

$T^{1/2} := f(T)$ ist selbstadjungiert
und positiv. Es gilt:

$$T^{1/2} T^{1/2} = f(T) f(T) = (f^2)(T) = \text{id}(T) = T$$

Ist die Wurzel $T^{1/2}$ von T eindeutig?

Gegenüber: Gibt es $T^{1/2} \neq S \in L(H)$ positiv
mit $S^2 = T$? $\downarrow \|k=c$
s.a.

S. 5. 19

Seien $S \in L(H)$ s.a., $g: \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in B(\sigma(S))$, $f \in B(\mathbb{R})$. Dann
 $g(\sigma(S)) \quad (f \circ g)(S) = f(g(S)) \quad \otimes$

Bw: $f \circ g: \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}$ ist messb. & beschr.

Also ist $(f \circ g)(S) := \int_{\sigma(S)} (f \circ g) \, d\mu_S$ s.a. Op. $\in L(H)$.

Ebenso ist $g(S) := \int_{\sigma(S)} g \, d\mu_S$ —||—,

besitzt also ein Spektralmaß. Nennen wir es E .
Das —||— von S —||— F .

$\mathbb{W}_g$ Maß theoretischer Induktion reicht es die Aussage für Indikator fkt. $f = \mathbb{1}_A$ z.z., d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B} : (\mathbb{1}_A \circ g)(s) = \mathbb{1}_A(g(s)) \quad (*)$$

Um rechnen:

$$(\mathbb{1}_A \circ g)(t) = \mathbb{1}_{\{g(t) \in A\}}(t) = \mathbb{1}_{g^{-1}(A)}$$

wobei $g^{-1}(A) \in \mathcal{D}$, da $g \in \mathcal{B}(\sigma(s))$.

(*) um formulieren:

$$\forall A \in \mathcal{B} : F_{g^{-1}(A)} = (\mathbb{1}_A \circ g)(s) = \mathbb{1}_A(g(s)) = E_A$$

5.12

Es reicht, dies "schwach" z.z.:

7.12

$$\forall A \in \mathcal{D} \quad \forall x, y \in H : g_{x,y}(A) := \langle E_A, x, y \rangle$$

||

$$f_{x,y}(A) := \langle \overset{\text{Maß?}}{F}_{g^{-1}(A)}, x, y \rangle =$$

$\langle F_{\bullet}, x, y \rangle(g^{-1}(A))$ Bild Maß von $A \mapsto \langle F_A, x, y \rangle$

bzgl. Abb. g .

Nach dem Traktatsatz für Bildmaße

[aus der Maß- & W-Theorie, vgl. Bauer oder Klenke] gilt

$$\forall m \in \mathbb{N}_0: \int t^m x_{x,y}(dt) = \int g(s)^m d\langle F_s x, y \rangle$$

Damit folgt:

$\downarrow$
Sp.-M von S

$$\int t^m x_{x,y}(dt) = \langle (g(s))^m x, y \rangle$$

$$= \int \lambda^m d\langle \underbrace{E_\lambda}_{\text{Sp.-M von } g(S)} x, y \rangle$$

Sp.-M von $g(S)$

$$= \int \lambda^m \mu_{x,y}(d\lambda)$$

Maßth. Ind: $\rightarrow$ ~~Exemplen~~ stetige Fkt. $\mathbb{C}$

$\rightarrow$ beschr. messb. Fkt $\mathbb{B}$. $\square$

Zurück zu unserer Frage in Bsp. 5.18:

Setze: $g(t) = t^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$

$$f(t) = \sqrt{t} \cdot \mathbb{1}_{\underbrace{[0,\infty)}_{\text{---}}}(t)$$

Laut Ann. war S positiv, insbes $\sigma(S) \subset [0,\infty)$

also $f \circ g = \text{id}$

Stetiger Funk. kal. $\Rightarrow$

$$\underline{S \stackrel{\square}{=} (f \circ g)(S) = (f(g(S))) \stackrel{\text{Ann.}}{=} f(T) = T^{1/2}}$$

Spectral mapping theorem besagt für (stetige Fkt):

$$g(\sigma(S)) = \sigma(g(S)) = \sigma(S^2) \stackrel{\text{Ann.}}{=} \sigma(T)$$

$$t \in \sigma(S) \Leftrightarrow t^2 \in \sigma(T)$$

Penibel: Definiere:

$$\tilde{g}: \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(t) = t^2 \cdot \mathbb{1}_{\sigma(S)}(t)$$

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \mathbb{1}_{\sigma(T)}(t) \sqrt{t}$$

$g(\sigma(S)) = \sigma(T)$

Dann $\sigma(S)$

$$(\tilde{f} \circ \tilde{g})(t) = \tilde{f}(\underbrace{t^2 \cdot \mathbb{1}_{\sigma(S)}(t)}_{\substack{\uparrow \\ \sigma(T)}}) = \mathbb{1}_{\sigma(S)}(t)$$

Recht fertig $\square$

Eindut. bewiesen.

