.6.

(a) Sei $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld gegeben durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \cdot y \end{pmatrix}.$$

Für die Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ zu $(1, 1)$ wählt man dann die Parametrisierung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und somit $\gamma'_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Es gilt dann

$$\int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_0^1 (2t, t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t + t^2) dt = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Sei weiter Γ_2 der Teil der Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ der von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ verläuft. Wähle dann die Parameterdarstellung:

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \implies \gamma'_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

und $v(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx = \int_0^1 \underbrace{(t + t^2, t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}}_{= t + t^2 + 2t^4} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{37}{30}.$$

Fazit: Obwohl die beiden Kurven dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, gilt $\int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx \neq \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx$.

(b) Betrachte das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 4y \end{pmatrix}.$$

Seien weiter $\Gamma_1, \gamma_1, \Gamma_2, \gamma_2$ wie in (a). Dann gilt

$$v(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 4t \end{pmatrix} \implies \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_0^1 (2t^2 + t^2 + 4t) dt = [t^3 + 2t^2]_0^1 = 3$$

und

$$\begin{aligned} v(\gamma_2(t)) &= \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 + 4t^2 \end{pmatrix} \\ \implies \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx &= \int_0^1 (2t^3, 5t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^3 + 10t^3) dt = \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{10}{4}t^4 \right]_0^1 = 3. \end{aligned}$$

Da stellt sich nun die Frage, was die beiden Fälle eigentlich unterscheidet. Die Beantwortung dieser Frage motiviert die folgende Definition:

Definition 2.1.7. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Gibt es ein $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi \in C^1(D)$, mit

$$\text{grad } \Phi = v,$$

so heißt v *Gradientenfeld* oder *konservatives Vektorfeld* und Φ *Potential* (-Funktion) von v .

Beispiel 2.1.8. Für eine stetige Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man $v : D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v(x) = f(\|x\|)x$ ein *Zentralkraftfeld*.

Die Funktion $r \mapsto rf(r)$ ist stetig und auf jedem Intervall $[0, R]$ Riemann-integrierbar. Also existiert eine Stammfunktion $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die wegen $g'(r) = rf(r)$ stetig differenzierbar in $(0, \infty)$ ist. Setzt man $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = g(\|x\|)$, so folgt

$$\text{grad } \Phi(x) = g'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} = f(\|x\|)x = v(x).$$

Das heißt, dass jedes Zentralkraftfeld ein konservatives Vektorfeld ist.

LINK: TEIL 1 DER 14. VORLESUNG VOM 23.11.2022

Insbesondere ist das Gravitationsfeld eines Massepunktes der Masse M gegeben durch

$$v(x) = -\frac{g \cdot M}{\|x\|^3} x, \quad x \neq 0,$$

ein Zentralkraftfeld mit Potential

$$\Phi(x) = \frac{g \cdot M}{\|x\|}, \quad x \neq 0.$$

Nun folgt ein Analogon (und Folgerung) des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

Satz 2.1.9. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenvektorfeld mit Potential $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Sei weiter $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ eine Parameterdarstellung der stückweise glatten Kurve Γ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \Phi(\gamma^E) - \Phi(\gamma^A). \quad (2.1.1)$$

Beweis. Nach Voraussetzung existieren glatte Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, so dass gilt:

$$\Gamma = \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_N.$$

Wenn man jedes Γ_j , $j \in \{1, \dots, N\}$, einzeln betrachtet, erhält man bei der Auswertung der jeweiligen Integrale eine Teleskopsumme, so dass Folgendes gilt:

$$\text{Der Satz gilt für } \Gamma_j \implies \text{Der Satz gilt für } \Gamma.$$

Es darf also ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass Γ selbst glatt ist. Betrachte dazu die Abbildung $F = \Phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(t) = \Phi(\gamma(t))$. Dann ist $F \in C^1([a, b])$ und es gilt nach der Kettenregel (vgl. Analysis II für Lehramt)

$$F'(t) = \frac{d}{dt} (\Phi(\gamma(t))) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right) (\gamma(t)) \frac{d}{dt} \gamma_l(t) = \langle \text{grad } \Phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

und man erhält

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b F'(t) dt \stackrel{\text{HDI}}{=} F(b) - F(a) = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)). \quad \square$$

Damit erhält man als Charakterisierung:

Satz 2.1.10. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *v besitzt ein Potential $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$.*
- (b) *Für jede stückweise glatte und geschlossene Kurve Γ in D gilt:*

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0.$$

- (c) *Seien Γ_1 und Γ_2 stückweise glatte Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann gilt:*

$$\int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx.$$

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b) Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.1.9.

(b) $\Rightarrow$ (c) Betrachte $\Gamma := \Gamma_1 \rightarrow (-\Gamma_2)$. Γ ist stückweise glatt und geschlossen und es gilt

$$0 = \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx + \int_{-\Gamma_2} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx - \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx,$$

also die Behauptung.

(c) $\Rightarrow$ (a) Konstruiere zunächst ein passendes Φ : Wähle dazu den (festen) Referenzpunkt $O \in D$. Da D ein Gebiet ist, ist D auch wegzusammenhängend, es existiert also eine Kurve Γ_x für alle $x \in D$ mit Anfangspunkt O und Endpunkt x . Definiere nun $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(x) := \int_{\Gamma_x} v(y) \cdot dy.$$

Dieser Wert hängt dabei nach Voraussetzung von (c) nicht von der gewählten Verbindungskurve Γ_x ab!

Da D als Gebiet auch offen ist, existieren für alle $x \in D$ ein $\delta > 0$, so dass

$B_\delta(x) \subset D$. Damit folgt, dass für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ eine Verbindungsstrecke $S_j = [x, x + he_j]$ in D enthalten ist. Nach Definition gilt dann

$$\Phi(x + he_j) - \Phi(x) = \int_{\Gamma_x \rightarrow S_j} v(y) \cdot dy - \int_{\Gamma_x} v(y) \cdot dy = \int_{S_j} v(y) \cdot dy.$$

Also ist $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow D$ gegeben durch

$$\sigma_j(t) = x + t \cdot he_j$$

eine Parameterdarstellung von S_j . Nach dem Satz 1.3.6 über parameterabhängige Integrale gilt dann:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (\Phi(x + he_j) - \Phi(x)) \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \langle v(\sigma_j(t)), \underbrace{\sigma_j'(t)}_{=he_j} \rangle dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \int_0^1 v_j(x + the_j) dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} v_j(x + the_j)}_{=v_j(x)} dt \\ &= v_j(x), \end{aligned}$$

also $\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi(x) = v_j(x)$. Damit gilt insbesondere $\text{grad } \Phi(x) = v(x)$, weshalb Φ tatsächlich ein Potential ist. $\square$

LINK: TEIL 2 DER 14. VORLESUNG VOM 23.11.2022

Definition 2.1.11.

- (a) Sei $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \in C^1(D)$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Das Vektorfeld v heißt *wirbelfrei*, falls es die folgende *Integrabilitätsbedingung* erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x) \quad \forall x \in D, i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.1.2)$$

die Jacobi-Matrix J_v ist also symmetrisch.

- (b) Ein $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls es ein $O \in \Omega$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ die Verbindungsstrecke

$$\{t \cdot O + (1 - t)x \mid t \in [0, 1]\}$$

in Ω enthalten ist. In diesem Fall nennt man O ein Zentrum von Ω , und Ω sternförmig bezüglich O . Insbesondere gelten:

Ω ist ein Ball $\Rightarrow \Omega$ ist konvex $\Rightarrow \Omega$ ist sternförmig $\Rightarrow \Omega$ ist wegzusammenhängend.

Lemma 2.1.12. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein C^1 -Gradientenfeld. Dann ist v wirbelfrei.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein Potential $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } \Phi = v$ und $v \in C^1(D)$, also $\Phi \in C^2(D)$. Nach dem Satz von Schwarz gilt dann für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$D_j v_i = D_j D_i \Phi = D_i D_j \Phi = D_i v_j \quad \text{auf } D. \quad \square$$

Nun macht es wieder Sinn, speziell Situationen von affin-linearen Feldern zu betrachten:

Beispiel 2.1.13.

- (a) Sei $c \in \mathbb{R}^n$ und $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $v(x) = c$ ein konstantes Vektorfeld. Für $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ ergibt sich:

$$D_k \Phi(x) = c_k \quad \text{und} \quad \text{grad } \Phi = c = v,$$

Φ ist also ein Potential zu v .

- (b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $v(x) = Ax$. Falls A symmetrisch ist, so gilt für $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$:

$$D\Phi(x) = \frac{1}{2} x^T \underbrace{(A^T + A)}_{=2A^T} = x^T A^T,$$

also $\text{grad } \Phi = (D\Phi(x))^T = Ax = v(x)$. Allgemein gilt sogar:

$$D_k v_j(x) = D_k(a_{jk} x_k) = a_{jk}.$$

Also ist A genau dann symmetrisch, wenn v wirbelfrei ist. Insbesondere gilt:

$$A \text{ ist symmetrisch} \iff v \text{ ist wirbelfrei} \stackrel{2.1.12}{\iff} v \text{ ist ein } C^1\text{-Gradientenfeld.}$$

Nicht nur die Terme in $v(x)$ spielen eine Rolle bei der Konservativitätseigenschaft, sondern auch die Geometrie von D :

Beispiel 2.1.14. Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$D_y v_1(x, y) = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (-1) \cdot 2y = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = D_x v_2(x, y),$$

$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

v ist also wirbelfrei für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$.

Besitzt v aber ein Potential? Falls dies der Fall sein sollte, so muss nach Satz 2.1.10 das Kurvenintegral von v längs einer geschlossenen glatten Kurve Γ gleich Null sein. Sei dazu Γ der Einheitskreis mit Parametrisierung γ gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t}}_{=1}.$$

Es folgt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{=1} dt = 2\pi \neq 0.$$

Es kann also kein Potential existieren.

Lemma 2.1.15. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar derart, dass die Jacobi-Matrix J_v symmetrisch ist für alle $x \in D$, es gilt also $J_v^T = J_v$. Seien weiter $a, b, c \in D$ und $\Delta = \{ta + sb + rc \mid t, r, s \in [0, 1], t + r + s = 1\}$ das Dreieck mit Ecken a, b, c , das in D enthalten ist. Sei nun $\Gamma := \partial\Delta$ der geschlossene Dreiecksweg von a über b nach c . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0$$

Beweis. Betrachte im Beweis, dass sich a, b und c in einer allgemeinen Position befinden, das heißt, nicht auf einer Geraden. Zerlege nun Δ durch Verbindungsstrecken zwischen den Mittelpunkten m_1, m_2 und m_3 der drei Seiten. Dann erhält man vier kongruente Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ und Δ_4 . Wähle nun auf $\Gamma_j = \partial\Delta_j, j = 1, \dots, 4$, dieselbe Orientierung wie auf Γ . Unter Beachtung der Orientierung folgt:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \sum_{m=1}^{12} (\pm 1) \int_L v(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx, \quad (2.1.3)$$

wobei L die jeweiligen Liniensegmente bezeichnet.

LINK: TEIL 1 DER 15. VORLESUNG VOM 28.11.2022

Damit erhält man

$$\left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right| = \left| \sum_{m=1}^{12} (\pm 1) \int_L v(x) \cdot dx \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx \right|$$

Wähle dann den im Betrag Größten der vier Summanden aus und erhalte mit

$$\left| \int_{\Gamma^{(1)}} v(x) \cdot dx \right| = \max_{1 \leq j \leq 4} \left| \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx \right| \quad (2.1.4)$$

für $\Gamma^{(1)} \in \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$ den Umfang von $L(\Gamma^{(1)}) = \frac{1}{2}L(\Gamma)$, da jede Seitenlänge halbiert wird. Ebenso gilt dann für das Durchmesser $\text{diam } \Gamma^{(1)} = \frac{1}{2} \text{diam } \Gamma$.

Definition. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\text{diam } M = \sup_{x, y \in M} \|x - y\|$$

der *Durchmesser* von M .

Da in (2.1.4) das betragsgrößte Kurvenintegral ausgewählt worden ist, gilt

$$\left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx \right| \leq \sum_{m=1}^{12} \left| \int_L v(x) \cdot dx \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma^{(1)}} v(x) \cdot dx \right|.$$

Nun kann man $\Gamma^{(1)} = \partial\Delta^{(1)}$ als „großen Dreiecksweg“ betrachten und wieder unterteilen: Dadurch erhält man ein Dreieck $\Delta^{(2)}$ mit orientiertem Rand $\Gamma^{(2)} = \partial\Delta^{(2)}$, so dass gilt:

$$L(\Gamma^{(2)}) = \frac{1}{2} L(\Gamma^{(1)}) = \frac{1}{4} L(\Gamma) \quad \text{und} \quad \text{diam}(\Gamma^{(2)}) = \frac{1}{2} \text{diam}(\Gamma^{(1)}) = \frac{1}{4} \text{diam}(\Gamma)$$

und

$$\left| \int_{\Gamma^{(1)}} v(x) \cdot dx \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma^{(2)}} v(x) \cdot dx \right|.$$

Induktiv erhält man die Folge $\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \Delta^{(3)} \supset \dots$ von Dreiecken mit

$$L(\Gamma^{(k)}) = \frac{1}{2} L(\Gamma^{(k-1)}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k L(\Gamma) \quad \text{und} \quad \text{diam } \Gamma^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{diam } \Gamma.$$

Es folgt

$$\left| \int_{\Gamma^{(k)}} v(x) \cdot dx \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Gamma^{(k-1)}} v(x) \cdot dx \right| \geq \left(\frac{1}{4}\right)^k \left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right|.$$

Weiter sind alle $\Delta^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, also besteht der Schnitt $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Delta^{(k)}$ genau aus einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (multidimensionale Intervallschachtelung, Übung).

Falls man sich nun auf ein sehr kleines Dreieck $\Delta^{(k)}$ beschränkt, so ist das Vektorfeld v gut durch seine Ableitung approximierbar. Genauer: Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Da v differenzierbar auf x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $B_\delta(x_0) \subset D$ und

$$\|v(x) - v(x_0) - Dv(x_0)(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|) < \varepsilon \|x - x_0\|,$$

falls $x \in B_\delta(x_0)$.

Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\text{diam } \Delta^{(k)} < \delta$. Da $x_0 \in \Delta^{(k)}$, folgt $\Delta^{(k)} \subset B_\delta(x_0)$. Betrachte nun analog zu Beispiel 2.1.13 (a) das Vektorfeld $\tilde{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\tilde{v}(x) := v(x_0) + Dv(x_0)(x - x_0).$$

$\tilde{v}$ besitzt dann ein Potential $\tilde{\Phi}$ gegeben durch

$$\tilde{\Phi}(x) = \langle v(x_0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), J_v(x_0)(x - x_0) \rangle,$$

da ja $J_v(x_0)$ als symmetrisch angenommen worden ist. Es gilt

$$D\tilde{\Phi}(x) = v(x_0) + x^T J_v(x_0) - \frac{1}{2} x_0^T J_v^T(x_0) - \frac{1}{2} x_0^T J_v(x) = v(x_0) + (x - x_0)^T J_v(x_0).$$

Insbesondere gilt dann nach der Äquivalenz in Satz 2.1.10:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Gamma^{(k)}} \langle \tilde{v}(x), dx \rangle \\
 \implies \left| \int_{\Gamma^{(k)}} \langle v(x) - \tilde{v}(x), dx \rangle \right| &= \left| \int_{\Gamma^{(k)}} \underbrace{\langle v(x) - v(x_0) - Dv(x_0)(x - x_0), dx \rangle}_{\|\cdot\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|} \right| \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \varepsilon \max_{x \in \Gamma^{(k)}} \|x - x_0\| \cdot L(\Gamma^{(k)}), \\
 &\quad \text{2.1.4(e)}
 \end{aligned}$$

und insbesondere

$$\left| \int_{\Gamma^{(k)}} \langle v(x) - \tilde{v}(x), dx \rangle \right| \leq \varepsilon \max_{x \in \Delta^{(k)}} \|x - x_0\| \cdot L(\Gamma^{(k)}) \stackrel{x_0 \in \Delta^{(k)}}{\leq} \varepsilon \cdot \underbrace{\text{diam } \Delta^{(k)}}_{=(\frac{1}{2})^k \cdot \text{diam } \Delta} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k L(\Gamma),$$

also insgesamt

$$\left| \int_{\Gamma^{(k)}} v(x) \cdot dx \right| \leq \varepsilon \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \text{diam } \Delta \cdot L(\Gamma)$$

Wegen der Maximalitätseigenschaft der Dreiecke $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots$ gilt dann

$$\left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right| \leq 4^k \left| \int_{\Gamma^{(k)}} v(x) \cdot dx \right| \leq 4^k \varepsilon \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \text{diam } \Delta \cdot L(\Gamma) = \varepsilon \cdot \underbrace{\text{diam } \Delta \cdot L(\Gamma)}_{\text{fest}}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist, folgt die Behauptung. $\square$

LINK: TEIL 2 DER 15. VORLESUNG VOM 28.11.2022

Satz 2.1.16. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbar und wirbelfreies Vektorfeld. Dann besitzt v ein Potential, ist also ein Gradientenfeld.

