

Analysis I für Lehramt

Wintersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Vorwort

Wie dieses Skript entstanden ist

Im Wintersemester 2021 habe ich an der TU Dortmund die Vorlesung „Analysis I für Lehramt Gymnasium und Berufskolleg“ gehalten. Wegen der damals aufgrund von Covid geltenden Einschränkungen wurde die Vorlesung zweigleisig angeboten: Zum einen fand eine klassische Vorlesung an der Tafel im Hörsaal statt, zum anderen wurde diese Vorlesung mit Kamera aufgenommen und die entsprechenden Videos unter Moodle zu Verfügung gestellt, wo sie — zusammen mit anderen Vorlesungsmaterialien — zugänglich sind.

Das vorliegende Skript orientiert sich zum einen an meinen handschriftlichen Notizen, anhand derer ich die Vorlesung gehalten habe, und zum anderen an der Vorlesung, wie sie an der Tafel stattgefunden hat und in den Videos festgehalten ist. Manchmal bin ich in der Vorlesung selbst von den Notizen abgewichen, im Großen und Ganzen hielt ich mich aber recht eng daran. An manchen Stellen habe ich die handschriftlichen Notizen nach der Vorlesung nochmal nachbearbeitet.

Die Videos — genauer: deren URLs in Moodle — sind an den Stellen im Skript, die dem entsprechenden Vorlesungsdatum entsprechen, verlinkt.

An manchen Stellen ist die fortlaufende Zählung im vorliegenden Skript anders als die Nummerierung an der Tafel und den Videos. Dies ist jeweils am Rand vermerkt.

Es gibt sicherlich eine Reihe von kleineren Fehlern und ich arbeite — zusammen mit freundlichen Menschen, die mich auf Fehler hinweisen — daran, diese auszumerzen.

Ein genereller Hinweis zum Sinn und Zweck von Skripten: Das Lesen von Vorlesungsnotizen und Skripten kann das eigene Denken und Nachvollziehen der Sachverhalte, Schritte und Argumente nicht ersetzen. Das eigentliche Ziel ist die Verinnerlichung der mathematischen Wahrheiten, so dass man sie wie etwas Eigenes beherrscht und anderen mitteilen kann. Falls Ihnen an einzelnen Stellen ein Skript zu knapp formuliert ist, um die dargestellten Sachverhalte zu verstehen, konsultieren Sie die angegebene Literatur.

Quellen und Bezüge

In der Vorlesung bezog ich mich insbesondere auf die Skripte [[Bru21](#), [Kab18](#), [Len17](#)], die mir die Kollegen Rainer Brück, Winfried Kaballo und Daniel Lenz freundlicherweise zu Verfügung gestellt haben, sowie die Bücher [[For16](#), [Kab00](#), [Koe04a](#), [Tao16a](#)].

Als weitere Literatur können die anderen im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher nützlich sein.

Danksagung

Ich bedanke mich bei den Assistenten der Vorlesung, Herrn A. Dicke, Herrn A. Iskandarov, Frau F. Lemming und Herrn A. Seelmann. Herrn Dicke danke ich in besonderer Weise für

die Organisation der Übungen, für das Aufnehmen, Nachbearbeiten und Bereitstellen der Vorlesungsvideos und die Vertretung an zwei Vorlesungsterminen.

Den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung danke ich für die Hilfe beim Tafelwischen, das Interesse, die Fragen und die aktive Teilnahme — trotz der Einschränkungen unter denen die Vorlesung stattfinden musste.

Die Vorlesung hat mir viel Freude bereitet!

Herrn A. Nuss danke ich für die kompetente und zügige Erstellung des L^AT_EX-Satzes dieses Skripts und Herrn Seelmann für Korrekturhinweise.

Dortmund, den 4. Oktober 2023

Ivan Veselić

Literatur

- [Bru21] Rainer Brück. Analysis I–III für Lehramt Gymnasium, 2021. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [For17a] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [For17b] Otto Forster. *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [FS13] Otto Forster and Thomas Szymczak. *Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [FW17] Otto Forster and Rüdiger Wessoly. *Übungsbuch zur Analysis 1. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.
- [Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.
- [Kab97] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis II*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [Kab99] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis III*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- [Kab00] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis I*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

- [Kab18] Winfried Kabbalo. Vorlesung Analysis I / Lehramt, 2018. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [Koe04a] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Berlin: Springer, 2004.
- [Koe04b] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Berlin: Springer, 2004.
- [Len17] Daniel Lenz. Analysis I–II Notizen, 2017. FSU Jena, unpublished notes.
- [Tao16a] Terence Tao. *Analysis I*, volume 37. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.
- [Tao16b] Terence Tao. *Analysis II*, volume 38. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.

Inhaltsverzeichnis

1	Die reellen Zahlen	1
2	Vollständige Induktion und Summenformeln	17
3	Vollständigkeit von Körpern	28
4	Die komplexen Zahlen	40
5	Folgen und ihre Konvergenz	43
6	Monotone Folgen	64
7	Häufungspunkte und Cauchyfolgen	75
8	Funktionen	82
9	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	93
10	Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen	126
11	Differenzierbare Funktionen	126
12	Kurvendiskussion	141
13	Weitere trigonometrische Funktionen	167
14	Das Konzept des riemannschen Integrals	174
15	Uneigentliche Integrale	212

LINK: [TEIL 1 DER 1. VORLESUNG VOM 11.10.2021](#)

1 Die reellen Zahlen

Intuitiv sind die reellen Zahlen bekannt durch geometrische, physikalische oder ökonomische Größen. So können die Grundfläche eines Zimmers, die Temperatur eines Körpers sowie der Kontostand bzw. Aktienkurs durch reelle Zahlen beschrieben werden. Es ist notwendig die Struktur der reellen Zahlen (hier durch $\mathbb{R}$ gekennzeichnet) zu verstehen. So findet dieses Verständnis ihre Anwendung bei der Berechnung von Grenzwerten von Differenzenquotienten mithilfe von immer kleiner werdenden $\varepsilon > 0$ oder bei der Begründung, warum bestimmte Polynome Nullstellen besitzen und andere wiederum nicht.

Dazu werden die reellen Zahlen zunächst axiomatisch eingeführt; alle bekannten Rechenregeln ergeben sich aus diesen Axiomen.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ genügt:

Definition 1.1 (Körperaxiome). Eine nichtleere Menge $\mathbb{K}$ heißt *Körper*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(K1) *Additive Verknüpfung:*

Es existiert eine Abbildung

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

die *Addition* genannt wird und dem Paar (a, b) die Summe $a + b$ zuordnet.