Mit derselben Methode zeigt man:

Kor. 5.20 Ist $m \in \mathbb{N}$ und $T \in L(H)$ positiv,
 $\|k = \mathbb{C}$, so ex. genau ein positives
 $S \in L(H)$ mit $S^m = T$.

Dfm / Verallg:

Für $T \in L(H)$ positiv, $\|k = \mathbb{C}$, setze.

$T^{1/m} = \sqrt[m]{T} = S \in L(H)$ positiv. von oben

~~Def 5.21~~ :=

Für $A \in L(H)$, $\|k = \mathbb{C}$, setze $T = A^* A \in L(H)$
 (positiv) und

$$|A| := T^{1/2} = (A^* A)^{1/2}$$

Wie für kompakte $A \in k(H)$ zeigt
 man Polarzerlegung

S. 5.21 Ist $A \in L(H)$, $\|k = \mathbb{C}$, so ex.

eine partielle Isometrie $U \in L(H)$

mit $A = U |A|$. Bw: Wie für $A \in k(H)$

Wdh. $U \in L(H_1, H_2)$, H_i HR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ heißt partielle Isometrie, falls

$$U|_{(\ker U)^\perp} : (\ker U)^\perp \rightarrow H_2$$

isometrisch ist. Beachte: $H_3 = (\ker U)^\perp$ ist auch ein HR. Ein $V \in L(H_4, H_5)$ heißt isometrisch falls

$$\forall x \in H_4 : \|Vx\|_{H_5} = \|x\|_{H_4}$$

Einige Resultate ohne Bw. (als Übq:)

Lem 5.22 Sei $T = \int \lambda dE_\lambda \in L(H)$ s.a.

und $A_n = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1/n\}$. Sind alle

$\text{ran } E_{A_n}$ endlich-dim., so ist $T \in k(H)$.

Lem 5.23 Ist $T = \int \lambda dE_\lambda \in L(H)$ s.a.,

so ist $\tilde{K} = \sigma(T)$ die kleinste kompakte

19-2 Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ mit $E_K = \text{Id}$.

Zwei Auss: * $E_{\sigma(T)} = \text{Id.}$ [Bw. mit Resolvente
b. Neumannsche R.]

* $K \subset \mathbb{K}$ kompakt, $E_K = \text{Id}$

$$\Rightarrow K \supset \sigma(T).$$

Bw. nutzt baldigen Satz über Zusammenhang
zw. Spektralmaß und Resolventenmenge

Dfm./Erin. 5.24

$I \subset L(H)$ heißt beidseitiges Ideal,
falls * $I \cup VR$

$$* B \in I \wedge A, C \in L(H) \Rightarrow ABC \in I$$

[Bsp: $K(H)$ ist bds Ideal, da Produkt
kompakt $\mathcal{O}_p$ * beschr. $\mathcal{O}_p = \text{komp-}\mathcal{O}_p$.]

Ideal heißt abgeschl., falls es abgeschl.
 $\cup VR$ von $L(H)$ ist.

S. 5.25 Sei H separabler HR. Dann sind

$$\{0\}, \quad K(H), \quad L(H)$$

abgeschlossene bds. Ideale von $L(H)$. Es gibt keine weiteren.

Insbes: $K(H) \ni T_n \xrightarrow{\text{III-III}} T \in L(H)$

Dann auch $T \in K(H)$.

6 Exkurs: Spektralsatz für

normale Operatoren. & Komplexifizierung
von $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$

Ist $T \in L(H)$ normal, H $\mathbb{R}$ über $\mathbb{C}$,

also $[T, T^*] = 0$, dann gilt für

$$R = \frac{1}{2} (T + T^*) \quad , \quad S = \frac{1}{2i} (T - T^*)$$

ebenfalls $[R, S] = 0$. Außerdem gilt

offensichtlich $T = R + iS$

und R und S sind selbst adjungiert.

$$\text{Vgl: } z = x + iy \quad \text{mit}$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$$

$\Rightarrow$ Spektralsatz gilt für R, S .