Beweis. Sei x_0 ein Zentrum von D . Nach globaler Translation des Koordinatensystems kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass D sternförmig bezüglich 0 ist. Definiere nun $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(x) = \int_{[0,x]} v(x) \cdot dx = \int_0^1 \langle v(tx), \underbrace{x}_{=\frac{d}{dt}(tx)} \rangle dt = \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 v_j(tx) dt. \quad (2.1.5)$$

Da D offen ist, existiert dann zu $x \in D$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset D$. Für $h \in (-\delta, \delta)$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt außerdem für die Strecke

$$[x, x + he_k] \subset B_\delta(x) \subset D,$$

ebenso für den Dreiecksweg Γ von 0 über x nach $x + he_k$. Daher gilt nach Satz 2.1.15:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0$$

und damit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi(x + he_k) - \Phi(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\underbrace{\int_{\Gamma} v(y) \cdot dy}_{=0} + \int_{[x, x+he_k]} v(y) \cdot dy \right).$$

Analog zum Beweis der Folgerung (c) $\Rightarrow$ (a) des Satzes 2.1.10 folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x) = v_k(x),$$

also insgesamt $\text{grad } \Phi = v$. □

In beiden Beweisen wurde jeweils ein Potential Φ konstruiert. Mit einer solchen Methoden können tatsächlich auch konkrete Potentiale berechnet werden:

Beispiel 2.1.17.

(a) Sei $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld gegeben durch

$$v(x, y, z) := \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz - y^2z - 1 \\ x^2z - 2xyz + z^2 \\ x^2y - xy^2 + 4yz \end{pmatrix}.$$

Besitzt dieses Vektorfeld ein Potential? Wenn ja, welches? Um dies zu überprüfen, teste zunächst die Jacobi-Matrix J_v auf Symmetrie: Es gilt

$$D_2v_1(x, y, z) = 2xz - 2yz = D_1v_2(x, y, z), \quad D_3v_1(x, y, z) = 2xy - y^2 = D_1v_3(x, y, z),$$

aber

$$D_3v_2(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2z \neq x^2 - 2xy + 4z = D_2v_3(x, y, z).$$

Damit ist J_v nicht symmetrisch, so dass v nicht wirbelfrei ist und somit kein Potential besitzen kann.

(b) Sei $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld gegeben durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 \\ x^2z - 4xy \\ x^2y + 2xz - 2 \end{pmatrix}.$$

Teste J_v auf Symmetrie: Es gilt

$$D_2v_1 = 2xz - 4y = D_1v_2,$$

$$D_3v_1 = 2xy + 2z = D_1v_3$$

$$D_3v_2 = x^2 = D_2v_3.$$

Damit ist J_v symmetrisch, also v wirbelfrei. Da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, folgt dann aus Satz 2.1.16, dass v ein Potential besitzt, also v ein Gradientenfeld ist. Ist $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein solches Potential, so gilt für $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ (vgl. (2.1.5)):

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y, z) &= \sum_{j=1}^3 x_j \int_0^1 v(tx) \cdot dt \\
 &= x \int_0^1 (2t^3xyz + t^2z^2 - 2t^2y^2 + 1) dt \\
 &\quad + y \int_0^1 (t^3x^2z - 4t^2xy) dt \\
 &\quad + z \int_0^1 (t^3x^2y + 2t^2xz - 2) dt \\
 &= \frac{1}{2}x^2yz + \frac{1}{3}xz^2 - \frac{2}{3}xy^2 + x \\
 &\quad + \frac{1}{4}x^2yz - \frac{4}{3}xy^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4}x^2yz + \frac{2}{3}xz^2 - 2z \\
 &= x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z.
 \end{aligned}$$

- (c) Betrachte dasselbe $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wie in Teil (b), aber nun mit so genannter „unbestimmten Integration“: Ist Φ ein Potential von v , so gilt $\text{grad } \Phi = v$, das heißt

$$D_1\Phi(x, y, z) \stackrel{!}{=} v_1(x, y, z) = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, \quad (2.1.6)$$

$$D_2\Phi(x, y, z) \stackrel{!}{=} v_2(x, y, z) = x^2z - 4xy, \quad (2.1.7)$$

$$D_3\Phi(x, y, z) \stackrel{!}{=} v_3(x, y, z) = x^2y + 2xz - 2. \quad (2.1.8)$$

Integriere nun (2.1.6) nach x : Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y, z) &= \int v_1(x, y, z) dx + c \\
 &= \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) dx + c \\
 &= x^2yz + z^2x - 2y^2x + x + c,
 \end{aligned}$$

wobei c von den Parameterwerten y und z abhängt, es gilt also $c = c(y, z)$. Um c zu bestimmen, leitet man zunächst nach y ab und vergleicht anschließend mit (2.1.7): Es gilt

$$x^2z - 4xy = D_y\Phi(x, y, z) = x^2z - 4yx + D_y c(y, z),$$

also $D_y c(y, z) = 0$. c hängt also nur von z ab: $c = c(z)$. Um diese Funktion zu bestimmen, leitet man nun Φ nach z ab und vergleicht anschließend mit (2.1.8): Es gilt

$$x^2 y + 2xz - 2 = D_z \Phi(x, y, z) = x^2 y + 2xz + D_z c(z),$$

also $D_z c(z) = -2$ und damit $c(z) = -2z + K$ für eine beliebige absolute Konstante $K \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\Phi(x, y, z) = x^2 y z + z^2 x - 2y^2 x + x - 2z + K.$$

LINK: TEIL 1 DER 16. VORLESUNG VOM 5.12.2022

Definition 2.1.18. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Man bezeichne außerdem den Vektor der Ableitungen

$$\nabla := (D_1, \dots, D_n)^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

als *Nabla-Operator*.

Die skalare Funktion $\operatorname{div} v : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{div} v(x) := \sum_{j=1}^n (D_j v_j)(x)$$

heißt *Divergenz von v* und kann dann als $\operatorname{div} v(x) = \langle \nabla, v \rangle(x)$ geschrieben werden. Ähnlich kann für ein skalares $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ der Gradient als

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$$

geschrieben werden.

Schließlich definiert man speziell im Fall $n = 3$ das Rotationsvektorfeld $\operatorname{rot} v : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\operatorname{rot} v(x) = \nabla \times v(x) = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix}(x)$$

und nennt es auch *Rotation von v* .

2.2 Integralsätze in der Ebene

Definition 2.2.1. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ eine Parameterdarstellung einer glatten Kurve Γ . Dann heißt

$$\int_{\Gamma} f(x) \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

das *Kurvenintegral* (1. Art) von f längs Γ .

Ist $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ eine stückweise glatte Kurve, insbesondere also Γ_j glatt für jedes $j = 1, \dots, m$, so setzt man

$$\int_{\Gamma} f(x) \, ds := \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f(x) \, dx$$

Bemerkung 2.2.2.

- (a) Kurvenintegrale von Funktionen bleiben gleich, falls sie umparametrisiert werden, genauso wie bei den Kurvenintegralen von Vektorfeldern (Stichwort: Substitutionsregel).
- (b) Bei Kurvenintegralen 1. Art hängt der Wert nicht von der Orientierung der Kurve ab, denn mit $\varphi = -\gamma : [a, b] \rightarrow D$ gegeben durch

$$\varphi(t) = \gamma(a + b - t)$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} f(x) \, ds &= \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b f(\underbrace{\gamma(a + b - t)}_{=: \tau}) \|\underbrace{-\gamma'(a + b - t)}_{=: \tau}\| \, dt \\ &\stackrel{d\tau = -dt}{=} - \int_b^a f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau. \end{aligned}$$

- (c) Für $f = 1$ beschreibt das Kurvenintegral 1. Art die Länge der Kurve Γ : Es gilt

$$L(\Gamma) = \int_a^b 1 \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{\Gamma} 1 \, ds$$

- (d) *Zusammenhang zwischen den Kurvenintegralen 1. Art und 2. Art:*

Für eine glatte Kurve $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma \in C^1([a, b])$ und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ definiert man den *Tangentialeinheitsvektor* von Γ im Punkt $x = \gamma(t) \in \gamma([a, b])$ durch

$$\tau(x) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Dieser hängt von der Orientierung der Kurve Γ ab, nicht aber vom konkreten Repräsentanten $\gamma \in \Gamma = [\gamma]$.

Ist nun $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma([a, b]) \subset D$, so gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx}_{\text{Kurvenint. 2. Art}} &= \int_a^b \left\langle v(\gamma(t)), \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle v(\gamma(t)), \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \right\rangle \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\langle v(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle}_{=f(\gamma(t))} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} f(x) \, ds}_{\text{Kurvenint. 1. Art}}. \end{aligned}$$

Definition 2.2.3.

- (a) Eine Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ heißt *Jordanbogen*, falls eine Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, die injektiv ist.
- (b) Eine Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ heißt *Jordankurve*, falls eine Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, die auf $[a, b)$ injektiv ist und $\gamma(b) = \gamma(a)$ erfüllt; insbesondere ist Γ dann eine geschlossene Kurve.
Beachte: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist immer stetig.

LINK: TEIL 2 DER 16. VORLESUNG VOM 5.12.2022

Definition 2.2.4 (Glatt berandetes Gebiet). Man sagt, dass ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ einen *stückweise glatten Rand* besitzt, falls

- (a) ∂D die Bahn einer geschlossenen Kurve Γ ist und
- (b) es zu jedem $q \in \partial D \subset \mathbb{R}^2$ ein orthogonales Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ mit Parametern (ξ, η) gibt, so dass $q = (\xi = 0, \eta = 0)$ und ein offenes Rechteck $R = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_\eta$ sowie eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $h : (a, b) \rightarrow (c, d)$ existieren mit

$$q = (0, 0) \in \mathbb{R},$$

$$D \cap R = \{(\xi, \eta) \in R \mid \eta < h(\xi)\},$$

$$\partial D \cap R = \{(\xi, \eta) \in R \mid \eta = h(\xi)\}.$$

Von dieser Definition gibt es mehrere (äquivalente und abgeschwächte) Varianten. Bei vielen Anwendungen reicht es, zu fordern, dass h Lipschitz-stetig ist.

Beispiel 2.2.5. Gebiete mit glattem Rand ($h \in C^1((a, b))$) sind beispielsweise Kreise, Ellipsen, Halbebenen sowie Mengen oberhalb einer Parabel oder einer Hyperbel.

Gebiete mit stückweise glattem Rand sind beispielsweise Dreiecke, Rechtecke und Polygone.

Da stellt sich nun die folgende Frage: Was kann man sagen, falls eine Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist? Die Menge $B_1(0) \setminus \{[0, 1] \times \{0\}\}$ ist nicht stückweise glatt berandet, da in $q = (0, 0)$ die Bedingung (b) nicht erfüllbar ist.

Definition 2.2.6.

- (a) Eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt *diskret*, genau dann wenn F keine Häufungspunkte besitzt.
- (b) Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, so existiert eine endliche Teilmenge $F \subset \partial D$, so dass für alle $q \in \partial D \setminus F$ ein Rechteck $R = (a, b) \times (c, d)$ wie in Definition 2.2.4 existiert, so dass $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung einer C^1 -Kurve Γ ist.

Tipp: Man verkleinere das Rechteck R , um gegebenenfalls Unstetigkeitsstellen von h' zu vermeiden.

Für $q \in \partial D \setminus F$ definiere man den *äußeren Normaleneinheitsvektor* in q durch

$$\nu(q) = \nu_a(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} \begin{pmatrix} -h'(\xi) \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\xi \in (a, b)$ mit $h(\xi) = q$. Dann gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \langle \nu(q), \tau(q) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} \cdot \frac{1}{\|\gamma'(\xi)\|} \begin{pmatrix} -h'(\xi) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h'(\xi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2} \sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} (-h'(\xi) + h'(\xi)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

der Normalenvektor steht also senkrecht zum Tangentenvektor. Weiter gilt

$$\|\nu(q)\|^2 = \frac{1}{1 + (h'(\xi))^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -h'(\xi) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h'(\xi) \\ 1 \end{pmatrix}}_{=(h'(\xi))^2 + 1} = 1,$$

$\nu(q)$ ist also normiert. Solch ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^2$ ist bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Dieses Vorzeichen ist dadurch festgelegt, dass $q + \nu_a(q)$ außerhalb von D liegt, genauer:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0) : q + \delta \nu_a(q) \in R \setminus \overline{D} = \{(\xi, \eta) \in R \mid \eta > h(\xi)\}.$$

Deshalb wird $\nu_a(q)$ als *äußerer Normaleneinheitsvektor* im Punkt q bezeichnet. Aber warum ist das so?

Ist $h'(\xi) > 0$ für $\xi \in (a, b)$ mit $q = \gamma(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ h(\xi) \end{pmatrix}$, so gilt dies auch in einer Umgebung von ξ , da nach Annahme $\gamma \in C^1((a, b))$ und damit auch $h \in C^1((a, b))$ gilt. Also ist h strikt isoton in einer Umgebung von ξ , und es folgt

$$h\left(\xi - \underbrace{\varepsilon h'(\xi)}_{< 0}\right) < h(\xi) < h(\xi) + \varepsilon \quad (\times)$$

für ein kleines $\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} > 0$.

Dabei ist $(\times)$ genau die Bedingung an die beiden Koordinaten von $q + \delta \nu_a(q)$, um in $R \setminus D$ zu liegen.

Für $h'(\xi) < 0$ und $h'(\xi) = 0$ argumentiert man dann ähnlich (Übung).

LINK: TEIL 1 DER 17. VORLESUNG VOM 7.12.2022

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Man definiert

$$\int_{\partial D} f(x, y) \, ds := \int_{\Gamma_1} f(x, y) \, ds + \dots + \int_{\Gamma_m} f(x, y) \, ds,$$

wobei $\partial D = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j([a, b])$ für γ_j wie in Teil (b), mit $\gamma_j(a) = \gamma_{j-1}(b)$, $\gamma_m(b) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_1((a, b)), \dots, \gamma_m((a, b))$ disjunkt.

(Dann ist ∂D „ $=$ “ $\Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_m$.)

Satz 2.2.7 (Gaußscher Integralsatz in der Ebene). *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{D} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{div} v \in \mathcal{L}(D)$. Dann gilt:*

$$\int_D \operatorname{div} v(x, y) \, \lambda^2(dx, dy) = \int_{\partial D} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds. \quad (\text{Ga})$$

Beweis. Der Beweis wird für den einfachsten Fall, wenn $D = (a, b) \times (c, d)$ ein Rechteck ist, geführt. Betrachte dazu die folgenden geometrischen Vereinfachungen: Es sei

$$\partial D = \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_4 \text{ mit}$$

$$\gamma_1: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ d \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ c + d - t \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} a + b - t \\ c \end{pmatrix},$$

$$\gamma_4: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist (Ga) also:

$$\underbrace{\int_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) (x, y) \, \lambda^2(dx, dy)}_{\text{I}} = \sum_{j=1}^4 \left(\int_{\Gamma_j} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds \right). \quad (\text{Ga}')$$

Betrachte zunächst den zweiten Summanden in I: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, y) \, \lambda^2(dx, dy) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{[a, b]} \lambda(dx) \int_{[c, d]} \lambda(dy) \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, y) \\ &\stackrel{\substack{v_2 \in C^1(D) \\ \text{R.-Int.}}}{=} \int_a^b dx \underbrace{\int_c^d dy \frac{d}{dy} v_2(x, y)}_{\stackrel{\text{HDI}}{=} v_2(x, d) - v_2(x, c)} \end{aligned}$$

$$= \int_a^b dx \, v_2(x, d) - \int_a^b dx \, v_2(x, c). \quad (2.2.1)$$

Behauptung: Gleichung (2.2.1) ist gleich:

$$\int_{\Gamma_1} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds + \int_{\Gamma_3} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds$$

Beweis. Nach Definition 2.2.1 gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds &= \int_a^b \left\langle v(\gamma_1(t)), \overbrace{\nu_a(\gamma_1(t))}^{=(0,1)} \right\rangle \underbrace{\|\gamma_1'(t)\|}_{=1} \, dt = \int_a^b dt \, v_2(\overbrace{\gamma_1(t)}^{=(t,d)}) \cdot 1 \\ &= \int_a^b dt \, v_2(t, d), \end{aligned}$$

ergibt also den ersten Summanden in (2.2.1). Ebenso gilt nach Definition:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds &= \int_a^b \left\langle v(\overbrace{\gamma_3(t)}^{=(a+b-t,c)}), \overbrace{\nu_a(\gamma_3(t))}^{=(0,-1)} \right\rangle \underbrace{\|\gamma_3'(t)\|}_{=(-1,0)} \, dt \\ &= - \int_a^b v_2(a+b-t, c) \cdot 1 \, dt \\ &\stackrel{\substack{a+b-t=\tau \\ dt=-d\tau}}{=} \int_b^a v_2(\tau, c) \, d\tau \\ &= - \int_a^b v_2(\tau, c) \, d\tau, \end{aligned}$$

entspricht also dem zweiten Summanden in (2.2.1), so dass die Behauptung bewiesen ist.