(K2) *Assoziativität der Addition:*

Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$(a + b) + c = a + (b + c) =: a + b + c,$$

die Klammern dürfen also beliebig weggelassen und geschrieben werden.

(K3) *Neutrales Element bezüglich der Addition:*

Es existiert ein Element $n \in \mathbb{K}$ derart, dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt:

$$n + a = a + n = a.$$

(K4) *Inverses Element bezüglich der Addition:*

Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ existiert ein $x \in \mathbb{K}$ derart, dass gilt:

$$x + a = a + x = n.$$

(K5) *Kommutativität der Addition:*

Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + b = b + a.$$

Anmerkung: Insbesondere bildet $(\mathbb{K}, +)$ damit eine *kommutative Gruppe*.

- (K6) *Multiplikative Verknüpfung:*
Es existiert eine Abbildung

$$\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

die *Multiplikation* genannt wird und dem Paar (a, b) das Produkt $a \cdot b$ zuordnet.

- (K7) *Assoziativität der Multiplikation:*
Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c,$$

die Kammersetzung erfolgt also analog zu (K2).

- (K8) *Neutrales Element bezüglich der Multiplikation:*
Es existiert ein Element $e \in \mathbb{K} \setminus \{n\}$ derart, dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt:

$$e \cdot a = a \cdot e = a.$$

- (K9) *Inverses Element bezüglich der Multiplikation:*
Zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{n\}$ existiert ein $y \in \mathbb{K}$ derart, dass gilt:

$$y \cdot a = a \cdot y = e.$$

- (K10) *Kommutativität der Multiplikation:*
Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Anmerkung: $(\mathbb{K} \setminus \{n\}, \cdot)$ ist damit eine *kommutative Gruppe*.

Bisher stehen Addition und Multiplikation (fast) zusammenhanglos nebeneinander, sind aber zum Verwechseln ähnlich. Mit dem nächsten Axiom werden die beiden Verknüpfungen nun direkt in Beziehung gebracht:

- (K11) Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad \text{"Punkt vor Strich"} \quad ac + bc.$$

Die Notation „ $a \in \mathbb{K}$ “ ist äquivalent zu der Aussage „ a ist ein Element der Menge $\mathbb{K}$ “. Dabei ist eine Menge eine „Gesamtheit von wohldefinierten, unterscheidbaren Objekten unserer Vorstellung oder Anschauung“.

Die aus der Linearen Algebra bekannten Zahlen Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ bilden jeweils einen Körper mit $n = 0$ und $e = 1$ sowie den üblichen Verknüpfungen. Dasselbe gilt auch für die

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, allerdings mit einer geeigneten Verallgemeinerung der genannten Verknüpfungen.

Man betrachte nun die Mengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}.$$

Dabei fällt auf, dass $\mathbb{N}$ kein Körper ist: Es existiert kein additives neutrales Element, (K3) wird also nicht erfüllt.

Was ist mit $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$? Auch diese Menge ist kein Körper: So fehlt beispielsweise das additive inverse Element zu 2, was (K4) verletzt.

Ist dann $\mathbb{Z}$ ein Körper? Auch nicht: Es fehlt das multiplikative inverse Element zu 2, so dass (K9) nicht erfüllt wird.

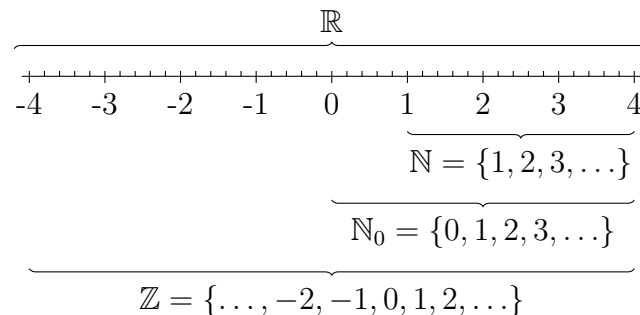


Abbildung 1: Visualisierung der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ anhand eines Zahlenstrahls

LINK: [TEIL 2 DER 1. VORLESUNG VOM 11.10.2021](#)

Bemerkung (Eindeutigkeit in (K3), (K4), (K8), (K9)).

Das neutrale Element der Addition n und das neutrale Element der Multiplikation e sind eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\tilde{n}$ ein weiteres Element mit den Eigenschaften aus (K3). Dann kann $n + \tilde{n}$ auf zwei Arten dargestellt werden: Es gilt nämlich

$$n \stackrel{\text{(K3)}}{=}_{\text{auf } \tilde{n}} n + \tilde{n} \stackrel{\text{(K3)}}{=}_{\text{auf } n} \tilde{n},$$

also $n = \tilde{n}$, weshalb n eindeutig ist.

Der Beweis für e bezüglich (K8) erfolgt analog. □

Für $a \in \mathbb{K}$ ist das inverse Element x aus (K4) mit

$$a + x = n$$

ebenfalls eindeutig bestimmt. Man nennt es daher das *additive Inverse* von a (oder inverses Element von a bezüglich der Addition) und bezeichnet es mit

$$x = -a.$$

Somit haben wir sozusagen das „Minuszeichen definiert“.

Weiter impliziert (K4), dass für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$a + c = b$$

genau eine Lösung c besitzt, und zwar

$$c = b + (-a),$$

wofür wir abkürzend

$$c = b - a$$

schreiben.

Analog ist zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ das inverse Element y aus (K9) eindeutig bestimmt: Man nennt es das *multiplikative Inverse* von a und bezeichnet es mit

$$y = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Wieder hat zu beliebigem $a, b \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$a \cdot c = b$$

genau eine Lösung c , und zwar

$$c = b \cdot a^{-1} = b \cdot \frac{1}{a},$$

wofür wir abkürzend

$$c = \frac{b}{a}$$

schreiben.

Im Folgenden lassen wir den Multiplikationspunkt häufig weg und schreiben

$$ab \quad \text{für} \quad a \cdot b.$$

Die bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$) folgen nun:

Notation/Schreibweise. Für $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{K}$ setze

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}$$

und $a^0 = e$. Im Kontext dieser Veranstaltung setzt man insbesondere auch $n^0 = e$. Falls $a \neq 0$, so setze auch

$$a^{-m} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}}_{m\text{-mal}} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

Damit folgen die:

Potenzregeln. Für $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $m, l \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \quad a^m \cdot a^l = a^{m+l} \quad \text{und} \quad (a^m)^l = a^{m \cdot l}.$$

Notation. Für zwei Mengen M und N bedeutet

- $M \subset N$, dass M eine echte Teilmenge von N ist oder $M = N$ gilt,
- $M \cap N = \{x \in M \mid x \in N\} = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ den (Durch-)Schnitt von M und N , und
- $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ die Vereinigung von M und N . (Dieses „oder“ ist nicht ausschließend.)