$E_\bullet$ Spektralmaß von R

$F_\bullet$ $\parallel$ S

kor. 5.16 liefert:

$$[R, S] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{D} : [E_A, S] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall A, B \in \mathcal{D} : [E_A, F_B] = 0$$

Definiere für $A, B \in \mathcal{D} : G_{A \times B} = E_A F_B \in L(H)$

Bh: $G_{A \times B}$ ist orth. Projektor

$$\begin{aligned} \text{Bw: } (G_{A \times B})^2 &= E_A F_B E_A F_B = E_A^2 F_B^2 = E_A F_B \\ &= E_A F_B = G_{A \times B} \end{aligned}$$

$$G_{A \times B}^* = (E_A F_B)^* = F_B^* E_A^* = F_B E_A =$$

$F_B E_A$ selbsta.

$$= E_A F_B = G_{A \times B}$$

Menge der Rechtecke bildet einen
Halb ring / Semiring $\mathcal{R}$

Bekannt aus Stochastik / Ana III
oder nachlesen

Die natürliche Erweiterung auf

die erzeugte Algebra $\mathcal{A} (=$

$\{$ endl. Vereinigung von disj. Rechtecken $\})$

$A \ni C \rightarrow G_C$ ist σ -additiv

und kann als Carathéodory zu

$$C \mapsto \langle h, G_C g \rangle$$

zu einem komplexen
Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

für jedes Paar $h, g \in H$ fortgesetzt werden. Es ergibt sich, dass die dadurch defn. Abb

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \ni C \mapsto G_C \in L(H)$$

ein Verallgemeinerung des PVM ist.

Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \sim z = x + iy \in \mathbb{C}$

Mit dieser Vorbereitung können wir nun formulieren

S. 6.1 (Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren)

Sei H ein HR über $\mathbb{C}$, $T \in L(H)$ normal.

Dann ex. ein eindeutig bestimmtes

PVM $G: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \longrightarrow L(H)$ mit

kompaktem Träger s.d. $T = \int_{\sigma(T)} z \, dG_z$

Es ex. eind. stetigen, involutiver
Algebren - Homomorphismen (genannt
messb. Funktional kalkül)

$$\hat{\Phi} : B(\sigma(T)) \longrightarrow L(H)$$

Für den

$$\hat{\Phi}(f) = \int_{\sigma(T)} f(z) dG_z =: f(T)$$

gilt.

Jeder unitäre Operator ist normal.
können wir da etwas dazu lernen.

L. 6.2 Für $U \in L(H)$ unitär

gilt $\sigma(U) \subset \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$.

Bw. U unitär $\Rightarrow U$ bijektiv $\Rightarrow 0 \in \sigma(U)$

Da $\sigma(U) \subset B_{\|U\|}(0)$ und $\|U\|=1$

ist jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$ in $\sigma(U)$.

Ist $|\lambda| \in (0,1)$ so gelten

$$\frac{1}{|\lambda|} > 1 = \|U^*\|$$

$$(\lambda - U) = \underbrace{(-\lambda U)}_{\text{bijektiv}} \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} - U^*\right)}_{\text{bijektiv wg. Neumannscher Reihe.}}$$

also $\lambda \in \sigma(U)$. $\square$

Wir haben uns bisher auf $\mathbb{R}$ über $K = \mathbb{C}$ konzentriert. Was gilt für $\| \cdot \| = \mathbb{R}$?

* Gilt der Spektralsatz gar nicht?

* $\| \cdot \|$ Wort wörtlich wie im Fall $K = \mathbb{C}$?

Schon im endlich-dim Fall gibt es einen Unterschied:

über $K = \mathbb{C}$ lässt sich jede normale Matrix diagonalisieren.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lassen sich orthogonale
Matrizen id. nicht diagonalisieren

Es gilt z. B. folgen der Satz von
Goodrich (1972)

6.3

The spectral theorem for real Hilbert space

Sei H $\mathbb{R}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und $A \in L(H)$

normal. Dann ex. ein eindeutiges

„Spektral paar“ (E, F) , so dass

$$\forall x \in H : \quad Ax = \int \lambda \cos \Theta \, dE_{\lambda} x \\ - \int \lambda \sin \Theta \, dF_{\lambda} x$$

schwach geschrieben: wobei $\lambda = r(\cos \Theta + i \sin \Theta)$

$$\langle Ax, y \rangle = \int \lambda \cos \Theta \, d\langle E_{\lambda} x, y \rangle \\ - \int \lambda \sin \Theta \, d\langle F_{\lambda} x, y \rangle$$

(E, F) ist ein Spektralpaar, falls

E und F P.w.M. mit zusätzlichen
Eigensch. sind. (eng miteinander
verknüpft).

Siehe auch:

Dissertation: On real normal operators
Wong, Tim kin 1969

Acta Scientiarum Mathematicorum 2019
Real normal operators and Williamson's
normal form, Bhat & John

Die Grundidee ist, dass man einen
HR H über $\mathbb{R}$ zu einem HR über $\mathbb{C}$
„komplexifizieren“ kann. Siehe § 4.4

im: Lineare Operatoren in HR

Teil 4: Grundlagen, 2000, Weidmann