Was ist nun mit

$$\int_{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_4} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds?$$

Nach Definition gilt wieder:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds &= \int_c^d \left\langle v(\overbrace{\gamma_2(t)}^{=(b,c+d-t)}), \overbrace{\nu_a(\gamma_2(t))}^{=(1,0)} \right\rangle \underbrace{\|\gamma_2'(t)\|}_{=(0,-1)} \, dt \\ &= \int_c^d v_1(b, c+d-t) \, dt \\ &\stackrel{\substack{c+d-t=\tau \\ dt=-d\tau}}{=} - \int_d^c d\tau \, v_1(b, \tau) \\ &= \int_c^d d\tau \, v_1(b, \tau). \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds &= \int_c^d \left\langle v(\overbrace{\gamma_4(t)}^{=(a,t)}), \nu_a(\overbrace{\gamma_4(t)}^{=(-1,0)}) \right\rangle \left\| \overbrace{\gamma_4'(t)}^{=(0,1)} \right\| \, dt \\ &= - \int_c^d dt \, v_1(a, t). \end{aligned}$$

Beide Summanden ergeben dann gerade:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, y) \, \lambda^2(dx, dy) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_c^d dy \int_a^b dx \, \frac{d}{dx} v_1(x, y) \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \int_c^d dy \, (v_1(b, y) - v_1(a, y)) \\ &= \int_{\Gamma_2} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds + \int_{\Gamma_4} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle \, ds. \end{aligned}$$

Indem nun beide Integrale in I summiert, erhält man gerade (Ga'). □

LINK: TEIL 2 DER 17. VORLESUNG VOM 7.12.2022

Man betrachte nun die folgende Uminterpretation:

Definiere dazu für einen „guten Randpunkt“ $q \in \partial D \setminus F$:

$$\tau(q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(q) \\ \nu_2(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_2(q) \\ \nu_1(q) \end{pmatrix},$$

wobei $\nu_a(q) = \begin{pmatrix} \nu_1(q) \\ \nu_2(q) \end{pmatrix}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor in $q \in \partial D$ bezeichnet. Damit ist $\tau(q)$ ein um $\frac{\pi}{2}$, also um 90° , gedrehter äußerer Normalenvektor.

Damit hat man eine Orientierung von ∂D erhalten. Man beachte hierbei, dass diese entgegengesetzt ist zu den Orientierungen der Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ aus dem vorigen Beweis. Da es sich dort jedoch um Kurvenintegrale 1. Art gehandelt hat, sind die Integralwerte unabhängig von der Orientierung.

Zu dem betrachteten Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiere nun das Vektorfeld $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} w_1(x, y) \\ w_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(x, y) \\ -v_1(x, y) \end{pmatrix}.$$

Auch dies ist eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$, aber diesmal in die entgegengesetzte Richtung: Es folgt

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial}{\partial x} w_1 + \frac{\partial}{\partial y} w_2 = \frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1$$

und

$$\langle w, \nu_a \rangle = w_1 \nu_1 + w_2 \nu_2 = v_2 \nu_1 - v_1 \nu_2 = v_2 \tau_2 + v_1 \tau_1 = \langle v, \tau \rangle,$$

die beiden Rotationen heben sich also auf. Dies motiviert:

Satz 2.2.8 (Integralsatz von Green in der Ebene). *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $D \subset \overline{D} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und*

$$\frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \in \mathcal{L}(D).$$

Sei weiter τ der (wie oben konstruierte) Tangentialeinheitsvektor, so dass ∂D im mathematisch positiven Sinne definiert ist. Dann gilt

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \right) (x, y) \lambda^2(dx, dy) = \int_{\partial D} \langle v(x, y), \tau(x, y) \rangle ds^{[21]} = \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx^{[22]} \quad (\text{Gr})$$

Beweis. Man wende Satz 2.2.7 auf $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie oben an (man vergleiche mit Bemerkung 2.2.2 (d)). $\square$

Betrachtet man nun das Vektorfeld $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$\text{rot } u = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} v_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \end{pmatrix},$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1$ wie in (Gr). Dies motiviert:

Bemerkung 2.2.9 (Veranschaulichung der Begriffe „Rotation“ und „Divergenz“). In einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ betrachte man eine Flüssigkeit, die inkompressibel ist und die konstante Dichte $\rho = 1$ besitzt. In jedem Punkt $(x, y) \in D$ fließt die Flüssigkeit in eine Richtung $v(x, y)$. Dies liefert ein Geschwindigkeitsfeld $v : D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_{\partial D} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle ds$$

der Netto-(Ab-)Fluss der Flüssigkeit durch den Rand ∂D nach außen pro Zeiteinheit. Ist dieser Integralwert positiv, so liegt in D eine Quelle von v vor. Die mittlere Ergiebigkeit (der Quelle) von v ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda^2(D)} \int_{\partial D} \langle v, \nu_a \rangle ds.$$

Ist nun $D_k \subset D$ eine Folge von solchen Gebieten mit $(x_0, y_0) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } D_k = 0$, z. B. $D_k = B_{\frac{1}{k}}(x_0, y_0)$, so gilt wegen $v \in C^1(D)$ der folgende Grenzübergang:

$$(\text{div } v)(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(D_k)} \int_{D_k} \text{div } v(x, y) \lambda^2(dx, dy) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(D_k)} \int_{\partial D_k} \langle v, \nu_a \rangle ds.$$

^[21]Ein Kurvenintegral 1. Art, unabhängig von der Orientierung von $\Gamma = \partial D$ mit einer positiv orientierten Parameterdarstellung γ derart, dass $\tau = \gamma' / \|\gamma'\|$.

^[22]Ein Kurvenintegral 2. Art, das von der Orientierung von Γ abhängig ist.

Daher beschreibt $\operatorname{div} v(x_0, y_0)$ die Quellstärke oder lokale Ergiebigkeit von v in (x_0, y_0) .

LINK: TEIL 1 DER 18. VORLESUNG VOM 12.12.2022

Analog bezeichnet man für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ das Integral

$$\int_{\partial D} \langle v(x, y), \tau(x, y) \rangle \, ds = \int_D (\operatorname{rot} u(x, y))_z \, \lambda^2(dx, dy)$$

als *Zirkulation* oder (mittlere) *Wirbelstärke* im Gebiet D bzw. von v längs des Randes ∂D . Wieder mit einem Grenzübergang $r \rightarrow 0$ mit Bällen $B_r(x_0, y_0) \subset D \subset \mathbb{R}^2$ folgt, dass $(\operatorname{rot} u(x_0, y_0))_z$ die Wirbelstärke oder die *Wirbeldichte* von v im Punkt (x_0, y_0) ist.

Korollar 2.2.10.

(a) Man betrachte das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

und eine positiv orientierte Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der stückweise glatten Jordankurve $\Gamma = \partial D$ von einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$.

Nach Bemerkung 2.2.2 (d) gilt dann für den Tangentialeinheitsvektor $\tau(t) \in \mathbb{R}^2$ am Punkt $\gamma(t)$

$$\tau(t) \cdot \|\gamma'(t)\| = \gamma'(t).$$

Der Integralsatz 2.2.8 von Green liefert dann:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \right) (x, y) \, \lambda^2(dx, dy) &= \int_{\partial D} \langle v(x, y), \tau(x, y) \rangle \, ds \\ &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt. \end{aligned}$$

Für $v = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, eingesetzt in der linken Seite, gilt

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \right) (x, y) \, \lambda^2(dx, dy) = \int_D (1 - (-1)) \, \lambda^2(dx, dy) = 2\lambda^2(D).$$

Setzt man den Ausdruck in die rechte Seite ein, so erhält man dementsprechend

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b (\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)) \, dt$$

$$\left[\text{Abgekürzte Notation: } \begin{matrix} x(t)=\gamma_1(t), \\ y(t)=\gamma_2(t) \end{matrix} \right] = \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) \, dt.$$

Insgesamt erhält man dann die Formel:

$$\lambda^2(D) = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] \, dt. \quad (2.2.2)$$

(b) Verallgemeinerte Sektorflächenformel:

Sei Γ ein stückweise glatter Jordanbogen – besitzt also insbesondere keine Selbstüberschneidungen – mit einer (injektiven) Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{0} \notin \gamma([a, b])$.

Betrachte dazu zwei Streckenparametrisierungen $\sigma_A, \sigma_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\sigma_A(t) = t \cdot \gamma^A$ bzw. $\sigma_E(t) = t \cdot \gamma^E$ zwischen den Anfangs- und Endpunkten von Γ . Dann ist $\tilde{\Gamma} = \Sigma_A \rightarrow \Gamma \rightarrow (-\Sigma_E)$ eine stückweise glatte und geschlossene Kurve.

Man nehme nun an, dass

- * $\tilde{\Gamma}$ positiv orientiert und
- * $\tilde{\Gamma}$ der Rand eines Gebietes D ist, also $\Gamma = \partial D$.

Insbesondere sind dann Σ_A und Γ sowie Σ_E und Γ disjunkt. Dann kann man $\lambda^2(D)$ mit Hilfe von (2.2.2) als Summe von drei Kurvenintegralen ausdrücken:

$$\lambda^2(D) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma_A} \langle v, \tau \rangle \, ds + \int_{\Gamma} \langle v, \tau \rangle \, ds + \int_{-\Sigma_E} \langle v, \tau \rangle \, ds \right).$$

Behauptung: Es gilt

$$\int_{\Sigma_A} \langle v, \tau \rangle \, ds = \int_{-\Sigma_E} \langle v, \tau \rangle \, ds = 0.$$

Beweis. Man betrachte zunächst die folgende Frage: Was ist der Tangentialvektor von σ_A ? Man beachte dabei, dass der Tangentialeinheitsvektor parallel zur Kurve Σ_A ist, es gilt also

$$v(\sigma_A(t)) = \begin{pmatrix} -\sigma_2(t) \\ \sigma_1(t) \end{pmatrix} \perp \sigma_A(t).$$

Damit ist $\langle v(\sigma_A(t)), \tau(t) \rangle = 0$ und insbesondere

$$\int_{\Sigma_A} \langle v, \tau \rangle \, ds = \int_a^b 0 \, ds = 0.$$

Dasselbe gilt dann auch für Σ_E , insgesamt gilt also

$$\int_{\Sigma_A} \langle v, \tau \rangle \, ds = \int_{-\Sigma_E} \langle v, \tau \rangle \, ds = 0.$$

Damit folgt aus (2.2.2) für ein Gebiet D , dass ein „verallgemeinerter Sektor“ wie oben definiert ist:

$$\lambda^2(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) \, dt.$$

Dies deckt eine geometrisch allgemeinere Situation als die Leibnizsche Sektorformel (siehe Beispiel 1.5.7) ab, da nicht angenommen wird, dass Γ durch eine Winkelvariable parametrisiert werden kann.

Beispiel 2.2.11. Die Ellipse ist eine Jordankurve: Man kann sie durch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

parametrisieren.

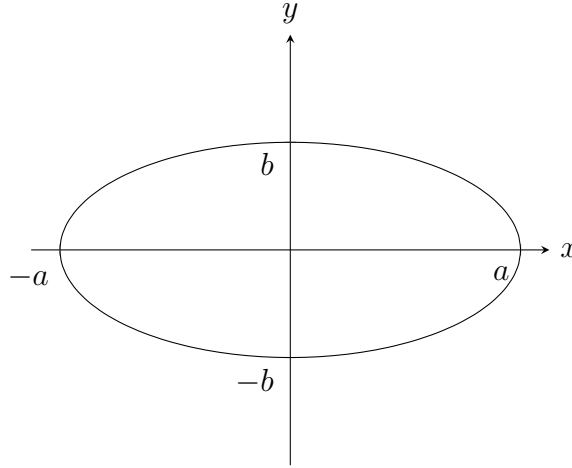


Abbildung 10: Die Bahn einer Ellipse parametrisiert durch γ

Es gilt beispielsweise

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Für $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$ sei nun $G(t_1, t_2)$ der Fahrstrahl σ_t im Zeitraum $[t_1, t_2]$ überstrichene Gebiet. Die Anwendung von Korollar 2.2.10 auf $G(t_1, t_2)$ liefert dann:

$$\lambda^2(G(t_1, t_2)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (ab(\cos t)^2 + ab(\sin t)^2) dt = \frac{ab}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = ab \cdot \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

In jeder Zeitspanne der Länge $T = t_2 - t_1$ überstreicht der Fahrstrahl einen Sektor mit derselben Fläche. ($\implies$ (falsches) 2. Keplersches Gesetz)

2.3 Flächenintegrale

Definition 2.3.1. Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv und stetig differenzierbar und $\psi^{-1} : \psi(W) \rightarrow W$ stetig. Sei weiter für alle $(u, v) \in W$

$$2 = \text{Rang } J_\psi(u, v) = \text{Rang} \begin{pmatrix} D_u \psi_1 & D_v \psi_1 \\ D_u \psi_2 & D_v \psi_2 \\ D_u \psi_3 & D_v \psi_3 \end{pmatrix},$$

von den drei vorkommenden 2×2 -Determinanten muss also mindestens eine ungleich Null sein. Dies ist äquivalent zu der Forderung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq D_u \psi \times D_v \psi = \begin{pmatrix} D_u \psi_2 D_v \psi_3 - D_u \psi_3 D_v \psi_2 \\ D_u \psi_3 D_v \psi_1 - D_u \psi_1 D_v \psi_3 \\ D_u \psi_1 D_v \psi_2 - D_u \psi_2 D_v \psi_1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall nennt man $S := \psi(W)$ ein *reguläres Flächenstück* in $\mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung ψ .

Seien nun ψ, φ zwei verschiedene solcher Parameterdarstellungen von $S \subset \mathbb{R}^3$. Damit ergibt sich nun das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \psi: & W & \\
 & \searrow & \\
 & S = \psi(W) = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3. & \\
 & \nearrow & \\
 \varphi: & U & \\
 & \cap & \\
 & \mathbb{R}^2 &
 \end{array}$$

$$W \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\varphi^{-1}} U$$

$$W \xrightarrow{\alpha} U, \quad \text{mit } \alpha = \varphi^{-1} \circ \psi.$$

Als Verkettung von bijektiven und stetigen Abbildungen ist dann α auch bijektiv und stetig.^[23]

Behauptung. Für alle $(u, v) \in W$ ist $(D\alpha)(u, v)$ regulär, es gilt also $\det(D\alpha)(u, v) \neq 0$.

Beweis. Man wende die Kettenregel auf $\varphi \circ \alpha = \psi$ an: Es gilt

$$\underbrace{J_\psi(u, v)}_{\text{Rang } J_\psi=2} = \underbrace{J_\varphi(\alpha(u, v))}_{\text{Rang } J_\varphi=2} \cdot J_\alpha(u, v).$$

Wäre $\text{Rang } J_\alpha(u, v) < 2$, so wäre das Bild von J_α eindimensional oder nulldimensional, und damit auch das Bild von J_ψ . Dann wäre aber $\text{Rang } J_\psi(u, v) \neq 2$, was ein Widerspruch ist. Also muss $\det(D\alpha)(u, v) \neq 0$ für alle $(u, v) \in W$ gelten.

Da $\alpha : W \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist, hat $\det J_\alpha$ auf ganz W sogar ein festes Vorzeichen. Sind nun ψ und φ Parameterdarstellungen von S derart, dass $\det(D\alpha) > 0$, so heißen ψ und φ *gleich orientiert*. Das ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge

$$\left\{ \psi : W \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ Parameterdarstellung von } S = \psi(W) \right\}$$

aller Parameterdarstellungen von S . Diese Menge zerfällt in zwei Äquivalenzklassen, wovon jede eine Orientierung von S ist.

Beispiel 2.3.2.

- (a) Sei $h : W \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1(W)$ mit dem Graphen $G_h \subset W \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $S := G_h$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix}.$$

^[23]Nach Korollar 2.3.7 (siehe unten) ist α sogar ein C^1 -Diffeomorphismus – ist also insbesondere stetig differenzierbar.

Offensichtlich besitzt die Jacobi-Matrix gegeben durch

$$J_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_u h & D_v h \end{pmatrix}$$

einen vollen Rang.

- (b) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sowie $N = \{x \in D \mid F(x) = 0\}$. Ist $q \in N$ ein Punkt mit $\text{grad } F(q) \neq 0$, so folgt aus dem Satz über implizite Funktionen (vgl. Analysis II für Lehramt), dass eine Umgebung $U = B_\varepsilon(q) \subset \mathbb{R}^3$ von q existiert, so dass $U \cap N$ der Graph einer Funktion h wie in Teil (a) ist. Damit ist $S = U \cap N$ ein reguläres Flächenstück.

- (c) Für $H, R > 0$ parametrisiert $\psi: (0, H) \times (-\pi, \pi) =: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\psi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} s \cdot \cos \varphi \\ s \cdot \sin \varphi \\ t \end{pmatrix},$$

mit $s = R \cdot \left(1 - \frac{t}{H}\right)$ einen aufgeschlitzten Kegelmantel der Höhe H mit Radius R . Der Schlitz entspricht der Parametermenge $\{(t, \pi) \mid t \in [0, H]\}$.