Insbesondere gilt $M \cap N \subset M \cup N$.

Weiter bezeichnet

- $M \setminus N = \left\{ x \in M \mid \underbrace{x \notin N}_{x \text{ kein Element von } N} \right\}$ M ohne N , und
- $M \Delta N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$ die *symmetrische Differenz* von M und N . (Damit kann man ein „ausschließendes oder“ simulieren.)

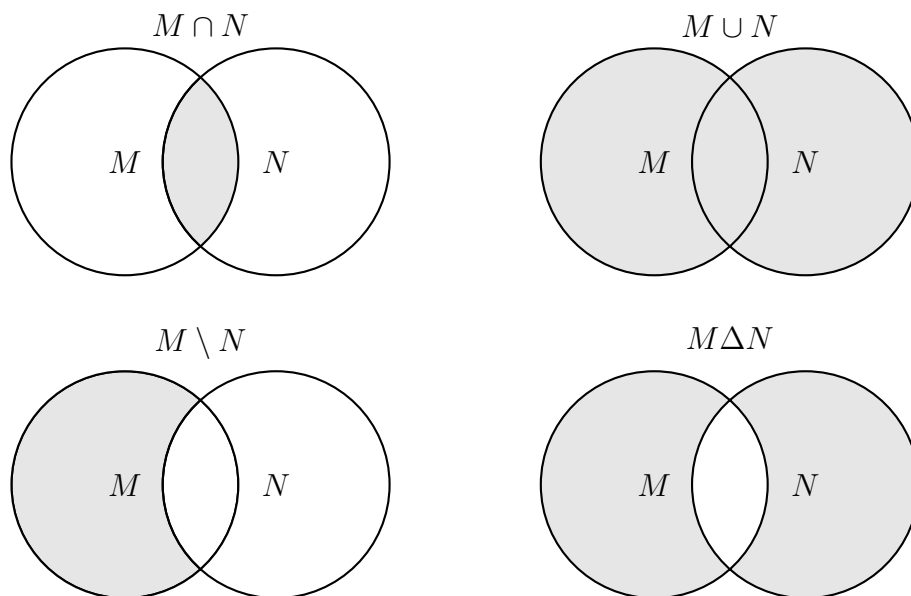


Abbildung 2: Visualisierung der Mengenverknüpfungen anhand von Venn-Diagrammen

In der Mathematik verwendet man zur „stenographischen“ Schreibweise Quantoren und Implikationspfeile:

- „ $\forall$ “ bedeutet „für alle“,
- „ $\exists$ “ bedeutet „es existiert“,
- „ $\Rightarrow$ “ bedeutet „impliziert“ bzw. „erzwingt“,
- „ $\Leftarrow$ “ bedeutet „folgt aus“,
- „ $\Leftrightarrow$ “ bedeutet „gleichbedeutend/äquivalent zu“,
- „ $:$ “ bedeutet „so dass gilt“.

Beispiel.

- * Eine entsprechende Kurzschreibweise für (K9) ist gegeben durch:

$$\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{n\} \exists x \in \mathbb{K} : a \cdot x = e$$

- * $M \subset N$ ist äquivalent zu:

$$x \in M \Rightarrow x \in N.$$

Dies kann auch geschrieben werden als:

$$x \in N \Leftarrow x \in M.$$

- * Gilt sogar $M = N$, kann man dies ausdrücken durch

$$x \in M \Leftrightarrow x \in N.$$

Wenn man Zahlen eine gewisse ‚Größe‘ oder ‚Gewicht‘ zuordnet, könnte der Gedanke aufkommen, dass manche Zahlen ‚größer‘ oder ‚kleiner‘ sind als andere. Diese „Anordnung“ wird wie folgt definiert:

Definition 1.2 (Angeordneter Körper). Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt *angeordnet*, falls eine nichtleere Teilmenge P von $\mathbb{K}$ existiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (O1) Für $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$a \in P, \quad a = n, \quad -a \in P.$$

- (O2) Für $a, b \in P$ gelten

$$a + b \in P, \quad ab \in P.$$

Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt

- *positiv*, falls $a \in P$, und
- *negativ*, falls $-a \in P$.

P bezeichnet dabei die *Menge der positiven Elemente*.

LINK: [TEIL 1 DER 2. VORLESUNG VOM 14.10.2021](#)

Bemerkung (Einschub). Für $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{K}$ setzen wir

$$ma = \underbrace{a + \dots + a}_{m\text{-mal}} \quad \text{und} \quad (-m)a = m(-a).$$

Setze nun

$$0 \cdot a = n,$$

wobei 0 das (additive) neutrale Element in $\mathbb{Z}$ und n das (additive) neutrale Element in $\mathbb{K}$ kennzeichnet.

Dann gilt analog zu den Potenzregeln für alle $m, l \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in \mathbb{K}$:

$$m(a + b) = ma + mb,$$

$$ma + la = (m + l)a,$$

$$l(ma) = (l \cdot m)a.$$

Summen & Produktzeichen. Setze für $m, l \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq l$ und $a_m, a_{m+1}, \dots, a_l \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{j=m}^l a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_l \quad \text{und} \quad \prod_{j=m}^l a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_l,$$

wobei j den *Laufindex* (oder *Summationsindex*) bezeichnet.

Setze weiter für $m > l$

$$\sum_{j=m}^l a_j = n \quad \text{als „leere Summe“}$$

und

$$\prod_{j=m}^l a_j = e \quad \text{als „leeres Produkt“}.$$

Sind $b_m, \dots, b_l, c \in \mathbb{K}$ weitere Elemente des Körpers $\mathbb{K}$, so gelten:

$$\left(\sum_{j=m}^l a_j \right) + \left(\sum_{j=m}^l b_j \right) = \sum_{j=m}^l (a_j + b_j), \quad \sum_{j=m}^l (c \cdot a_j) = c \cdot \sum_{j=m}^l a_j$$

sowie

$$\left(\prod_{j=m}^l a_j\right) \cdot \left(\prod_{j=m}^l b_j\right) = \prod_{j=m}^l (a_j \cdot b_j)$$

und

$$\prod_{j=m}^l a_j^N = \left(\prod_{j=m}^l a_j\right)^N \quad \text{für beliebige } N \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel. Es seien $l, m \in \mathbb{N}$, $l \geq m$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\sum_{j=m}^l a = (l - m + 1) \cdot a \quad \text{und} \quad \prod_{j=m}^l a = a^{l-m+1}.$$

Weiter gilt

$$\sum_{j=m}^m a_j = a_m \quad \text{sowie} \quad \prod_{j=m}^m a_j = a_m.$$

Anmerkung: Bei den Mengen $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen handelt es sich um angeordnete Körper.