- (d) Für $R > 0$ ist $\psi: (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\psi(\varphi, \vartheta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung der Kugeloberfläche $\mathbb{S}_R^2$ abzüglich eines Halblängengrads.

LINK: TEIL 1 DER 19. VORLESUNG VOM 14.12.2022

Definition 2.3.3. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^3$, für die eine Darstellung der Form

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j \cup \bigcup_{i \in I} N_i \tag{2.3.1}$$

existiert, so dass

- * alle auftretenden Vereinigungen disjunkt sind,
- * die Indexmengen I und J endlich sind,
- * jedes S_j ein reguläres Flächenstück wie in Definition 2.3.1 ist und
- * jedes der N_i eine zweidimensionale Nullmenge ist mit

$$N_i \subset \bigcup_{j \in J} \overline{S_j} \setminus S_j,$$

heißt *Fläche*.

Dabei ist $N \subset \mathbb{R}^3$ eine *zweidimensionale Nullmenge*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge dreidimensionaler Würfel $(W_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ existiert, so dass

$$N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(\lambda^3(W_k))^{2/3}}_{= \frac{1}{3}(\text{diam } W_k)^2} < \varepsilon. \quad (2.3.2)$$

Dabei handelt es sich bei jedem W_k um echte Würfel, sind also von der Form

$$W_k = x_k + [0, a_k]^3 = \left\{ y_k \in \mathbb{R}^3 \mid y_k = x_k + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, b_i \in [0, a_k], 1 \leq i \leq 3 \right\}; \quad [24]$$

insbesondere sind dann alle Seiten gleich lang und für das dreidimensionale Lebesgue-Maß gilt

$$\lambda^3(W_k) = a_k^3.$$

Für das Durchmesser gilt dann:

$$\text{diam } W_k = \sup \{ \|x - y\| \mid x, y \in W_k \} = \sqrt{3} \cdot a_k = \sqrt{3} [\lambda^3(W_k)]^{1/3}.$$

Beachte: Die Fläche jedes Schnittes $W_k \cap V$ für eine affine Ebene $V \subset \mathbb{R}^3$ ist höchstens $(\text{diam } W_k)^2$; dies illustriert, warum die Potenz $2/3$ auftritt.

Beispiel 2.3.4 (für Flächen im $\mathbb{R}^3$). Der Kegelmantel und die Sphäre von oben sind Flächen im $\mathbb{R}^3$, da der Kegelstrahl sowie der Halblängengrad beides zweidimensionale Nullmengen N (wie oben) sind. Ebenso ist die Oberfläche von Würfeln, Pyramiden, Oktaeder, Polyeder, Ellipsoiden usw. eine Fläche.

Man darf sich Flächen mit Spitzen und Kanten „erlauben“, weil sie im $\bigcup_{i \in I} N_i$ -Anteil aus zweidimensionalen Nullmengen enthalten sind, und daher keinen Beitrag bei den (später betrachteten) Flächenintegralen liefern.

Auch das Möbiusband ist eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, aber keine Oberfläche (Rand) einer dreidimensionalen Menge.

Eine Kante des Einheitswürfels W gegeben durch

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_{\max} = \|x\|_{\infty} \leq 1 \}$$

ist die Menge

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in [-1, 1] \right\} \subset \partial W \subset \mathbb{R}^3.$$

Offensichtlich gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$W^\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} : x_1 \in [-1, 1], x_2, x_3 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \right\} \supset K$$

und

$$\lambda^3(W^\varepsilon) = 1 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 \implies (\lambda^3(W^\varepsilon))^{2/3} = \varepsilon^{4/3} < \varepsilon.$$

^[24]Dabei ist es egal, ob W_k offen, halboffen oder abgeschlossen ist.

Beispiel 2.3.5 (Gute und schlechte Parametrisierungen). Sei

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u, v \in (-1, 1) \right\} = (-1, 1)^2$$

und

$$\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 5 \end{pmatrix},$$

es gilt also $S := \psi(W) = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \{5\}$.

Offensichtlich ist $\psi: W \rightarrow S$ bijektiv und stetig differenzierbar auf W .

Man betrachte nun eine alternative Parameterdarstellung φ gegeben durch

$$\varphi: U = W \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y \\ 5 \end{pmatrix}.$$

φ ist bijektiv und stetig differenzierbar: φ^{-1} ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}: S \rightarrow W, \quad \varphi^{-1}(\xi, y, 5) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(\xi) \cdot \sqrt[3]{|\xi|} \\ y \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt:

$$x \mapsto x^3 \text{ ist bijektiv, isoton und stetig} \xrightarrow{\text{Ana I}} \xi \mapsto \sqrt[3]{|\xi|} \text{ ist bijektiv, isoton und stetig.}$$

Damit ist die Umparametrisierung $\alpha = \varphi^{-1} \circ \psi: W \rightarrow W$ gegeben durch

$$\begin{aligned} W &\xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\varphi^{-1}} W, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} u \sqrt[3]{|u|} \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Verknüpfung bijektiver und bi-stetiger Abbildungen selber bijektiv und stetig.

Aber: $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}: W \rightarrow W$ ist nicht partiell differenzierbar in u -Richtung in allen Punkten

$w = (u, v) \in W$ mit $u = 0$, denn für $u \geq 0$ ist $\alpha(u, v) = \sqrt[3]{u}$ und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (\alpha_1(u + \varepsilon, v) - \alpha_1(u, v)) &= \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt[3]{u + \varepsilon} - \sqrt[3]{u}) \\ &\stackrel{u=0}{=} \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon^{-2/3} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty, \end{aligned}$$

insbesondere ist α nicht stetig differenzierbar!

LINK: TEIL 2 DER 19. VORLESUNG VOM 14.12.2022

Aber was ist nun schief gelaufen? Betrachte dazu die Rang-2-Bedingung an die Jacobi-Matrix von ψ bzw. φ : Es gilt

$$J_\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad J_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

aber

$$J_\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad J_\varphi = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{u=0}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es gilt also $\text{Rang } J_\varphi(0, v) = 1$ für alle $v \in (-1, 1)$.

Bemerkung / Definition 2.3.6 (Geometrische Interpretation der Ableitung $D\psi$). Es sei $w = (u_0, v_0) \in W$ und $\psi: W \rightarrow S$ bijektiv und stetig differenzierbar. Die Punkte nahe w werden auf Punkte nahe $q = \psi(w)$ abgebildet, da ψ stetig ist.

Was ist dann mit den Koordinatenrichtungen?

Betrachte dazu die Kurven γ_B und γ_L : Mit

$$\gamma_B(t) = \psi \begin{pmatrix} u_0 + t \\ v_0 \end{pmatrix} = \psi(w + t \cdot e_1)$$

ist $\gamma'_B(t=0)$ ein Tangentialvektor an der Kurve im Punkt $q = \psi(w)$ (Breitengrad). Ebenso mit

$$\gamma_L(t) = \psi \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 + t \end{pmatrix} = \psi(w + t \cdot e_2)$$

ist dann $\gamma'_L(0)$ auch ein Tangentenvektor an $q \in S$ (Längengrad).

Wie stehen die beiden Vektoren zueinander?

e_1 und e_2 stehen orthogonal zueinander – sind also insbesondere linear unabhängig –, während die Bedingung

$$2 = \text{Rang } D\psi = \text{Rang} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ D_1\psi & D_2\psi \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

bedeutet, dass die Vektoren

$$\gamma'_B(0) = D_1\psi(u_0, v_0) \quad \text{und} \quad \gamma'_L(0) = D_2\psi(u_0, v_0)$$

linear unabhängig sind. γ'_B und γ'_L spannen also einen zweidimensionalen Vektorraum $T_q \subset \mathbb{R}^3$ auf. $T_q(S) = T_q$ heißt *Tangentialebene* oder *Tangentialraum* an S im Punkt q . Jeder Vektor $\tau \in T_q$ kann als $\tau = \gamma'(0)$ für eine Kurve

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \psi(w + t \cdot h)$$

mit einem $\varepsilon > 0$ und einem Richtungsvektor $h \in \mathbb{R}^2$ dargestellt werden. Wegen der linearen Unabhängigkeit ist für alle $w \in W$

$$\tilde{\nu}(w) = (D_u \psi)(w) \times (D_v \psi)(w) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist der *Normaleneinheitsvektor*

$$v_\psi(q) := \frac{\tilde{\nu}(w)}{\|\tilde{\nu}(w)\|} \quad (2.3.3)$$

an S im Punkt q wohldefiniert.

Erhält man denselben Normaleneinheitsvektor $\nu_\psi(q)$, falls man eine andere Parametrisierung (wie in Definition 2.3.1) betrachtet?

Ja – bis auf das Vorzeichen, es gilt also $\nu_\varphi(q) = \pm \nu_\psi(q)$:

Ist $\varphi \sim \psi$, das heißt, es gilt $\det J_\alpha > 0$ bzw. $\det J_\alpha < 0$ auf W für eine Umparametrisierung α , so tritt das Vorzeichen $+$ bzw. $-$ für alle $q \in S$ auf.

Das heißt, dass durch die Wahl einer der beiden möglichen Richtungen des Normaleneinheitsvektorfeldes $\nu: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, eine der beiden möglichen Orientierungen festgelegt wird. Man könnte also $\nu_\psi(q) = \nu_\sigma(q)$ schreiben, wobei

$$\sigma = [\psi] = \left\{ \varphi: W_\varphi \rightarrow S \text{ Parameterdarstellung} \mid \varphi \sim \psi \right\}$$

eine Orientierung ist.

Achtung: Beim Möbiusband kann kein äußeres bzw. inneres Normalenvektorfeld definiert werden, es existieren also Flächen, die nicht orientierbar sind.

Dagegen ist die Orientierung auf regulären Flächenstücken immer definiert.

Die Umparametrisierung zwischen Parameterdarstellungen eines regulären Flächenstückes sind übrigens immer C^1 -Diffeomorphismen:

Korollar 2.3.7. Sind $\psi: W \rightarrow S$, $\varphi: U \rightarrow S$ Parameterdarstellungen desselben regulären Flächenstückes $S \subset \mathbb{R}^3$ wie in Definition 2.3.1, so ist $\psi^{-1} \circ \varphi: U \rightarrow W$ stetig differenzierbar.

┌

Da man die Rollen von φ und ψ vertauschen kann, ist dann insbesondere $\alpha = \varphi^{-1} \circ \psi: W \rightarrow U$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

└

Dieses Korollar ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz 2.3.8 (Differenzierbarkeit von S -wertigen Funktionen). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\psi: W \rightarrow S$ wie in Definition 2.3.1. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(U) \subset S$. Dann gilt:

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ist stetig differenzierbar auf } U$$

$$\iff \psi^{-1} \circ f: U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^2 \text{ ist stetig differenzierbar auf } U.$$

Fazit: Für Differenzierbarkeitsfragen von Funktionen mit Werten in $S \subset \mathbb{R}^3$ spielt es keine Rolle, ob man f als Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^3$ oder mit Werten im Koordinaten- bzw. Parameterraum $W \subset \mathbb{R}^2$ auffasst.

Beweisidee. Verwendung des Satzes über Umkehrfunktionen (verwandt mit dem Satz über implizite Funktionen). Dabei spielt $\text{Rang } D\psi = 2$ eine zentrale Rolle.

LINK: TEIL 1 DER 21. VORLESUNG VOM 9.1.2023

Beispiel 2.3.9.

- (a) Ist $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F \in C^1(D)$ sowie $q \in N = \{x \in D \mid F(x) = 0\}$ mit $DF(q) \neq 0$, so ist für ein $\varepsilon > 0$, das klein genug ist, die Menge $S = N \cap B_\varepsilon(q)$ ein reguläres Flächenstück und

$$\nu(q) = \pm \frac{1}{\|\text{grad } F(q)\|} \text{grad } F(q).$$

- (b) Für die Parameterdarstellung der Sphäre (bis auf einer zweidimensionalen Nullmenge) gegeben durch

$$\psi(\varphi, \vartheta) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

gilt

$$D_\varphi \psi = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_\vartheta \psi = r \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Das Vektorprodukt der beiden Tangentialvektoren liefert dann einen Normalenvektor:

$$D_\varphi \psi \times D_\vartheta \psi = r^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \vartheta \\ \sin \varphi \cos^2 \vartheta \\ \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta + \cos^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix} = r^2 \cos \vartheta \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix};$$

dabei gilt

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \right\|^2 &= \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \\ &= \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1. \end{aligned}$$

Also ist $\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$ der Normaleneinheitsvektor zu S im Punkt $q = \psi(\varphi, \vartheta)$, und zwar der Äußere.

Das Ziel ist es nun, analog zum Kurvenintegral 1. Art das Flächenintegral $\int_S f(x) \, d\sigma$ zu definieren, wobei

- * S ein reguläres Flächenstück ist (später dann auch eine Fläche),
- * $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (später dann auch „integrierbar“) und
- * $d\sigma$ das noch zu definierende Oberflächenmaß ist.

Motivation / Veranschaulichung:

- Ist f die Dichte einer Ladungsverteilung auf einer dünnen Metallschicht S , so ist $\int_S f \, d\sigma$ die Gesamtladung.
- Ist f die Dichte einer Masseverteilung einer dünnen Schicht, so ist $\int_S f \, d\sigma$ die Gesamtmasse der Schicht.

┌

Insbesondere: Ist $f \equiv 1$ auf S , so ist $\int_S f \, d\sigma = \int_S 1 \, d\sigma$ die Fläche von S .

└

Um eine Intuition zu erhalten, wie das Flächenintegral lauten sollte, betrachtet man ein reguläres Flächenstück $S \subset \mathbb{R}^3$ mit einer bijektiven Parameterdarstellung $\psi: W \rightarrow S$, $\psi \in C^1(W)$ usw., und W offen. In W wähle nun ein abgeschlossenes Rechteck $R = [a, b] \times [c, d]$ und $Q = \psi(R) \subset S \subset \mathbb{R}^3$.

Im Folgenden geht man nun analog vor wie bei dem Beweis des Transformationssatzes 1.5.2 für Integrale. Seien:

$$Z_1 = \{u_0, u_1, \dots, u_r\} \subset [a, b] \quad \text{Zerlegung von } [a, b]$$

sowie

$$Z_2 = \{v_0, v_1, \dots, v_s\} \subset [c, d] \quad \text{Zerlegung von } [c, d],$$

für $r, s \in \mathbb{N}$ mit Feinheiten $\|Z_1\| < \varepsilon$, $\|Z_2\| < \varepsilon$. Betrachte nun Teilrechtecke $R_{j,k}$ gegeben durch

$$R_{j,k} = [u_{j-1}, u_j] \times [v_{k-1}, v_k] \subset R \subset W$$

mit unteren linken Ecken (u_{j-1}, v_{k-1}) . Dann ist die Überdeckung

$$R = \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{k=1}^s R_{j,k}$$

bis auf die Kantenstücke disjunkt. Dann ist

$$Q = \psi(R) = \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{k=1}^s Q_{j,k} \quad \text{mit} \quad Q_{j,k} = \psi(R_{j,k})$$

ebenfalls bis disjunkt bis auf den zweidimensionalen Nullmengen bestehend aus den Kurvenstücken. Setze nun $q_{j,k} = \psi(r_{j,k})$.

Die Idee ist nun folgende:

$$\int_Q f(x, y, z) \, d\sigma \approx \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(q_{j,k}) \sigma(Q_{j,k}) \quad \text{für } \varepsilon \text{ klein genug,}$$

wobei $\sigma(Q_{j,k})$ der Flächeninhalt von $Q_{j,k}$ sein soll. Wie ist dieser jedoch definiert?

Für kleine $u_j - u_{j-1}$ und $v_k - v_{k-1}$ ist in $Q_{j,k}$ approximativ ein im Punkt $q_{j,k}$ angeheftetes Parallelogramm $P_{j,k}$ aufgespannt durch die beiden Vektoren

$$\psi(u_j, v_{k-1}) - \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \underset{\psi \in C^1}{\overset{\text{MWS}}{\approx}} \frac{\partial}{\partial u} \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \cdot (u_j - u_{j-1})$$

und

$$\psi(u_{j-1}, v_k) - \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \underset{\psi \in C^1}{\overset{\text{MWS}}{\approx}} \frac{\partial}{\partial v} \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \cdot (v_k - v_{k-1}).$$

LINK: TEIL 2 DER 21. VORLESUNG VOM 9.1.2023

Man erhält damit den folgenden Zusammenhang:

$$R_{j,k} \text{ Rechteck} \xrightarrow{\psi} Q_{j,k} = \psi(R_{j,k}) \approx P_{j,k} \text{ Parallelogramm,}$$

$$\lambda^2(R_{j,k}) \text{ Fläche.}$$

Aus der linearen Algebra ist weiter bekannt, dass die Fläche eines Parallelogramms gleich der Norm bzw. der Länge des Vektorprodukts der Seitenvektoren ist: Man erhält

$$\lambda^2(P_{j,k}) = \|D_u \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \times D_v \psi(u_{j-1}, v_{k-1})\| \cdot \underbrace{(u_j - u_{j-1}) \cdot (v_k - v_{k-1})}_{=\lambda^2(R_{j,k})}.$$

Einsetzen in die Summe liefert dann die Näherungsformel:

$$\begin{aligned} \int_Q f \, d\sigma &\underset{\text{klein genug}}{\overset{\varepsilon}{\approx}} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(\psi(u_{j-1}, v_{k-1})) \|D_u \psi \times D_v \psi(u_{j-1}, v_{k-1})\| \cdot \lambda^2(R_{j,k}) \\ &\approx \int_R f(\psi(u, v)) \cdot \|D_u \psi \times D_v \psi(u, v)\| \lambda^2(du, dv). \end{aligned}$$

Da jedes offene W zerlegt ist in Rechtecke $W = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} R^{(\alpha)}$, die bis auf die Ränder disjunkt sind,

kann das Integral $\int_S f \, d\sigma$ als Summe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{Q^{(\alpha)}} f \, d\sigma$ mit Bildern $Q^{(\alpha)} = \psi_\alpha(R^{(\alpha)})$ von Rechtecken, dessen Vereinigungen disjunkt auf zweidimensionale Nullmengen sind, geschrieben werden. Indem man die obigen Plausibilitätsüberlegungen rigoros fasst und etwas verallgemeinert, erhält man dann:

Definition 2.3.10. Sei $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks $S \subset \mathbb{R}^3$ und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) f heißt (Lebesgue-)integrierbar auf S genau dann, wenn:

$$(f \circ \psi)(\cdot) \|D_u \psi \times D_v \psi(\cdot)\| \in \mathcal{L}(W).$$

- (b) In diesem Fall ist das *Flächenintegral* von f über S definiert durch

$$\int_S f(x, y, z) \, d\sigma := \int_W f(\psi(u, v)) \, \|D_u \psi \times D_v \psi(u, v)\| \, \lambda^2(du, dv).$$

Dabei wird auf den bereits bekannten Begriff des Lebesgue-Integrals der Funktion

$$W \ni (u, v) \mapsto f(\psi(u, v)) \cdot \|D_u \psi \times D_v \psi(u, v)\|$$

zugegriffen.

Bemerkung 2.3.11.

- (a) Der Wert des Flächenintegrals $\int_S f$ hängt nicht von der gewählten Parameterdarstellung $\psi: W \rightarrow S$ ab, was aus dem Transformationssatz 1.5.2 folgt.
- (b) Seien $h: W \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1(W)$, $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\psi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix},$$

wobei ψ eine Parameterdarstellung des Graphen $G_h \subset W \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ von h ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} D_u f &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_u h(u, v) \end{pmatrix}, \quad D_v f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_v h(u, v) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|D_u f \times D_v f\| &= \left\| \begin{pmatrix} -D_u h \\ -D_v h \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + (D_u h)^2 + (D_v h)^2}. \end{aligned}$$

- (c) Eine Menge $B \subset S$ heißt *messbar*, falls $A := \psi^{-1}(B) \subset W \subset \mathbb{R}^2$ messbar ist. Dann ist der *Flächeninhalt* von B definiert als

$$\sigma(B) = \int_S \mathbb{1}_B \, d\sigma = \int_A \|D_u f \times D_v f\| (u, v) \, \lambda^2(du, dv) \in [0, \infty].$$

Für unbeschränkte Mengen B kann der Flächeninhalt auch ∞ sein. Man bezeichnet B als zweidimensionale Nullmenge, falls $A = \psi^{-1}(B)$ eine λ^2 -Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ ist. Dieser Begriff ist konsistent mit dem vorigen Begriff der zweidimensionalen Nullmenge.

- (d) Ist $S = \dot{\bigcup} S_j \dot{\bigcup} \dot{\bigcup} N_i \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche wie in Definition 2.3.3 und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so setze

$$\int_S f \, d\sigma := \sum_{j \in J} \int_{W_j} f(\psi_j(u, v)) \cdot \|D_u \psi_j \times D_v \psi_j\| (u, v) \, \lambda^2(du, dv),$$

wobei J eine endliche Indexmenge ist und für $j \in J$ gilt:

$$\psi_j: W_j \rightarrow S_j \quad \text{ist eine Parameterdarstellung von } S_j.$$

Über die Mengen N_i muss nicht integriert werden, denn sie liefern den Beitrag Null, da sie zweidimensionale Nullmengen sind.

Beispiel 2.3.12.

- (a) Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ die Kugel mit Radius $r > 0$ und f integrierbar über S . Dann gilt:

$$\int_S f(x, y, z) \, d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi f(r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cdot r^2 \cos \vartheta.$$

Insbesondere gilt für $f \equiv 1$:

$$\int_S 1 \, d\sigma = \dots = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta; \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi r^2 \cos \vartheta = 2\pi \cdot 2 \cdot r^2 = 4\pi r^2.$$

LINK: TEIL 1 DER 21. VORLESUNG VOM 11.1.2023

- (b) *Rotationsfläche:*

Sei $f: (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man bilde nun den Graphen G_f von f in $\mathbb{R}^3$ ein: Man erhält $\tilde{G}_f \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\tilde{G}_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (a, b), z = f(x), y = 0\}.$$

Rotiert man nun diese Menge $\tilde{G}_f$ um die x -Achse, so entsteht eine sogenannte *Rotationsfläche* S_f : Es existiert also eine Parameterdarstellung $\psi: W \rightarrow S_f \setminus N$, wobei N eine zweidimensionale Nullmenge ist. Also ist S_f eine Fläche, wie sie oben definiert ist. Mit Hilfe von dem obigen ψ ergibt sich dann:

$$\sigma(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

(Übung!)

- (c) Ist speziell $f: (0, h) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, so heißt die entstehende Rotationsfläche S_f *Rotationsparaboloid* und es gilt

$$\begin{aligned} \sigma(S_f) &= 2\pi \int_0^h \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, dx \\ &= \pi \int_0^h \sqrt{4x+1} \, dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot [(4x+1)^{3/2}]_0^h \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot ((4h+1)^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

- (d) Ist $Q = \times_{k=1}^3 [a_k, b_k]$ ein Quader, so besteht der Rand ∂Q aus 6 regulären Flächenstücken (Rechtecke) und 12 (halb-)offenen Liniensegmenten, die alle zweidimensionale Nullmengen sind:

$$Q = S_1 \cup \dots \cup S_6 \cup N_1 \cup \dots \cup N_{12}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\sigma(\partial Q) &= \sum_{j=1}^6 \sigma(S_j) \\ &= 2((b_1 - a_1)(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) + (b_2 - a_2)(b_3 - a_3)).\end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.13.

(a) Notation:

Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, so setze (vgl. Definition 2.3.10):

$$f \in \mathcal{L}(S) : \Longleftrightarrow f \text{ ist integrierbar über } S.$$

(b) In Bemerkung 2.3.11 wurde das Integral $\int_S f \, d\sigma$ einer (stetigen) Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ über eine Fläche definiert. Der Wert des Integrals hängt dabei nicht von der gewählten Zerlegung

$$S = \dot{\bigcup}_{j \in J} S_j \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{i \in I} N_i = \dot{\bigcup}_{k \in K} \tilde{S}_k \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{l \in L} \tilde{N}_l$$

ab.

Beweisidee. Man betrachte dazu eine dritte Zerlegung, die die beiden obigen verfeinert:

$$S = \dot{\bigcup}_{j \in J} \dot{\bigcup}_{k \in K} (S_j \cap \tilde{S}_k) \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{i \in I} \dot{\bigcup}_{l \in L} (N_i \cap \tilde{N}_l).$$

Es folgt beispielsweise

$$\int_{S_1} f \, d\sigma = \int_{S_1 \cap \tilde{S}_1} f \, d\sigma + \int_{S_1 \cap \tilde{S}_2} f \, d\sigma$$

wegen $S_1 = S_1 \cap \tilde{S}_1 \dot{\cup} S_1 \cap \tilde{S}_2 \dot{\cup} T$, wobei mit T eine Trennkurve bezeichnet wird.

Definition 2.3.14.

(a) Ist $S = \dot{\bigcup}_{j \in J} S_j \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{i \in I} N_i$ eine Fläche, so heißt jedes $q \in \dot{\bigcup}_{j \in J} S_j$ *regulärer Punkt* von S .

(b) Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ heißt *stückweise glatt berandetes Gebiet*, falls G beschränkt, offen und zusammenhängend ist sowie ∂G eine Fläche ist und G in jedem regulären Punkt $q \in \partial G$ auf einer Seite von ∂G liegt.

Genauer: Zu jedem regulären Punkt $q \in \partial G$ existiert ein Koordinatensystem (ξ, η, ζ) von $\mathbb{R}^3$ derart, dass

$$q = (\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0) \tag{2.3.4}$$

gilt und für einen offenen Quader $Q = R \times (c, d) \subset \mathbb{R}^3$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $h: R \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$q \in Q, \quad h(R) \subset (c, d),$$

$$G \cap Q = \{(\xi, \eta, \zeta) \in Q \mid \zeta < h(\xi, \eta)\},$$

$$\partial G \cap Q = \{(\xi, \eta, \zeta) \in Q \mid \zeta = h(\xi, \eta)\}.$$

Ist G ein stückweise glatt berandetes Gebiet, so schreibt man $G \in \mathcal{G}_S = \mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)$ und ∂G heißt stückweise glatter Rand.

- (c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Kann man $D_1 f$, $D_2 f$ und $D_3 f$ stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen, so schreibt man $f \in \bar{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
Ist $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, und sind alle ersten und zweiten Ableitungen (auch gemischte) auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbar, so schreibt man $g \in \bar{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

LINK: TEIL 2 DER 21. VORLESUNG VOM 11.1.2023

Bemerkung 2.3.15.

- (a) Kugeln, Kugelschalen, Halbkugeln, Ellipsoide, Pyramiden, Quader, Polytope sowie Rotationskörper sind alle Elemente von $\mathcal{G}_S(\mathbb{R}^3)$. In all diesen Fällen ist $\sigma(\partial G)$ endlich.
- (b) Ist $G \in \mathcal{G}_S$ und ein regulärer Punkt q des Randes ∂G gegeben, so existiert eine Abbildung $\psi: W \rightarrow S = \psi(W)$ mit $q \in S$. Weiter ist der äußere Normaleneinheitsvektor $\nu_a(q)$ die Auswertung des stetigen Normaleneinheitsvektorfeldes $\nu_a: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ in q .
Ist konkret q wie in (2.3.4) beschrieben und $p \in \partial G \cap Q$, so lässt sich p schreiben als

$$p = (\xi, \eta, h(\xi, \eta))$$

und man erhält

$$\nu_a(p) = \frac{1}{\sqrt{(D_\xi h(\xi, \eta))^2 + (D_\eta h(\xi, \eta))^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} -D_\xi h(\xi, \eta) \\ -D_\eta h(\xi, \eta) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(vgl. Bemerkung 2.3.11)

Satz 2.3.16 (Integralsatz von Gauß). Sei $G \in \mathcal{G}_S$ und $v \in C(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld derart, dass $v|_G: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar ist. Gilt weiter

$$\langle v, \nu_a \rangle \in \mathcal{L}(\partial G) \quad \text{und} \quad \operatorname{div} v \in \mathcal{L}(G),$$

so gilt

$$\int_G \operatorname{div} v(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\partial G} \langle v, \nu_a \rangle d\sigma. \quad (2.3.5)$$

Erläuterung 2.3.17. Es ist $\langle v, \nu_a \rangle: \partial G \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$, wobei N eine zweidimensionale Nullmenge ist; die Abbildungsvorschrift lautet

$$p \mapsto \langle v, \nu_a \rangle(p) = \langle v(p), \nu_a(p) \rangle.$$

Weiter ist $\operatorname{div} v : G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \operatorname{div} v(x) = D_1 v_1(x) + D_2 v_2(x) + D_3 v_3(x).$$

Da

$$|\langle v, \nu_a \rangle(p)| \leq \|v(p)\| \cdot \underbrace{\|\nu_a(p)\|}_{=1} = \|v(p)\|$$

gilt und $p \mapsto \|v(p)\|$ stetig auf der kompakten Menge $\overline{G}$ ist, ist $\langle v, \nu_a \rangle$ eine beschränkte Funktion. Im Fall $\sigma(\partial G) < \infty$ ist damit $\langle v, \nu_a \rangle \in \mathcal{L}(\partial G)$. Gilt sogar $v \in \overline{C}^1(G, \mathbb{R}^3)$, so ist $\operatorname{div} v$ stetig auf $\overline{G}$ und damit ebenfalls beschränkt und integrierbar.

Korollar 2.3.18 (Volumenformel). *Setzt man in (2.3.5) das Vektorfeld*

$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ein und gilt $\sigma(\partial G) < \infty$, so ergibt sich $\operatorname{div} v = 3$ und

$$\sigma(G) = \frac{1}{3} \int_G \operatorname{div} v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \lambda^3(dx, dy, dz) = \frac{1}{3} \int_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \nu_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle d\sigma.$$

Bemerkung 2.3.19. Ist $F : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld wie im Integralsatz 2.3.16, so ist

$$\int_{\partial G} \langle F, \nu_a \rangle d\sigma \tag{2.3.6}$$

der Fluss von F durch ∂G nach außen, also in Richtung von ν_a . Für den Fluss durch ein reguläres Flächenstück $S \subset \partial G$ ergibt sich mit der Parameterdarstellung $\psi : W \rightarrow S$ konkret:

$$\begin{aligned} & \int_S \langle F, \nu_a \rangle d\sigma \\ &= \int_W \left\langle F(\psi(u, v)), \|D_u \psi \times D_v \psi\|^{-1} (D_u \psi \times D_v \psi)(u, v) \right\rangle \cdot \|D_u \psi \times D_v \psi\| \lambda^2(du, dv) \\ &= \int_W \langle F(\psi(u, v)), (D_u \psi \times D_v \psi)(u, v) \rangle \lambda^2(du, dv). \end{aligned}$$

Damit kann die Divergenz physikalisch als Quellstärke einer durch F beschriebenen Strömung interpretiert werden: Ist $G = B_r(0)$, so gilt

$$\int_{B_r(0)} \operatorname{div} F \lambda^3 = \int_{\partial B_r(0)} \langle F, \nu_a \rangle d\sigma,$$

wobei

$$\langle F, \nu_a \rangle(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 F_j(x) \cdot \frac{x_j}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \sum_{j=1}^3 F_j(x) \cdot x_j \stackrel{\text{wie oben}}{\stackrel{F}{=}} \frac{1}{\|x\|} \sum_{j=1}^3 x_j^2 = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|.$$

Die Wärmegeneration in der Sonne kann also durch den Fluss der Wärme durch die Sonnenoberfläche nach außen aufgefasst werden.

Bemerkung 2.3.20 (Partielle Integration). Sei wieder $G \in \mathcal{G}_S$ mit $\sigma(\partial G) < \infty$. Man betrachte nun $f, g \in \overline{C}^1(G, \mathbb{R})$ und $v : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v = g \cdot f \cdot e_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann ist $v \in \overline{C}^1(G, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{div} v = (D_i f) \cdot g + f \cdot (D_i g).$$

Formel (2.3.5) impliziert dann:

$$\int_G (D_i f) \cdot g \, \lambda^3 = \int_{\partial G} f \cdot g \cdot (\nu_a)_i \, d\sigma - \int_G f \cdot (D_i g) \, \lambda^3. \quad [25]$$

LINK: TEIL 1 DER 22. VORLESUNG VOM 16.1.2023

3 Differentialgleichungen

Dieses Kapitel befasst sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen im Gegensatz zu partiellen Differentialgleichungen, bei denen partielle Ableitungen auftreten.

Beobachtung 3.0.0. Es seien $f, g, h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Ist $f(x) := e^{\alpha x}$, so folgt $f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x}$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$. Damit erfüllt die Funktion f die folgende Identität

$$f' = \alpha f \quad \text{auf ganz } (0, \infty). \quad (\text{a})$$

Ähnlich gilt für $g(x) = \sin(x)$

$$g''(x) = (\cos(x))' = -\sin(x) = -g(x) \quad \forall x > 0.$$

Also erfüllt g die Identität

$$g'' = -g \quad \text{auf } (0, \infty). \quad (\text{b})$$

Schließlich gilt für $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$h'(x) = -x^{-2} = -(x^{-1})^2 \quad \forall x \in (0, \infty),$$

genügt also der Gleichung:

$$h' = -h^2 \quad \text{auf } (0, \infty). \quad (\text{c})$$

Man hat also zu jeder der drei Gleichungen (a), (b) und (c) eine Lösung gefunden. Im Folgenden will man sich nun systematisch Gleichungen anschauen, die eine (unbekannte) Funktion f und ihre Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(k)}$ beinhalten, und fragen

^[25]Man betrachte hierzu rückblickend die partielle Integration in $\mathbb{R}$: Es gilt

$$\int_{[a,b]} f' \cdot g = [f \cdot g]_a^b - \int_{[a,b]} f \cdot g' \quad \text{und} \quad \partial[a, b] = \{a, b\}.$$

- * ob es eine Lösung der Differentialgleichung gibt,
- * wie sämtliche Lösungen – also der Lösungsraum – beschrieben werden können,
- * welche Eigenschaften (z.B. Regularität, Beschränktheit) diese Lösungen besitzen und
- * was über das Intervall der Variablen x , auf dem die Gleichung gelten soll, gesagt werden kann.