Definition 1.3 (Ordnungsrelationen). Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $a, b \in \mathbb{K}$. Gilt nun

$$b - a \in P,$$

so heißt a *kleiner als* b (in Symbolen $a < b$ oder $b > a$).

Gilt

$$b - a \in P \cup \{n\},$$

so heißt a *kleiner-gleich* b (in Symbolen $a \leq b$ oder $b \geq a$).

a heißt *größer als* bzw. *größer-gleich* b , wenn

$$a > b \quad \text{bzw.} \quad a \geq b.$$

Insbesondere gilt für $a \in \mathbb{K}$:

$$a > n \quad \Leftrightarrow \quad a \in P.$$

„ $<$ “ heißt *Ordnungsrelation* auf $\mathbb{K}$ (induziert durch P).

In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet $a < b$ bildlich gesprochen, dass im Zahlenstrahl a links von b liegt.

Wie vertragen sich nun Addition und Multiplikation mit der oben geschilderten Ordnungsrelation? Diese Frage wird im folgenden Satz behandelt:

Satz 1.4. Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

- (2) Für $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a < b$ und $b < c$ gilt

$$a < c.$$

- (3) Sind $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a < b$, so gilt

$$a + c < b + c$$

- (4) Sind $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a < b$, so gilt:

$$c > n \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

und

$$c < n \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c.$$

- (5) Ist $a \in \mathbb{K} \setminus \{n\}$, so ist

$$a^2 > n.$$

Insbesondere gilt $e = e^2 > n$.

- (6) Für $a, b \in \mathbb{K}$ mit $n < a < b$ gilt:

$$n < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

- (7) Sind $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a < b$, so existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit

$$a < c < b.$$

Beweis. (3) & (5): Übung!

- (1) Für die Differenz $b - a \in \mathbb{K}$ gilt nach (O1) genau eine der drei Aussagen

$$b - a \in P, \quad b - a = n \quad \text{oder} \quad a - b = -(b - a) \in P.$$

Die Definition der Ordnungsrelation „<“ liefert dann die Behauptung.

- (2) Wegen $a < b$ und $b < c$ gilt $b - a \in P$ bzw. $c - b \in P$. Damit gilt nach Definition 1.2:

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in P,$$

also $a < c$.

- (4) Für $a < b$ und $c > n$ gelten

$$b - a \in P \quad \text{und} \quad c \in P$$

und mit (O2)

$$P \ni (b - a) \cdot c = bc - ac,$$

also $ac < bc$.

Für $a < b$ und $c < n$ gelten entsprechend

$$b - a \in P \quad \text{und} \quad -c \in P$$

und es folgt analog

$$P \ni -c \cdot (b - a) = c(a - b) = ac - bc,$$

also $ac > bc$.

- (6) Man betrachte zunächst die folgende Vorüberlegung:

Behauptung. Falls $a > n$, dann gilt $\frac{1}{a} > n$.

Beweis der Behauptung. Mit (5) erhält man zunächst $a \cdot \frac{1}{a} = e > n$. Wäre nun $\frac{1}{a} < n$, so gilt wegen (4)

$$n = n \cdot \frac{1}{a} > a \cdot \frac{1}{a} = e,$$

was ein Widerspruch zu (5) ist.

Wäre nun $\frac{1}{a} = n$, so gilt

$$e = a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot n = n,$$

was auch ein Widerspruch zu (5) ist. Also muss $\frac{1}{a} > n$ gelten.

Da nun $n < a < b$ vorausgesetzt ist, gilt $a, b \in P$ und $b - a \in P$. Nach (O2) gilt dann auch $a \cdot b \in P$. Nach der obigen Vorüberlegung ist dann auch $\frac{1}{ab} \in P$ und man erhält:

$$P \ni \frac{1}{ab}(b - a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

also $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ und damit die Behauptung.

LINK: TEIL 2 DER 2. VORLESUNG VOM 14.10.2021

- (7) Man betrachte wieder eine Vorüberlegung:
Setze dazu zunächst $f := (e + e)^{-1} = \underbrace{(2e)^{-1}}_{>n} = \frac{1}{2}$.

Behauptung. Für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$a = f(a + a).$$

Beweis der Behauptung. Es gilt:

$$a + a = e \cdot a + e \cdot a = (e + e) a \quad \Rightarrow \quad f(a + a) = f(e + e) \cdot a = e \cdot a = a.$$

Lege nun zu $a < b$ den „Mittelwert“ c fest durch

$$c := f(a + b).$$

Nach Voraussetzung gilt weiter

$$a + a \stackrel{(3)}{<} a + b \stackrel{(3)}{<} b + b. \quad (*)$$

Damit erhält man

$$a + b = f^{-1} \cdot c = (e + e) \cdot c = c + c$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} f(a + a) < f(a + b) = f(c + c) < f(b + b).$$

Aus der Vorüberlegung folgt dann $a < c < b$.

□

Korollar 1.5.

- (a) Ein angeordneter Körper hat unendlich viele Elemente.
- (b) Sind $a, b \in \mathbb{K}$ und gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{K}$ mit $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$a < b + \varepsilon,$$

so folgt schon $a \leq b$.

Beweis.

- (a) $\mathbb{K}$ enthält mindestens zwei Elemente $n < e$. Wir zeigen sogar, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ $c_m \in \mathbb{K}$ existieren, die folgende Behauptung (m) erfüllen:

Behauptung (m). Es gilt

$$n < c_m < c_{m-1}.$$

Beweis der Behauptung. Beweis mit vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$:

(IA) $m = 1$:

Die Behauptung $(m = 1)$ besagt: Es existieren $c_0, c_1 \in \mathbb{K}$ derart, dass

$$n < c_1 < c_0.$$

Setze nun $c_0 = e$. Dann ist die Aussage wahr wegen Satz 1.4 (7) und (5).