Zum Beispiel gelten die Gleichungen (a) und (b) sogar auf ganz $\mathbb{R}$, während dies für (c) nicht der Fall ist. Die Gleichung (c) beinhaltet ein h^2 , während (a) und (b) linear in der Funktion f und allen ihren Ableitungen sind.

3.1 Wachstumsprozesse

Das Wachstum einer zeitlich abhängigen Population $x = x(t) \in [0, \infty)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, kann häufig durch eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) := \left(\frac{d}{dt} x \right) (t) = a(x, t) \cdot x(t) \quad (3.1.1)$$

beschrieben werden.

Definition 3.1.1. Die Funktion a in (3.1.1) heißt *Wachstumsrate*. Hängt diese nur von t ab, nicht aber von x , so heißt

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) \quad (3.1.2)$$

homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, da die Gleichung nur die erste Ableitung von x (und x selbst) beinhaltet, sie linear in x und $\dot{x}$ ist und $\dot{x} - a \cdot x = 0$ keinen Konstanten (d.h. von x und seinen Ableitungen unabhängigen) Summanden enthält.

Bei (3.1.2) wird nach $\mathbb{K}$ -wertigen Lösungen x gesucht, auch wenn im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Interpretation von a als Wachstumsrate nicht mehr intuitiv ist; es sei also $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ im Folgenden.

Bemerkung & Beispiel & Feststellung 3.1.2.

(a) *Lösungsraum:*

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in C(I, \mathbb{K})$, und A eine beliebige Stammfunktion von a , so ist für jedes Unterintervall $I_0 \subset I$ die Funktion $x(t) = C \cdot e^{A(t)}$, $t \in I_0$, mit beliebigem $C \in \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) \quad \text{auf } I_0.$$

Man bestätige die Behauptung durch eine Überprüfung: Es gilt

$$\dot{x}(t) = C \cdot \left(e^{A(t)} \right)' = C \cdot e^{A(t)} \cdot a(t) = x(t) \cdot a(t).$$

Dies sind tatsächlich schon alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = a \cdot x$ und bilden einen eindimensionalen Untervektorraum. Legt man nämlich eine spezielle Stammfunktion A_0 von a fest, so sind alle anderen durch die Form

$$A(t) = A_0(t) + c, \quad c \in \mathbb{K},$$

gegeben und

$$x(t) = C \cdot e^{A(t)} = C \cdot e^{A_0(t)+c} = C \cdot e^c \cdot e^{A_0(t)}$$

hat genau einen freien Parameter, nämlich den Vorfaktor $C \cdot e^c \in \mathbb{K}$. Andere Lösungen existieren nicht: Ist $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{K}$ eine beliebige Lösung von $\dot{x} = a \cdot x$ – also insbesondere differenzierbar –, so folgt:

$$\frac{d}{dt} (\varphi(t) \cdot e^{-A(t)}) = \underbrace{(\dot{\varphi}(t) - \varphi(t) \cdot a(t))}_{\stackrel{(3.1.2)}{=} 0} \cdot e^{-A(t)} = 0.$$

Damit ist $\varphi(t) \cdot e^{-A(t)}$ konstant in t , es gilt also:

$$\varphi(t) \cdot e^{-A(t)} = C \quad \implies \quad \varphi(t) = C \cdot e^{A(t)}.$$

(b) *Nullstellen und Vorzeichen:*

Man betrachte die folgende Fallunterscheidung für die Lösung von $x(\cdot) = C \cdot e^{A(\cdot)}$:

$$C = 0 \quad \implies \quad x(t) = 0 \quad \forall t \in I_0$$

$$C \neq 0 \quad \implies \quad x(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0,$$

da $e^z \neq 0$ für sämtliche $z \in \mathbb{C}$ gilt. Insbesondere besitzt die Lösung x von (3.1.2) keine nichttrivialen Nullstellen. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt weiter:

$$C > 0 \quad \implies \quad x(t) > 0 \quad \forall t \in I_0$$

$$C < 0 \quad \implies \quad x(t) < 0 \quad \forall t \in I_0.$$

(c) *Anfangswert:*

Unter allen möglichen Lösungen x von (3.1.2) wird eine eindeutig festgelegt durch die Spezifikation eines Anfangswertes

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{für ein } t_0 \in I_0 \text{ und ein } x_0 \in \mathbb{K}.$$

In der Tat ist

$$x(t) = x_0 \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t a(t) \, dt \right), \quad t \in I_0, \tag{3.1.3}$$

die eindeutige Lösung des *Anfangswertproblems* (AWP)

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) \quad \text{auf } I_0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.1.4)$$

Das heißt also, dass von einer allgemeinen Stammfunktion A von a zu einer konkreten Stammfunktion, nämlich

$$t \mapsto \int_{t_0}^t a(t) \, dt,$$

übergegangen wird, um den Anfangswert anzupassen.

LINK: TEIL 2 DER 22. VORLESUNG VOM 16.1.2023

- (d) Ist (die Wachstumsrate) $a = a_0 \in \mathbb{K}$ konstant, so ist sogar für $I = \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung in (3.1.2) gegeben durch

$$x(t) = C \cdot e^{t \cdot a_0}$$

und die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.1.4) gegeben durch

$$x(t) = x_0 \cdot e^{(t-t_0) \cdot a_0}.$$

- (e) *Beispiel:*

Das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -2\alpha t \cdot x(t) \quad \text{auf } I = \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0 \quad (3.1.5)$$

hat die eindeutige Lösung $x(t) = x_0 \cdot e^{-\alpha t^2}$; hier ist $a(t) = \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$.

Was ändert sich, falls man zusätzlich einen konstanten (von x und $\dot{x}$ unabhängigen) Summanden in der Differentialgleichung zulässt?

Definition 3.1.3. Sind $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $a, b \in C(I, \mathbb{K})$, so heißt

$$\dot{x} = a \cdot x + b \quad \text{auf } I \quad (3.1.6)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Um die Lösungsmenge von (3.1.6) besser zu verstehen, bemerkt man, dass

$$\begin{aligned} D : C^1(I, \mathbb{K}) &\rightarrow C(I, \mathbb{K}), \\ x &\mapsto \dot{x} - ax \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung ist. Der Kern von D (geschrieben: $\text{Kern}(D)$) ist nach 3.1.2 (a) eindimensional.

Erinnerung aus der Linearen Algebra 3.1.4. Es seien E, F Vektorräume, $b \in F$ und $D : E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Ist $x_s \in E$ ein (spezielles) Element von E mit $Dx_s = b$, so ist der affine Unterraum von E

$$x_s + \text{Kern}(D) = \left\{ x = x_s + x_0 \mid Dx_0 = 0 \right\} \quad (3.1.7)$$

die Menge aller Lösungen der Gleichung $Dx = b$.

Es ist bereits bekannt, dass der Lösungsraum von der homogenen Differentialgleichung (3.1.2) eindimensional ist, es gilt also

$$\text{Kern}(D) = \left\{ C \cdot e^{A(t)} \mid C \in \mathbb{K} \right\},$$

wobei die Stammfunktion A von a beliebig gewählt werden darf. Also muss jetzt nur noch eine spezielle Lösung $x_s = x_s(t)$ der Differentialgleichung (3.1.6) gefunden werden.

Beobachtung 3.1.5 (Variation der Konstanten). Um eine spezielle Lösung von (3.1.6) zu identifizieren, betrachte man den Ansatz

$$x_s(t) = C(t) \cdot e^{A(t)}, \quad t \in I_0. \quad (3.1.8)$$

Das Einsetzen von (3.1.8) in (3.1.6) liefert dann:

$$\begin{aligned} a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t) &= a(t)x_s(t) + b(t) = \dot{x}_s(t) = (\dot{C}(t) + C(t)a(t))e^{A(t)} \\ \implies b(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{A(t)} \\ \iff \dot{C}(t) &= b(t) \cdot e^{-A(t)}, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

woraus man im Prinzip $C(\cdot)$ durch Integration erhalten kann.

Beispiel 3.1.6 (Logistisches Wachstum). Ist in der Differentialgleichung (3.1.2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a(t) \geq a_0$, führt dies bei $C > 0$ zum exponentiellen oder schnellerem Wachstum der Population. Im praktischen Beispielen tritt allerdings eine Saturation / Sättigung bei einer Grenzpopulation von $g > 0$ auf. Solche Effekte können durch die logistische Differentialgleichung

$$\dot{x} = b \cdot (g - x) \cdot x =: ax - bx^2 \quad \text{mit Konstanten } a, b, g > 0 \quad (3.1.10)$$

beschrieben werden. Lösungen sind insbesondere:

$$x \equiv 0 \implies \dot{x} = 0 = b \cdot (g - 0) \cdot 0 = 0,$$

$$x \equiv g \implies \dot{x} = 0 = b \cdot (g - g) \cdot g = 0.$$

Dies sind stationäre, d.h. von der Zeit unabhängige, Lösungen. Interessanter ist jedoch der von der zeitlich abhängige Fall mit $x(t) > 0$ für alle $t \in I$: Dann ist $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ für alle $t \in I$ wohldefiniert und genügt der Gleichung:

$$\dot{y}(t) = -x^{-2}(t) \cdot \dot{x}(t) = -a \cdot x^{-1}(t) + b = -a \cdot y(t) + b. \quad (3.1.11)$$

Die stationäre Lösung $x(t) = g$ entspricht hier $y = \frac{1}{g} = \frac{b}{a}$. Nach Beobachtung 3.1.5 ist dann die allgemeine Lösung von (3.1.11) gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{g} + C \cdot e^{-a \cdot t}. \quad (3.1.12)$$

Durch eine Rücktransformation erhält man die allgemeine Darstellung aller positiven Lösungen von (3.1.10) durch

$$x(t) = \left(\frac{1}{g} + C \cdot e^{-at} \right)^{-1}, \quad C \geq 0.$$

Hier muss die Vorzeichenbedingung an C verlangt werden, damit $y(t)$ positiv bleibt und die Rücktransformation $x(t) = \frac{1}{y(t)}$ legitim ist.

LINK: TEIL 1 DER 23. VORLESUNG VOM 18.1.2023

Beispiel 3.1.7 (Bernoullische Differentialgleichung). Eine Verallgemeinerung von (3.1.10) ist die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot x(t)^\alpha \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (3.1.13)$$

Setzt man wieder voraus, dass x eine positive Lösung von (3.1.13) ist, ist $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$ wohldefiniert und löst die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = (1 - \alpha) (a(t) \cdot y(t) + b(t)). \quad (3.1.14)$$

Diese ist linear und daher mit den bisher entwickelten Methoden behandelbar.

3.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition 3.2.1. Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ offen, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $f \in C(D, \mathbb{K})$ sowie $I_0 \in \mathbb{K}$ ein Intervall. Dann heißt

$$y' = f(x, y), \quad x \in I_0, \quad (3.2.1)$$

(explizite) Differentialgleichung erster Ordnung und eine differenzierbare Funktion $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Lösung von (3.2.1)*, falls $G_\varphi \subset D$ und

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für } x \in I_0$$

gilt.

Bemerkung 3.2.2.

(a) Für eine Lösung φ von (3.2.1) ist

$$x \mapsto \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

als Verkettung von stetigen Funktionen ebenfalls stetig, es gilt also $\varphi \in C^1(I_0)$.

(b) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so kann f geometrisch als Richtungsfeld interpretiert werden, dass jedem Punkt $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

* die Gerade durch (x, y) mit Steigung $f(x, y)$ bzw.

* den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ mit Basispunkten (x, y) zuordnet.

Die Tangenten an den Graphen einer Lösung φ von (3.2.1) stimmen dann in jedem Punkt mit den im Bild vorgegebenen Graphen / Vektoren überein.

Methode 3.2.3 (Symbolische / Formale Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen).

- (a) Es seien $I, J \in \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $g \in C(J, \mathbb{R})$. Hat die Differentialgleichung in (3.2.1) speziell die Form

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \quad y \in J, \quad (3.2.2)$$

so spricht man von einer Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen. Ist $y_0 \in J$ mit $g(y_0) \neq 0$, so ist $\varphi(x) = y_0$ eine Lösung von (3.2.2), die zeitunabhängig oder – genauer – stationär, also von x unabhängig, ist.

- (b) Gilt $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$, so kann

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

symbolisch umgeformt werden zu

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx. \quad (3.2.3)$$

Integrieren liefert dann:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (3.2.4)$$

Ist $G \in C^1(J)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ und $F \in C^1(I)$ eine Stammfunktion f , so entspricht (3.2.4) der impliziten Gleichung

$$G(\varphi(x)) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (3.2.5)$$

für eine Lösung von φ von (3.2.2).

Die der obigen Methode entsprechende rigorose mathematische Aussage ist:

Satz 3.2.4. *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Zu jedem $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ gibt es dann ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in I_0, \quad (3.2.6)$$

genau eine Lösung $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \in C^1(I_0)$ hat.

Setzt man

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds \quad \text{und} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

so ist diese Lösung gegeben durch

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x)), \quad x \in I_0. \quad (3.2.7)$$

Die Invertierbarkeit von G ergibt sich dabei dadurch, dass g keine Nullstelle besitzt und stetig ist: Damit besitzt g nämlich ein festes Vorzeichen, so dass o.B.d.A. $g > 0$ angenommen werden kann. Damit ist dann $\frac{1}{g}$ positiv und stetig, so dass die Stammfunktion G stetig und streng isoton, also bijektiv und somit invertierbar ist.

Beispiel 3.2.5.

(a) Es gelte $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$ und

$$y' = -\frac{x}{y}, \text{ d.h. } f(x) = -x, \quad g(y) = \frac{1}{y} > 0. \quad (3.2.8)$$

Dann ist $G(y) = \int_{y_0}^y s \, ds = \frac{1}{2} (y^2 - y_0^2)$. Mit der symbolischen Methode 3.2.3 ergibt sich dann:

$$y \, dy = -x \, dx.$$

Ist $x_0 = 0$ und $y_0 > 0$, so folgt

$$\frac{1}{2} (y^2 - y_0^2) = -\frac{x^2}{2} \quad \text{bzw.} \quad y^2 = y_0^2 - x^2.$$

Somit ist

$$\varphi(x) = \sqrt{y_0^2 - x^2}$$

eine Lösung auf $I_0 = (-y_0, y_0)$.

LINK: TEIL 2 DER 23. VORLESUNG VOM 18.1.2023

(b) Man sieht also, dass das (Existenz-)Intervall I_0 , auf dem die Lösung φ definiert ist, von den Anfangswerten (und entsprechend auch von den Funktionen f und g) abhängen kann.

Beispiel 3.2.6. Die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (3.2.9)$$

besitzt offensichtlich die stationäre Lösung $y \equiv 0$. Im Folgenden interessiert man sich jedoch insbesondere für Existenzintervalle von nicht-trivialen Lösungen von (3.2.9):

(a) Verlangt man $y > 0$, es gelte also $D \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$, so kann (3.2.9) symbolisch umgeformt werden zu

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx,$$

was nach Integration Folgendes liefert:

$$2\sqrt{y} = x + C > 0, \quad \text{wegen } y > 0.$$

Dies führt mit der obigen Bedingung zur Lösung

$$\varphi_C(x) = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2 \quad \text{auf } x \in (-C, \infty) = I_0,$$

wobei die letztere Bedingung $x+C > 0$ garantiert.

Analog ergibt sich für $y < 0$, also $D \subset \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$:

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \frac{dy}{\sqrt{-y}} = dx \\ &\implies -2\sqrt{-y} = x + C < \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\varphi(x) = -\left(\frac{x+C}{2}\right)^2 \quad \text{für } x \in \tilde{I}_C = (-\infty, C).$$

(b) Sind $a \leq b \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-b)^2 & \text{für } x > b, \\ 0 & \text{für } x \in (a, b), \\ -\frac{1}{4}(a-x)^2 & \text{für } x < a, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung von (3.2.9). Man beachte hierbei, dass φ und φ' auch in $x \in \{a, b\}$ stetig sind, es gilt also insbesondere $\varphi_{a,b} \in C^1(\mathbb{R})$:

$$\forall x > b: \varphi'_{a,b}(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (x-b) = \frac{x-b}{2} = \underbrace{\sqrt{\varphi_{a,b}(x)}}_{>0}.$$

(c) Also kann für das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = y_0, \quad (3.2.11)$$

Folgendes gefolgert werden:

1. Falls $y_0 \neq 0$, setze man $I_0 = \mathbb{R}$, $\varepsilon = |y_0| > 0$ und $J = B_\varepsilon(y_0)$. Dann ist $0 \notin J$ und $g(y) = \sqrt{|y|} \neq 0$ auf J und $0 \in I = \mathbb{R}$, $f \equiv 1$. Nach Satz 3.2.4 besitzt dann das Anfangswertproblem (3.2.11) auf einem Intervall $I_0 \ni 0$ eine eindeutige Lösung $\varphi \in C^1(I_0)$.
2. Falls $y_0 = 0$, also $g(y_0) = \sqrt{|y_0|} = 0$, kann Satz 3.2.4 nicht angewendet werden, da kein Intervall J existiert, das $y_0 = 0$ enthält. Offensichtlich ist $y \equiv 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems (3.2.11) mit $y_0 = 0$, sogar auf ganz $\mathbb{R}$. Aber auch

$$\varphi_{0,0}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\left(\frac{x}{2}\right)^2, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

ist eine Lösung des Anfangswertproblems (3.2.11) mit $y_0 = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$. Es liegt also tatsächlich keine Eindeutigkeit der Lösung vor (die im Setting von Satz 3.2.4 garantiert ist).

Beispiel 3.2.7.

- (a) Es seien $f(x) = \sin x$, $g(y) = e^y$ Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R})$, es gelte also $I = J = \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x) \cdot g(y) = e^y \cdot \sin x \quad (3.2.12)$$

genügt den Voraussetzungen von Satz 3.2.4, da $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Also hat das Anfangswertproblem

$$y' = e^y \cdot \sin x, \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung auf einem Umgebungs-Intervall von x_0 . Eine symbolische Umformung liefert

$$\rightsquigarrow e^{-y} dy = \sin x dx,$$

so dass man durch Integration

$$0 < e^{-y} = \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

erhält. Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ergibt dann

$$e^{-y_0} = e^{-y(0)} = \cos(0) + C = 1 + C \implies C = e^{-y_0} - 1 > -1,$$

was zur Lösung

$$\varphi(x) = -\ln(\cos x + e^{-y_0} - 1), \quad x \in I_0 = I_0(y_0),$$

führt.

- (b) Wie groß ist das Existenz-Intervall $I_0(y_0)$? Die Größe des Intervalls hängt von dem Anfangswert y_0 ab:

1. Falls $y_0 < -\ln 2$ gilt, also $C = e^{-y_0} - 1 > 1$, so ist $\cos x + C > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Demnach existiert dann φ auf ganz $\mathbb{R} = I_0(y_0)$, liegt dort in C^∞ und ist 2π -periodisch.

LINK: TEIL 1 DER 24. VORLESUNG VOM 23.1.2023

2. Ist $y_0 = -\ln 2$, also $C = e^{-y_0} - 1 = 1$, so liegt $\cos x + C$ in $(-\pi, \pi)$, aber nicht darüber hinaus. Die Lösung

$$\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\ln(\cos x + 1)$$

divergiert in den Randpunkten: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\pi} \varphi(x) = +\infty.$$

3. Falls $y_0 \in (-\ln 2, \infty)$, also $C = e^{-y_0} - 1 < 1$ – insbesondere also $C \in (-1, 1)$ –, so ist φ nur auf einer (kleinen) Umgebung von $x = 0$ definiert – genauer für $|x| < \arccos(C)$. Dieses Intervall schrumpft zum Punkt 0 zusammen für $y_0 \rightarrow \infty$.

Beobachtung 3.2.8 (Transformations- / Substitutionsmethode). Ähnlich wie für Integrale können Differentialgleichungen mittels Substitution berechnet bzw. gelöst werden:

(a) Die Differentialgleichung

$$y' = f(ax + by + c) \quad (3.2.13)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{K}$ und $f \in C^1(I)$ für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wird mit $u(x) := ax + by(x) + c$ transformiert in

$$u' = a + by'(x) = a + bf(u) \quad (3.2.14)$$

(b) Für die Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.2.15)$$

führt die Substitution durch $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ zu

$$u' = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x} - u(x) \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (f(u) - u)$$

3.3 Differentialgleichungen der klassischen Mechanik

Für ein Zeitintervall $I \subset \mathbb{R}$ sowie einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ beschreibt $x : I \rightarrow J$ den Ort bzw. die Lage $x(t)$ eines Massepunktes mit Masse $m > 0$.

Bemerkung 3.3.1 (Bewegungsgleichheit und Energieerhaltung). Wirkt auf einem Massepunkt ein Kraftfeld $F \in C(J, \mathbb{R})$, so gilt nach Newton die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = F(x). \quad (3.3.1)$$

Führt man nun eine zweite Koordinate $y = m \cdot \dot{x}$ ein, so kann (3.3.1) in ein System (von Differentialgleichungen) erster Ordnung umgeschrieben werden:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot y, \quad \dot{y} = F(x). \quad (3.3.2)$$

Das System ist gekoppelt, denn $\dot{x}$ hängt von y ab und $\dot{y}$ von x . In der Tat ist y nicht nur eine symbolische Variable, sondern ist der Impuls $y(t) = m \cdot \dot{x}(t)$ des Massepunktes zum Zeitpunkt t . Da die Masse m konstant ist, ist der Impuls y des Teilchens proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$: Es wurde also die Lage und der Impuls des Teilchens mit der Zeit parametrisiert. Die Bahnkurven / Trajektorien der Lösung von (3.3.2) in der x - y -Ebene $J \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ – auch *Phasenraum* genannt – bilden das Phasenportrait von (3.3.2) bzw. (3.3.1).

Sei nun $U = -\int F + C$ eine Stammfunktion von $-F$ und bezeichne dieses als *Potential*. Dann ist

$$E(x(t), \dot{x}(t)) := \frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2(t) + U(x(t)) \quad (3.3.3)$$

die Energie^[26] eines Massepunktes, dass sich zum Zeitpunkt $t \in I$ in $x(t) \in J$ befindet mit einer Geschwindigkeit von $\dot{x}(t)$. Man sieht, dass die Energie in (3.3.3) nicht explizit von der Zeit abhängt, sondern dass die Energie

$$E\left(x, \frac{y}{m}\right) = \frac{1}{2m} y^2 + U(x)$$

$$E(x, v) = \frac{m}{2} v^2 + U(x)$$

schon bekannt ist, sobald der Ort x und der Impuls y bzw. v des Teilchens (nicht aber notwendigerweise t) bekannt sind.

LINK: TEIL 2 DER 24. VORLESUNG VOM 23.1.2023

Ist $\varphi: I \rightarrow J$ eine Lösung $x = \varphi$ von (3.3.2), so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\varphi}^2(t) + U(\varphi(t)) \right) \\ &= m \cdot \dot{\varphi}(t) \ddot{\varphi}(t) + U'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ &\stackrel{(3.3.2)}{=} m \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \frac{F(\varphi(t))}{m} - F(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

die Energie ist also konstant entlang (der Bahnkurven von) der Lösung φ von (3.3.2). Für eine Lösung φ gilt stets:

$$U(\varphi(t)) \leq U(\varphi(t)) + \underbrace{\frac{m}{2} \cdot \dot{\varphi}^2(t)}_{\geq 0} = E(\varphi, \dot{\varphi})(t) = E_0.$$

Somit ist $\sqrt{E_0 - U(\varphi(t))}$ stets wohldefiniert und nicht-negativ. Bezeichnet man den konstanten Wert mit $E_0 \in \mathbb{R}$, folgt also

$$E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = E_0, \quad t \in I, \quad (3.3.3a)$$

für eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ von (3.3.2).

Fazit. Die Trajektorie

$$\{(x, y) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in J \times \mathbb{R} \mid t \in I\}$$

^[26] Dabei beschreibt $\frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2(t)$ die *kinetische* Energie und $U(x(t))$ die *potentielle* Energie.

einer Lösung $\varphi: I \rightarrow J \times \mathbb{R}$ ist in einer Niveau-Menge

$$\left\{ (x, y) \in J \times \mathbb{R} \mid E\left(x, \frac{y}{m}\right) = E_0 \right\}$$

der Energiefunktion $E: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ enthalten.

Damit will man nun das Anfangswertproblem mittels der symbolischen Methode der Separation der Variablen lösen:

Bemerkung 3.3.2 (Anfangswertproblem der Bewegungsgleichung). Die Energie E_0 in (3.3.3a) wird durch die beiden Anfangswerte

$$x(\tau) = x_0 \text{ für den Ort zum Zeitpunkt } \tau \in I$$

und

$$\dot{x}(\tau) = v_0 \text{ für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt } \tau \in I$$

festgelegt:

$$E\left(x, \frac{y}{m}\right) = E_0 = \frac{m}{2} \cdot v_0^2 + U(x). \quad (3.3.4)$$

Wegen $D_x E(x, v) = U'(x) = -F(x)$ und $D_v E(x, v) = \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot v \cdot \dot{v} = y \cdot \dot{y} \cdot \frac{1}{m}$ sind die Anfangswerte

$$(x_0, y_0) = (x_0, m \cdot v_0) \in \left\{ (x, 0) \in J \times \mathbb{R} \mid U'(x) = -F(x) = 0 \right\}$$

stationäre Punkte der Energie $E: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dies sind Ruhelagen der Bewegungsgleichung, denn es gilt

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot y = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y} = F(x) = 0,$$

die Ableitung der Abbildung $t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$ ist also Null, weshalb die Abbildung selbst dann konstant ist.

Beispiel (Schwingende Feder). Bei kleinen Auslenkungen gilt näherungsweise das Hookesche Gesetz

$$F(x) = -k \cdot x.$$

Es gilt also $U(x) = \frac{k}{2} \cdot x^2$ und die Niveau-Mengen

$$\left\{ E_0 = \frac{1}{2 \cdot m} y^2 + \frac{k}{2} \cdot x^2 \right\}$$

sind Ellipsen im Phasenraum (für $E_0 > 0$). Für E_0 besteht die Niveau-Menge aus dem Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid 0 = -F(x) = k \cdot x \right\},$$

dem einzigen stationären Punkt der Energie.

Zunächst ist klar, dass man sich in dem Fall, dass sowohl die Auslenkung als auch die Geschwindigkeit gleich Null ist, in einem Ruhezustand befindet. Man betrachte also für $E_0 > 0$ die Scheitelpunkte der Ellipse: In diesem Moment befindet sich das Teilchen zwar in einer Ruhelage, aber die kinetische Energie ist maximal. Gilt hingegen $E_0 = 0$, so ist die Auslenkung und damit die potentielle Energie maximal.

Man betrachte wieder ein allgemeines F : Wegen $U(x(t)) \leq E_0$ ist (3.3.3) äquivalent zu

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - U(x))} = \underbrace{1}_{=f(t)} \cdot g(x), \quad (3.3.5)$$

also einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Setzt man für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(\tau) = v_0$$

$v_0 > 0$ voraus, so folgt für $x(\tau) = x_0$:

$$U(x_0) < E_0$$

und in (3.3.5) hat man ein $+$ -Vorzeichen (zumindest für t nahe τ). Also ist $g(x_0) \neq 0$ und aufgrund von Stetigkeit existiert ein Umgebungsintervall $J_0 \ni x_0$ mit $g(x) \neq 0$ auf J_0 . Aus Satz 3.2.4 folgt dann, dass es ein Intervall $I_0 \subset I$ mit $\tau \in I_0$ gibt sowie eine eindeutige Lösung $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ von (3.3.5) mit dem Anfangswert (x_0, v_0) existiert. Für diese gilt wegen

$$dt = \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))} dx$$

die folgende Beziehung:

$$t - \tau = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(s))}} ds. \quad (3.3.6)$$

Im Fall $v_0 < 0$ ist in einer Umgebung von τ das Vorzeichen in (3.3.5) gegeben durch

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))},$$

was man analog zu $v_0 > 0$ behandeln kann.

Beispiel 3.3.3. [Flug einer Rakete]

- (a) Eine Rakete wird mit einer Geschwindigkeit $v_0 > 0$ von einem Punkt auf der Erdoberfläche nach oben geschossen. Sei weiter $x(t) > 0$ die Höhe über bzw. der Abstand zum Erdmittelpunkt. Nach Newtons Gravitationsgesetz gilt

$$F(x) = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x^2},$$

wobei $m > 0$ die Masse der Rakete, $M > 0$ die Masse der Erde und $\gamma > 0$ die universelle Gravitationskonstante bezeichnen.

LINK: TEIL 1 DER 25. VORLESUNG VOM 25.1.2023

Dies führt zu dem Anfangswertproblem

$$m \cdot \ddot{x} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x^2}, \quad x(0) = R, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (3.3.7)$$

wobei $R > 0$ den Erdradius bezeichnet.

(b) Damit ist das Gravitationspotential gegeben durch

$$U(x) = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x},$$

was zur Energiegleichung

$$E = \frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2 - \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x} \quad (3.3.8)$$

führt. Ist für $t \rightarrow \infty$ die Ortskoordinate $x(t)$ unbeschränkt, so gilt

$$0 = \liminf_{t \rightarrow \infty} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x(t)} = -E + \underbrace{\frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2(t)}_{\geq 0} \geq -E,$$

also $E \geq 0$. Gibt es dagegen eine (Maximal-)Höhe $H > 0$ derart, dass $R \leq x(t) \leq H$ für $t \geq 0$ gilt, so erhält man

$$\frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2 = E + \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x} \geq E + \underbrace{\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{x}}_{=C>0} > E.$$

Wäre $E > 0$, so folgt

$$\dot{x}^2(t) \geq \frac{2}{m} \cdot C > 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $\dot{x}$ und $v_0 > 0$, folgt:

$$\dot{x}(t) > \sqrt{\frac{2 \cdot C}{m}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^T \dot{x}(t) > \int_0^T \sqrt{\frac{2 \cdot C}{m}} = T \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot C}{m}}.$$

Damit wächst $x(T)$ unbeschränkt, was ein Widerspruch ist. In diesem Fall muss also $E < 0$ gelten.

(c) Also ist $E = 0$ die minimale Energie, bei der $x(t)$ unbeschränkt sein kann. Dies liefert

$$\frac{m \cdot v_0^2}{2} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$. Die entsprechende Geschwindigkeit v_F gegeben durch

$$v_F := \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{M}{R}} \sim 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (3.3.9)$$

wird dann *Fluchtgeschwindigkeit* genannt.

(d) Für $v_0 = v_F$, also $E = 0$, wird (3.3.6) zu

$$t = \int_R^{\varphi(t)} d\xi \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{\xi} \right)^{-\frac{1}{2}} = (2\gamma M)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_R^{\varphi(t)} d\xi \sqrt{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M}} \cdot \frac{2}{3} \left(\varphi(t)^{\frac{3}{2}} - R^{\frac{3}{2}} \right).$$

Umstellen liefert dann die Lösung

$$\varphi(t) = \left(R^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \sqrt{2\gamma M} t \right)^{\frac{2}{3}} = R \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \frac{t}{R} \right)^{\frac{2}{3}} = R \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{v_F}{R} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.3.10)$$

die tatsächlich isoton und unbeschränkt wächst.

Beispiel 3.3.4 (Anfangswertproblem aus Bemerkung 3.3.2 mit $v_0 = 0$). Man betrachte Gleichung (3.3.1) mit $x(\tau) = x_0$ und $\dot{x}(\tau) = v_0 = 0$. Dann ist die kinetische Energie zum Zeitpunkt τ gleich Null und damit $E_0 = U(x_0)$. Damit hat die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))}$$

insbesondere die stationäre Lösung $\varphi(t) = x_0$. Allerdings ist die Gleichung (3.3.5) nicht äquivalent zur Differentialgleichung in (3.3.1), weil $v_0 \neq 0$ nicht erfüllt ist. Dazu betrachte man nun die folgende Fallunterscheidung:

1. Es gelte $F(x_0) = 0$.

Dann ist (3.3.1) ebenfalls für $\varphi(t) = x_0$ erfüllt.