(IV) Behauptung (m) gelte für ein $m \in \mathbb{N}$:

$$\exists c_m, c_{m-1} \in \mathbb{K} : n < c_m < c_{m-1}.$$

(IS) $m \mapsto m + 1$:

Wenn Behauptung (m) gilt, dann existiert wegen Satz 1.4 (7) ein $c_{m+1} := c \in \mathbb{K}$ derart, dass

$$n < c < c_m$$

gilt. Es gilt also:

$$\exists c_{m+1}, c_m \in \mathbb{K} : n < c_{m+1} < c_m,$$

was der Behauptung $(m + 1)$ entspricht. Damit gilt Behauptung (m) für alle $m \in \mathbb{N}$.

(b) Wir verwenden hier einen Widerspruchsbeweis:

Ist $a \leq b$ falsch, so gilt $a > b$ wegen (O1). Dann existiert ein $c \in \mathbb{K}$ derart, dass

$$b < c < a$$

gilt. Definiere nun $\varepsilon := c - b > n$. Es folgt dann

$$b + \varepsilon = b + c - b = c < a,$$

im Widerspruch zur Annahme. Also muss $a \leq b$ gelten.

□

Definition 1.6 (Intervalle). Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a < b$. Dann setzen wir:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x \leq b\}$ („abgeschlossenes Intervall“)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}$ („offenes Intervall“)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x < b\}$ („halboffenes Intervall“)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leq b\}$ („halboffenes Intervall“)
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{K} \mid x \leq b\}$

- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{K} \mid x < b\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{K} \mid a < x\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{K}$

Bei der Betrachtung von Intervallen bzw. Teilmengen von geordneten Körpern kann man sich fragen, ob es in solchen Teilmengen so etwas wie ein „größtes“ und/oder „kleinstes“ Element gibt:

Definition 1.7 (Minimum und Maximum). Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $A \subset \mathbb{K}$ und $m, M \in A$. Dann heißt:

- m *kleinstes Element* oder *Minimum* von A , falls:

$$m \leq a \quad \forall a \in A.$$

In diesem Fall setzen wir $\min A := m$.

- M *größtes Element* oder *Maximum* von A , falls:

$$a \leq M \quad \forall a \in A.$$

In diesem Fall setzen wir: $\max A := M$.

Beispiel 1.8. Für $A := [n, e) \subset \mathbb{K}$ gilt:

$$\min A = n.$$

Dagegen existiert kein Maximum: Zunächst ist e nicht $\max A$, da $e \notin A$. Wäre weiter ein $a \in A$ das Maximum von A , so gilt nach Definition $a < e$. Nach Satz 1.4 (7) existiert dann ein $c \in \mathbb{K}$ mit

$$a < c < e.$$

Damit ist $c \in A$ und a nicht das größte Element in A , was ein Widerspruch ist.

Satz 1.9. Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{K}$ eine endliche Teilmenge. Dann besitzt A ein kleinstes und größtes Element.

Beweis. Beweis über vollständige Induktion nach Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ von A :

(IA) $n = 1$:

In diesem Fall gilt $A = \{x_1\}$ und damit $x_1 = \min A = \max A$.

(IV) Die Aussage sei nun wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) $n \mapsto n + 1$:

Sei A eine $(n + 1)$ -elementige Teilmenge von $\mathbb{K}$, also

$$A = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \subset \mathbb{K}.$$

Setze nun $B = \{x_1, \dots, x_n\}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $m = x_j \in B$ derart, dass

$$m \leq x_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Vergleiche nun dieses m mit x_{n+1} : Ist $m \leq x_{n+1}$, so ist $\min A = m$. Ist $m \geq x_{n+1}$, so ist $\min A = x_{n+1}$.

Damit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Satz ist bewiesen. $\square$

Satz 1.10 (Wohlordnungssatz). *Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer (in Symbolen $A \neq \emptyset$). Dann besitzt A ein Minimum.*

Beweis. Wegen $A \neq \emptyset$ existiert ein Element $a \in A$. Setze nun $B := A \cap \{1, \dots, a\}$. B ist insbesondere eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} = \mathbb{K}$.

Satz 1.10 besagt nun, dass ein Minimum $m = \min B$ existiert; insbesondere ist $m \in A$. Zeige nun die folgende Behauptung und der Satz ist bewiesen:

Behauptung. Es gilt $m = \min A$.

Beweis der Behauptung. Sei $b \in A$ beliebig. Ist $b \leq a$, so ist $b \in B$ und damit $b \geq \min B = m$. Falls $b > a$ ist, so gilt wegen $m \leq a$ und der Transitivität der Ordnungsrelation $b \geq m$ und damit die Behauptung. $\square$

Definition 1.11 (Betrag). Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

der (Absolut-)Betrag von x und

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

das Vorzeichen oder Signum von x .

In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschreibt $|x|$ den ‚Abstand‘ x zu Null und $|x - y|$ den zwischen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

LINK: TEIL 1 DER 3. VORLESUNG VOM 18.10.2021

Satz 1.12 (Eigenschaften des Betrags). *Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $a, x, y, r \in \mathbb{K}$ mit $r > 0$. Dann gelten:*

(1) *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt*

$$|x| \geq 0$$

und

$$|x| = 0 \iff x = 0.$$

(2) *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt*

$$|-x| = |x|$$

und

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

(3) *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt*

$$|xy| = |x||y|$$

und

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{falls } y \neq 0.$$

(4) *Dreiecksungleichung:*
Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(5) *Umgekehrte Dreiecksungleichung:*
Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(6) *Es gilt*

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r.$$

(7) *Es gilt*

$$x \leq a \leq y \implies |a| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

Beweis. (1) - (3) und (5) - (7): Übung! (Tipp: Fallunterscheidung)

(4) Aus (2) ist bekannt:

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{und} \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Betrachte nun die folgende Fallunterscheidung:

- $x > n$ & $y < n$:
Dann gilt

$$-|x| \leq x = |x| \quad \text{und} \quad -|y| = y \leq |y|.$$

Addition liefert dann:

$$\underbrace{-|x| - |y|}_{=-(|x|+|y|)} \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

also $|x + y| \leq |x| + |y|$, da beide Vorzeichen abgedeckt sind.

- $y > n$ & $y < n$:
Beweis erfolgt analog: Nur die Rollen von x und y sind vertauscht.
- $x \geq n$ & $y \geq n$:
Dann gilt

$$x + y \geq n \quad \Rightarrow \quad |x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

- $x \leq n$ & $y \leq n$:
Dann gilt

$$x + y \leq n \quad \Rightarrow \quad |x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|.$$

Insgesamt gilt also $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$.

□

Beispiel 1.13. Es ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < |x - 3|\}$ zu beschreiben. Man betrachte hierfür die folgende Fallunterscheidung:

- $x < 2$:
Insbesondere gilt dann $x < 3$ und damit

$$|x - 2| = 2 - x \quad \text{und} \quad |x - 3| = 3 - x.$$

In diesem Fall ist die Bedingung $|x - 2| < |x - 3|$ immer erfüllt, es gilt also $(-\infty, 2) \subset M$.

- $2 \leq x \leq 3$:
Es folgt $|x - 2| = x - 2$ und $|x - 3| = 3 - x$ und man erhält

$$x - 2 < 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{5}{2},$$

also $[2, 3] \cap (-\infty, \frac{5}{2}) = [2, \frac{5}{2}) \subset M$.

- $x > 3$:
Es folgt $|x - 2| = x - 2$ und $|x - 3| = x - 3$ und man erhält

$$x - 2 < x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > 3,$$

was ein Widerspruch ist, es gilt also $(3, \infty) \cap M = \emptyset$.

Insgesamt gilt dann $M = (-\infty, 2) \cup [2, \frac{5}{2}) \cup \emptyset = (-\infty, \frac{5}{2})$.

2 Vollständige Induktion und Summenformeln

Lemma 2.1. Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $m \in \mathbb{N}$. Für $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ gilt dann:

$$\left| \sum_{j=1}^m a_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_j| \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ein direkter bzw. intuitiver Beweis ist gegeben durch:

Beweis. Nach Satz 1.12 (2) gilt zunächst

$$-|a_j| \leq a_j \leq |a_j|, \quad j = 1, \dots, m. \quad (\star)$$

Wendet man nun Satz 1.4 (3) $(m - 1)$ -mal auf $(\star)$ an, so erhält man:

$$\underbrace{-|a_1| - \dots - |a_m|}_{= -\sum_{j=1}^m |a_j|} \leq a_1 + \dots + a_m \leq \underbrace{|a_1| + \dots + |a_m|}_{=\sum_{j=1}^m |a_j|}.$$

Satz 1.12 (7) liefert dann:

$$\left| \sum_{j=1}^m a_j \right| = |a_1 + \dots + a_m| \stackrel{1.12}{\underset{(7)}{\leq}} \max \left\{ \left| -\sum_{j=1}^m |a_j| \right|, \left| \sum_{j=1}^m |a_j| \right| \right\} = \sum_{j=1}^m |a_j|,$$

was zu zeigen war. □

Alternativ kann man die Aussage auch mit vollständiger Induktion beweisen. Dazu ist dieses Prinzip jedoch zunächst einzuführen:

Induktionsprinzip 2.2. Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $1 \in M$
- (b) $m \in M \Rightarrow m + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Alternativ kann man auch auf die Eigenschaft (b) verzichten und ersetzen durch:

- (b') $\{1, 2, \dots, m\} \subset M \Rightarrow m + 1 \in M$.

Für die Anwendung von Induktionsbeweisen ist jedoch eine praktischere Formulierung angebracht:

Induktionsprinzip 2.3. Es sei $m_0 \in \mathbb{Z}$ und für $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq m_0$ eine Aussage $A(m)$ formuliert. Es gelte:

- (a) $A(m_0)$ ist wahr.
- (b) $\forall m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq m_0$ gilt: $A(m) \Rightarrow A(m+1)$.

Dann folgt, dass sämtliche Aussagen $A(m_0), A(m_0+1), A(m_0+2), \dots$ wahr sind.

Beweise nun Lemma 2.1 durch vollständige Induktion:

Alternativer Beweis von Lemma 2.1. Im Folgenden bezeichnet „(IA)“ den sogenannten *Induktionsanfang*, „(IV)“ die *Induktionsvoraussetzung* und „(IS)“ den *Induktionsschluss*.

(IA) $m = 1$:

Offensichtlich ist die Aussage

$$\left| \sum_{j=1}^1 a_j \right| = |a_1| \leq |a_1| = \sum_{j=1}^1 |a_j|$$

wahr.

(IV) Es gelte

$$\left| \sum_{j=1}^m a_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_j| \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

(IS) $m \mapsto m+1$:

Es gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{m+1} a_j \right| = \left| \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) + a_{m+1} \right| \stackrel{\substack{1.12 \\ (4)}}{\leq} \left| \sum_{j=1}^m a_j \right| + |a_{m+1}| \stackrel{(IV)}{\leq} \sum_{j=1}^m |a_j| + |a_{m+1}| = \sum_{j=1}^{m+1} |a_j|.$$

Insgesamt gilt also

$$\left| \sum_{j=1}^m a_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_j|$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, was zu zeigen war. □

In diesem Abschnitt wollen wir einige Summen „ausrechnen“ bzw. vereinfachen.

Beispiel 2.4. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Gibt es eine geschlossene Formel für

$$\sum_{j=1}^m j = 1 + 2 + \dots + (m-1) + m?$$

LINK: [TEIL 2 DER 3. VORLESUNG VOM 18.10.2021](#)

Man ‚verkompliziere‘ dazu zunächst den Ausdruck: Es gilt

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{j=1}^m j &= \quad \quad \quad \textcolor{red}{1} + \quad \quad \quad \textcolor{orange}{2} + \quad \quad \quad \textcolor{green}{3} + \dots + \quad \quad \quad \textcolor{blue}{m} \\ &\quad + \textcolor{red}{m} + \textcolor{orange}{(m-1)} + \textcolor{green}{(m-2)} + \dots + \quad \quad \quad 1 \\ &= \underbrace{\textcolor{red}{(m+1)} + \textcolor{orange}{(m+1)} + \textcolor{green}{(m+1)} + \dots + \textcolor{blue}{(m+1)}}_{m\text{-mal}} \\ &= m \cdot (m+1), \end{aligned}$$

also

$$\sum_{j=1}^m j = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Alternativ kann die Aussage auch mit vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

Man betrachte nun die analoge Frage bezüglich der multiplikativen Verknüpfung: Gibt es eine geschlossene Formel für

$$\prod_{j=1}^m j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m?$$

Tatsächlich gibt es hier keine geschlossene Formel; die Größe ist aber so wichtig, dass sie hier einen Namen erhält: Man nennt diesen Ausdruck *Fakultät von m* (geschrieben: $m!$) und definiert ihn durch

$$m! := \prod_{j=1}^m j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m.$$

Ähnlich zum Induktionsbeweis gibt es auch rekursive bzw. induktive Definitionen:

Definition 2.5. Wir setzen $0! := 1$, $1! := 1$, und für $m \in \mathbb{N}$:

$$(m+1)! = (m+1) \cdot m!.$$

Wie oben erwähnt, heißt $m!$ *Fakultät von m*.