2. Es gelte $0 < F(x_0)$.

Wegen $0 < F(x_0) = U'(x_0)$ folgt dann wegen der Stetigkeit von U'

$$-U' > 0 \quad \text{auf } [x_0, x_1] \quad \text{für } x_1 - x_0 \text{ klein genug.}$$

Wegen der strikten Isotonie von U folgt dann

$$E_0 - U(x) > E_0 - U(x_0) = 0 \quad \text{auf } (x_0, x_1].$$

Nun will man Gleichung (3.3.5) auf $J_0 = (x_0, x_1]$ lösen. Wegen $U \in C^1(J_0)$ gilt

$$E_0 - U(\xi) = \underbrace{-U'(x_0)}_{\geq 0} \cdot (\xi - x_0) + o(\xi - x_0) \geq -\frac{1}{2} \cdot U'(x) \cdot (\xi - x_0) \quad \text{auf } (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Also existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(\xi))}^{-1} d\xi \\ &\leq -\frac{U'(x_0)}{m} \cdot \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\xi}} d\xi + \int_{x_0+\varepsilon}^{x_1} d\xi \left(2 \cdot \frac{E - U(\xi)}{m} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

LINK: TEIL 2 DER 25. VORLESUNG VOM 25.1.2023

Der Integrand ist stets positiv und stetig, weshalb

$$G: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x)$$

ebenfalls positiv und stetig sowie streng isoton ist – G ist also invertierbar. Setze nun $\tau_1 := G^{-1}(x_1)$ sowie

$$\varphi: [\tau - \tau_1, \tau + \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} G^{-1}(t - \tau) & \text{für } t \in [\tau, \tau + \tau_1], \\ G^{-1}(\tau - t) & \text{für } t \in [\tau - \tau_1, \tau]. \end{cases}$$

φ ist wohldefiniert und stetig in $t = \tau$ sowie auf ganz $[\tau - \tau_1, \tau + \tau_1]$. Nun gilt weiter

$$0 \stackrel{!}{=} G(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(\xi))}^{-1} d\xi \implies x = x_0,$$

da das Integral stets positiv ist, es gilt also

$$G^{-1}(\tau - \tau) = G^{-1}(0) = x_0.$$

Da G stetig und streng isoton ist auf $B_{\tau_1}(\tau)$, gilt dasselbe auch für G^{-1} . Für $a \in (x_0, x_1)$ ist dann

$$G'(a) = \left(\frac{2}{m} \cdot \underbrace{(E - U(a))}_{\substack{\text{Vor.} \\ > 0}} \right)^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

Es folgt also mit der Ableitungsregel für inverse Funktionen, dass G^{-1} differenzierbar ist in $t = G(a)$ mit

$$(G^{-1})'(G(a)) = \frac{1}{G'(a)} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(a))}.$$

Damit folgt für $t \in (\tau - \tau_1, \tau + \tau_1) \setminus \{\tau\}$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \pm \frac{1}{\dot{G}(G^{-1}(\pm(t - \tau)))} = \underbrace{\pm}_{\text{sgn}(t - \tau)} \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(\varphi(t)))} \\ \implies \ddot{\varphi}(t) &= \pm \frac{1}{2} \left(\frac{2}{m} (E - U(\varphi(t))) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{m} F(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{m} \cdot F(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Also löst φ tatsächlich auf $(\tau - \tau_1, \tau) \cup (\tau, \tau + \tau_1)$ sowohl die Energiegleichung (3.3.5) als auch die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.3.1). Da beide Seiten der Gleichung (3.3.1) stetig in t sind, gilt sie auch auf ganz $(\tau - \tau_1, \tau + \tau_1)$ – dasselbe gilt auch für Gleichung (3.3.5). Nun ist φ symmetrisch auf $t = \tau$ und hat dort das Minimum $\varphi(\tau) = G^{-1}(0) = x_0$; damit ist insbesondere die Anfangswertbedingung erfüllt.

3. Der Fall $F(x_0) < 0$ verläuft analog.

Beispiel 3.3.5.

- (a) Man betrachte ein starres, ebenes Pendel der Länge $l > 0$ in einem Gravitationsfeld der Stärke $g > 0$. Der Auslenkungswinkel x erfüllt die Differentialgleichung

$$m \cdot l \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \sin x,$$

wobei $m > 0$ die Masse des Pendelendes (Masseteilchen) bezeichne, während die Stange bzw. der Faden des Pendels als masselos betrachtet werde. Setzt man $\omega^2 = \frac{l}{g} > 0$, so ergibt sich

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot \omega^2 \cdot \sin x. \quad (3.3.11)$$

- (b) Setzt man nun voraus, dass die Auslenkung x klein ist und $\sin x$ durch x annähert, ergibt sich dann die (linearisierte) Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot \omega^2 \cdot x. \quad (3.3.12)$$

Das zugehörige Potential ist $U(x) = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 \cdot x^2$ (analog wie bei dem Hookeschen Gesetz für Federn). Ist die Anfangsbedingung gegeben durch

$$x(0) = -A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{für ein } A \in (0, \pi), \quad (3.3.13)$$

wobei A die (Anfangs-)Auslenkung bei $t = 0$ bezeichnet, so ergibt sich die Energie

$$E_0 = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2}$$

und es folgt aus der Gleichung (3.3.6) (s. Bemerkung 3.3.2):

$$\begin{aligned} t = \int_{x_0}^{\varphi(t)} d\xi \left(\frac{2}{m} \cdot (E_0 - U(\xi)) \right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{\varphi(t)} d\xi \frac{1}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot \left[\arcsin \left(\frac{\xi}{A} \right) \right]_{-A}^{\varphi(t)} \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot \left(\arcsin \left(\frac{\varphi(t)}{A} \right) - \underbrace{\arcsin \left(\frac{-A}{A} \right)}_{=-\frac{\pi}{2}} \right). \end{aligned}$$

Umstellen nach φ liefert dann die Lösung

$$\varphi(t) = A \cdot \sin \left((\omega \cdot t) - \frac{\pi}{2} \right) = -A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

des Anfangswertproblems (3.3.12) mit der Anfangsbedingung (3.3.13). Die Periode der Schwingung ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

und hängt nicht von der Anfangsauslenkung A ab.

LINK: TEIL 1 DER 26. VORLESUNG VOM 30.1.2023

Um Trajektorien in der x - y -Phasenebene zu beschreiben, wird noch der Impuls berechnet:
Es gilt

$$y(t) = m \cdot \dot{\varphi}(t) = A \cdot m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Also sind die Trajektorien wieder Ellipsen im Phasenraum, wie es beim Hookeschen Gesetz der Fall ist.

Beispiel 3.3.6 (Echte (nicht-linearisierte) Pendelschwingung). Ohne die Näherung $\sin x \sim x$ erhält man

$$U(x) = -m \cdot \omega^2 \cdot \cos x, \quad (3.3.14)$$

als Potential zur Kraft in Gleichung (3.3.11). Für die Anfangswertbedingung

$$x(0) = -A \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

ergibt sich dann die Energie

$$E_0 = -m \cdot \omega^2 \cdot \cos A$$

und mittels Separation der Variablen erhält man dann mit (3.3.6) (siehe Bemerkung 3.3.2):

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{\varphi(t)} d\xi \frac{1}{\sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos A}}. \quad (3.3.15)$$

Abkürzend setze man nun

$$k = \sin \frac{A}{2}, \quad a(t) = \arcsin \left(\frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right)$$

und substituiere

$$\sin \eta = \frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\xi}{2},$$

was dann zu

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi(t)} d\eta \left(1 - k^2 \cdot \sin^2 \eta \right)^2 - \frac{1}{2}. \quad (3.3.16)$$

führt. Die vorliegende Funktion kann nicht elementar integriert werden und ist bekannt als *elliptisches Integral 1. Gattung zum Modul k* . Setzt man

$$u(x, k) := \int_0^x dt \left((1 - t^2) \cdot (1 - k^2 \cdot t^2) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } |x| \leq 1,$$

so ist $u(\cdot, k) : [-k, k] \rightarrow [-u(1, k), u(1, k)]$ streng isoton und bijektiv mit Umkehrfunktion

$$\text{sn} : [-u(1, k), u(1, k)] \rightarrow [-k, k].$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot \sin x, \quad x(0) = -A, \quad \dot{x}(0) = 0$$

ist dann gegeben durch

$$\varphi(t) = 2 \cdot \arcsin(k \cdot \operatorname{sn}(\omega \cdot t - u(1, k), k)). \quad (3.3.17)$$

Diese ist periodisch mit Periode $T = \frac{4}{\omega} \cdot u(1, k)$, $k = \sin \frac{A}{2}$.

Beispiel 3.3.7 (Erzwungene Schwingung (des linearisierten Pendels)).

(a) Die allgemeine Lösung von (3.3.12) ist gegeben durch

$$\varphi(t) = B \cdot \sin(\omega \cdot t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.3.18)$$

für beliebige Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Wird das Pendel durch eine äußere Kraft $m \cdot F(t)$ beeinflusst bzw. „angetrieben“, so erhält man die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = F(t). \quad (3.3.19)$$

Ist $F(t) = M \cdot \cos(\alpha \cdot t)$ periodisch, bietet sich der Ansatz $x(t) = C \cdot \cos(\alpha \cdot t)$ und führt zu:

$$\ddot{x} + \omega \cdot x = (-\alpha^2 + \omega^2) \cdot C \cdot \cos(\alpha \cdot t) \stackrel{!}{=} M \cdot \cos(\alpha \cdot t),$$

also

$$C = M \cdot (\omega^2 - \alpha^2)^{-1}, \quad \text{sofern } \alpha \neq \omega.$$

In diesem Fall ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung gefunden worden und die allgemeine Lösung ist nach der Erinnerung 3.1.4 gegeben durch

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = B \cdot \sin(\omega \cdot t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha \cdot t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Speziell für $B = 0$ und $A = \frac{M}{(\omega^2 - \alpha^2)}$ erhält man die Lösung zu (3.3.19) durch

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} (\cos(\alpha \cdot t) - \cos(\omega \cdot t)).$$

Nun modifiziere man „kontinuierlich“ die Frequenz α der äußeren Kraft $m \cdot M \cdot \cos(\alpha \cdot t)$: $\alpha \rightarrow \omega$:

Im Fall $\omega \neq 0$ erhält man wegen

$$\cos(\alpha \cdot t) - \cos(\omega \cdot t) \rightarrow 0, \quad \omega^2 - \alpha^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow \omega$$

durch die Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$\varphi_\omega(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \omega} \varphi_\alpha(t) = \frac{-M \cdot t \cdot \sin(\alpha \cdot t)}{-2\alpha} \Big|_{\alpha=\omega} = \frac{M}{2} \cdot \frac{t}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

LINK: TEIL 2 DER 26. VORLESUNG VOM 30.1.2023

Setze nun φ_ω zur Überprüfung in (3.3.19) ein: Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{M}{2\omega} (\sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot t \cdot \cos(\omega \cdot t))' + \frac{M}{2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega} \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ &= \frac{M}{2} (\cos(\omega \cdot t) + \cos(\omega \cdot t) - \omega \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot t \sin(\omega \cdot t)) \\ &= M \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ &= F(t). \end{aligned}$$

Man beachte, dass in diesem Resonanzfall ($\alpha = \omega$) – das heißt, dass die Anregungsfrequenz und Eigenfrequenz des Pendels gleich sind – die Lösung unbeschränkt in der Zeit wächst. Dann wird allerdings die Auslenkung so groß, dass (3.3.19) mit $\sin x \sim x$ die Schwingung des Pendels nicht mehr korrekt beschreibt.

Tatsächlich beobachtet man im generischen Fall $\alpha \neq \omega$ in der Realität, dass die Auslenkung kleiner wird.

Beispiel 3.3.8.

- (a) Dieser Effekt kommt vom Reibungsterm $2 \cdot \rho \cdot \dot{x}$ mit $\rho > 0$ in der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2 \cdot \rho \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = F(t), \quad (3.3.20)$$

die (3.3.19) verallgemeinert. Für die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2 \cdot \rho \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (3.3.20')$$

made man nun den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, das noch zu bestimmen ist. Wegen $e^{\lambda \cdot t} \neq 0$ liefert dann das Einsetzen in (3.3.20'):

$$\lambda^2 + 2 \cdot \rho \cdot \lambda + \omega^2 \cdot \lambda = 0$$

mit Lösung

$$\lambda_{\pm} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}.$$

- (b) Falls $\rho \geq \omega$, so sind $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ und beide negativ wegen

$$\omega^2 > 0 \quad \implies \quad \rho^2 - \omega^2 < \rho^2.$$

Also ergibt sich die exponentiell abfallende Lösung

$$\varphi(t) = A \cdot e^{\lambda_+ \cdot t} + B \cdot e^{\lambda_- \cdot t} \quad \text{für } \rho > \omega, \quad (3.3.21)$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$, damit es im physikalischen Kontext sinnvoll ist.
Im Spezialfall $\rho = \omega$ erhält man:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\rho \cdot t} + B \cdot t \cdot e^{-\rho \cdot t}, \quad (3.3.22)$$

ähnlich wie im Resonanzfall in Beispiel 3.3.7 (Man überprüfe dies durch Einsetzen in (3.3.20')).

Fazit. Ist der Reibungsparameter ρ größer oder gleich ω – es gilt also $\rho \geq \omega$ –, so erzeugt dieser eine so starke Dämpfung, dass keine Schwingung mehr stattfindet. Im Grenzfall $\rho = \omega$ ist das Abklingen aufgrund des Faktors t etwas verlangsamt, aber immer noch im Wesentlichen exponentiell.

- (c) Was passiert bei einer schwächeren Dämpfung für $\rho \in (0, \omega)$? Man erhält

$$\lambda_{\pm} = -\rho \pm i \cdot \sigma, \quad \sigma = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}.$$

Einsetzen in (3.3.21) liefert dann

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \cdot e^{-\rho \cdot t} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot t} + B \cdot e^{-\rho \cdot t} \cdot e^{-i \cdot \sigma \cdot t} \\ &= e^{-\rho \cdot t} \left(\underbrace{(A - B)}_{=: C} \cdot i \cdot \sin(\sigma \cdot t) + \underbrace{(A + B)}_{=: D} \cdot \cos(\sigma \cdot t) \right). \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Für $C, D \in \mathbb{R}$ erhält man dann eine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung (3.3.20'), die eine gedämpfte Schwingung beschreibt. Tatsächlich ist der Lösungsraum zweidimensional (besitzt die zwei Freiheitsgrade $x(0)$ und $\dot{x}(0)$), so dass die allgemeine Lösung bereits gefunden worden ist.

- (d) Man betrachte wieder die inhomogene Differentialgleichung (3.3.20), speziell mit einer periodischen äußeren Kraft $F(t) = M \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t}$ mit $M, \alpha > 0$. Es bietet sich der Ansatz

$$x(t) = C \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t}$$

an und führt zur Gleichung

$$\begin{aligned} M \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} = F(x) &\stackrel{!}{=} \ddot{x} + 2\rho \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = \left(-\alpha^2 + 2\rho \cdot i \cdot \alpha + \omega^2 \right) \cdot C \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} \\ \implies C &= \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2 + 2i \cdot \rho \cdot \alpha} = \frac{M}{z}, \quad \text{Im}(z) > 0. \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung von (3.3.20) ist dann gegeben durch

$$\varphi(t) = \frac{M}{|z|} \cdot e^{i \cdot (\alpha \cdot t + \delta)}, \quad (3.3.24)$$

wobei $e^{i\delta} = \frac{C}{|C|} = \frac{|z|}{z}$ den Winkel $\delta \in (-\pi, \pi]$ festlegt.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.3.20) zu erhalten, müssen (abhängig davon, ob $\rho > \omega$, $\rho = \omega$ oder $\rho \in (0, \omega)$ gilt) eine der allgemeinen Lösungen (3.3.21), (3.3.22) oder (3.3.23) hinzuaddiert werden. Speziell im Fall $\rho \in (0, \frac{\omega}{\sqrt{2}})$ wird die Amplitude $|C|$ der Lösung maximal bei der Anregungsfrequenz

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2 \cdot \rho^2} \neq \omega,$$

anders als im reibungslosen Fall: Ohne Reibung wird nämlich die Lösung mit der Anregungsfrequenz $\alpha = \omega$ „maximiert“. Ist $\delta < 0$, so gilt $\alpha t + \delta < \alpha t$. Es folgt, dass die erzwungene Schwingung mit Reibung gegenüber der äußeren Anregung zeitverzögert ist.

LINK: TEIL 1 DER 27. VORLESUNG VOM 1.2.2023

Beispiel 3.3.9 (Mehrdimensionale Schwingung). Man betrachte eine Schwingung im $\mathbb{R}^n$ (z.B. $n = 2$ bei einem physikalischen Pendel mit 2 Winkel-Freiheitsgraden). Für kleine Auslenkungen ist

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot A \cdot x \tag{3.3.25}$$

eine gute approximative Beschreibung der Pendelbewegung, wobei $m > 0$ die Masse eines Massepunktes bezeichnet und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix ist. Insbesondere ist dann A unitär diagonalisierbar, es existiert also eine orthogonale Matrix U , so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist:

$$U^{-1}AU = D = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad \omega_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.3.26}$$

Die Substitution $\xi := U^{-1}x$ führt dann wegen der Zeitunabhängigkeit von U zu

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n \end{pmatrix} = \ddot{\xi} = U^{-1}\ddot{x} = -U^{-1}Ax = -U^{-1}AU\xi = -D\xi = - \begin{pmatrix} \omega_1^2 \cdot \xi_1 \\ \vdots \\ \omega_n^2 \cdot \xi_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.27}$$

Man hat also n entkoppelte Schwingungen, die – wie im skalaren Fall – einzeln gelöst werden können ($\rightsquigarrow$ ‘sin + cos’-Form). Alternativ kann man die allgemeine Lösung von (3.3.27) schreiben:

$$\xi_j(t) = B_j \cdot \sin(\omega_j(t - c_j)), \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Man erkennt eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen (dies entspricht approximativ der Lösung der *linearisierten* Pendelgleichung $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$).

LINK: TEIL 1 DER 27. VORLESUNG VOM 1.2.2023

Der obige Videolink umfasst eine inhaltliche Rekapitulation jeglicher Kapitel der Vorlesung zur Analysis III (Lehramt). Diese wird in diesem L^AT_EX-Satz nicht weiter ausgeführt.