Man betrachte nun die Summen mit multiplikativen Termen:

Lemma 2.6. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^m j^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

Beweis. Mit Induktion über $m \in \mathbb{N}$:

(IA) $m = 1$:
Es gilt

$$\sum_{j=1}^1 j^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1),$$

die Aussage ist also für $m = 1$ erfüllt.

(IV) Es gelte

$$\sum_{j=1}^m j^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

(IS) $m \mapsto m+1$:
Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} j^2 &= \left(\sum_{j=1}^m j^2 \right) + (m+1)^2 \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)] \\ &= \frac{1}{6}(m+1)\underbrace{[2m^2 + 7m + 6]}_{=(m+2)(2m+3)} \\ &= \frac{1}{6}(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sum_{j=1}^m j^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, was zu zeigen war. □

Lemma 2.7. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $q \in \mathbb{K}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt dann:

$$(e - q) \sum_{j=0}^m q^j = (e - q) (e + q + q^2 + \dots + q^m) = e - q^{m+1}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (e - q) \sum_{j=0}^m q^j &\stackrel{(\text{K11})}{=} \sum_{j=0}^m \underbrace{(eq^j)}_{=q^j} - \sum_{j=0}^m \underbrace{(q \cdot q^j)}_{=q^{j+1}} \\
 &\stackrel{[\text{Indexverschiebung}]}{=} \sum_{j=0}^m q^j - \sum_{j=1}^{m+1} q^j \\
 &= e + \quad q + q^2 + \dots + q^m \\
 &\quad - \quad q - q^2 - \dots - q^m - q^{m+1} \\
 &\stackrel{[\text{Teleskopsumme}]}{=} e - q^{m+1}.
 \end{aligned}$$

□

Korollar 2.8. Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gelten:

(a) $\sum_{j=0}^m q^j = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$

(b) Ist sogar $q \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$, so gelten $1 - q > 0$, $1 - q^{m+1} < 1$ und somit

$$\frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \leq \frac{1}{1 - q}$$

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, gilt:

$$\sum_{j=0}^m x^{m-j} y^j = \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y}.$$

Beweis von (c). Betrachte dazu die folgende Fallunterscheidung:

- $x = 0$:

In diesem Fall gilt insbesondere $y \neq 0$ und damit

$$\sum_{j=0}^m 0^{m-j} \cdot y^j = \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} 0^{m-j} \cdot y^j}_{=0} + \underbrace{0^0}_{=1} \cdot y^m = y^m = \frac{y^{m+1}}{y} = \frac{0^{m+1} - y^{m+1}}{0 - y}.$$

- $x \neq 0$:

Setzt man nun $q = \frac{y}{x}$ in Lemma 2.7 ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{y}{x}\right) \sum_{j=0}^m \left(\frac{y}{x}\right)^j &\stackrel{2.7}{=} 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{m+1} \\
 \Leftrightarrow x \cdot x^m \cdot \left(1 - \frac{y}{x}\right) \sum_{j=0}^m \left(\frac{y}{x}\right)^j &= x \cdot x^m \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{m+1}\right) \\
 \Leftrightarrow (x - y) \sum_{j=0}^m x^{m-j} \cdot y^j &= x^{m+1} - y^{m+1}
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Definition 2.9. Es sei A eine endliche Menge. Eine bijektive Abbildung $\pi: A \rightarrow A$ heißt *Permutation von A* .

Weiter bezeichnet man mit $|A|$ die *Mächtigkeit* – d.h. die Anzahl der Elemente – von A .

Satz 2.10. Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $N!$ mögliche Anordnungen (d.h. unterschiedliche Permutationen) von Elementen der Menge A .

Beweis. Beweis mit Induktion über $N \in \mathbb{N}$:

(IA) $N = 1$:

Ist $|A| = 1$, so gibt es genau eine mögliche Anordnung von Elementen, insbesondere gilt dann $1! = 1$.

(IV) Für ein $N \in \mathbb{N}$ gebe es $N!$ mögliche Anordnungen von Elementen der Menge A .

(IS) $N \mapsto N + 1$:

Ist $|A| = N + 1$ und $a \in A$, so ist $B := A \setminus \{a\}$ N -elementig, es gilt also $|B| = N$. Sei nun $a_1, a_2, \dots, a_N$ eine der (nach (IV)) genau $N!$ möglichen Anordnungen von B . Dann kann man a an genau $N + 1$ Stellen „dazwischenschreiben“:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_N \\ & a_1 & a & a_2 & a_3 & \cdots & a_N \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a & a_N \\ & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_N & a \end{array} \right\} N + 1 \text{ Kopien}$$

Damit besitzt A genau $(N + 1) \cdot N! = (N + 1)!$ unterschiedliche mögliche Anordnungen. □

Beispiel 2.11. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Den meisten ist die Identität

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

und einigen auch

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

bekannt.

Was ist das Analogon für die allgemeine Potenz $(x + y)^m$, $m \in \mathbb{N}_0$? Lege dazu zunächst Folgendes fest:

Definition 2.12. Für $m, l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \leq m$ ist der *Binomialkoeffizient* definiert als

$$\binom{m}{l} := \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!} \stackrel{\text{falls } l \neq 0}{=} \frac{m(m-1) \dots (m-l+1)}{l!}$$

und wird „ m über l “ ausgesprochen.

Ergänzend setzt man noch $\binom{m}{l} = 0$, falls $l > m$ oder falls l eine negative ganze Zahl ist.

Auch $\binom{m}{l}$ lässt sich kombinatorisch interpretieren:

Satz 2.13. Es seien $m, l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq m$. Dann gibt es genau $\binom{m}{l}$ Möglichkeiten, aus m Objekten l Stück ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.

┌ Wir zählen unterschiedliche Teilmengen. Die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Teilmenge spielt dabei keine Rolle.

Wie viele unterschiedliche l -elementige Teilmengen kann man dann aus einer m -elementigen Obermenge auswählen?

└

Beispiel. Die Anzahl der Ergebnisse im Lottospiel „6 aus 49“ ist gegeben durch

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816.$$

LINK: [TEIL 1 DER 4. VORLESUNG VOM 21.10.2021](#)

Beweis von Satz 2.13. In der Tat zählen wir zunächst die möglichen Ergebnisse mit der Unterscheidung von Reihenfolgen: Dazu sei A eine Menge mit $|A| = m$. Wir ziehen nun l Elemente aus der m -elementigen Menge A . Beim ersten Zug haben wir m Möglichkeiten und es bleiben $m-1$ Elemente in der Menge übrig. Beim zweiten Zug hat man entsprechend $m-1$ Möglichkeiten, ein Element aus der Menge zu ziehen. Setzt man diesen Vorgang iterativ fort, so hat man beim l -ten Zug genau $m-l+1$ Möglichkeiten, ein Element aus der Menge zu ziehen.

Insgesamt hat man dann $m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-l+1)$ Möglichkeiten, l Elemente aus der Menge A zu ziehen. Bei unterschiedlichen Ziehreihenfolgen können wir jedoch trotzdem am Ende dieselben l Elemente erhalten.

Wir müssen dazu die unterschiedlichen Reihenfolgen miteinander identifizieren. Nach Satz 2.10 gibt es genau $l!$ Reihenfolgen für die l gezogenen Elemente. Daraus folgt:

$$|\{l\text{-elementige Teilmengen}\}| = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-l+1)}{l!} = \binom{m}{l}.$$

□

Es gelten die folgenden Spezialfälle:

$$\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}, \quad \binom{m}{1} = \frac{m}{1}, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

sowie

$$\binom{m}{l} = \binom{m}{m-l} \quad \text{für } l = 0, 1, \dots, n \text{ aus Symmetriegründen } (l \leftrightarrow (m-l)).$$

Hinzu kommt:

Lemma 2.14 (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten). *Für $m, l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq m$ gilt:*

$$\binom{m+1}{l} = \binom{m}{l} + \binom{m}{l-1}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{m}{l-1} + \binom{m}{l} &= \frac{m!}{(l-1)! \cdot (m-l+1)!} + \frac{m!}{l!(m-l)!} \\ &= m! \cdot \frac{l + (m-l+1)}{l! \cdot (m-l+1)!} \\ &= \frac{(m+1) \cdot m!}{l! \cdot (m-l+1)!} \\ &= \frac{(m+1)!}{l! \cdot ((m+1)-l)!} \\ &= \binom{m+1}{l}. \end{aligned}$$

□

Mit der Aussage des Lemmas lassen sich die Binomialkoeffizienten nur unter der Verwen-

(IS) $m \mapsto m + 1$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & (x + y)^{m+1} \\
 = & (x + y) \cdot (x + y)^m \\
 \stackrel{\text{(IV)}}{=} & (x + y) \cdot \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} y^j \\
 \stackrel{\text{(K11)}}{=} & \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j+1} y^j + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} y^{j+1} \\
 \stackrel{\text{Index Shift}}{=} & \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j+1} y^j + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} x^{m-j+1} y^j \\
 = & \binom{m}{0} x^{m+1} y^0 + \left(\sum_{j=1}^m \left(\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} \right) x^{m-j+1} y^j \right) + \binom{m}{m} x^0 y^{m+1} \\
 \stackrel{2.14}{=} & \binom{m+1}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{j=1}^m \binom{m+1}{j} x^{(m+1)-j} y^j \right) \\
 & + \binom{m+1}{m+1} x^{(m+1)-(m+1)} y^{m+1} \\
 = & \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} x^{(m+1)-j} y^j
 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$(x + y)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \cdot x^{m-j} \cdot y^j$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$. □

Man betrachte nun die folgenden Spezialfälle unter der Verwendung des binomischen Lehrsatzes:

(i) Setzt man $y = e$, so gilt nach Satz 2.15:

$$(x + e)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j.$$

(ii) Für $x = y = 1 \in \mathbb{R}$ gilt entsprechend:

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \cdot 1 \cdot 1 = (1 + 1)^m = 2^m.$$

(iii) Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < x$ und $q := \frac{y}{x}$ klein genug ($q \ll 1$). Dann gilt näherungsweise:

$$(x + y)^m = x^m \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right)^m \sim x^m (1 + mq),$$

wobei wir alle Terme mit $q^2, q^3, q^4, \dots, q^m$ weglassen, da diese „noch kleiner als q “ sind.

Tatsächlich ist ein Teil der Aussage in (iii) exakt:

Lemma 2.16 (Bernoulli-Ungleichung). *Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$. Für $x \geq -e$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt dann:*

$$(e + x)^m \geq e + mx.$$

Ist zusätzlich $x \neq 0$, so ist die Ungleichung für $m > 1$ strikt, es gilt also

$$(e + x)^m > e + mx \quad \forall m > 1.$$

Beweis. Beweis mit Induktion über $m \in \mathbb{N}$:

(IA) $m = 1$:

Offensichtlich gilt dann

$$(e + x)^1 = e + 1 \cdot x.$$

(IV) Es gelte

$$(e + x)^m \geq e + mx \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

(IS) $m \mapsto m + 1$:

Wegen $x \geq -e$ gilt zunächst

$$e + x \geq 0.$$

Die Multiplikation der Induktionsvoraussetzung (IV) mit $e + x$ liefert dann:

$$\begin{aligned} (e + x)^{m+1} &\stackrel{\text{(IV)}}{\geq} (e + mx)(e + x) \\ &= e + x + mx + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \\ &\geq e + x + mx \\ &= e + (m + 1)x. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$(e + x)^m \geq e + mx$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Der Beweis für die strikte Ungleichung verläuft analog mit entsprechenden Anpassungen des Induktionsvorgangs. $\square$

LINK: TEIL 2 DER 4. VORLESUNG VOM 21.10.2021

3 Vollständigkeit von Körpern

Wir beginnen zunächst mit weiteren Begriffen zur Anordnung von Körpern:

Definition 3.1. Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $A \subset \mathbb{K}$ mit $A \neq \emptyset$ und $x, y \in \mathbb{K}$. Dann schreiben wir:

(i) x ist eine obere Schranke von A $\iff \forall a \in A : a \leq x$.
ist definiert als

(ii) y ist eine untere Schranke von A $\iff \forall a \in A : a \geq y$.

(iii) A ist von oben beschränkt $\iff$ Es existiert eine obere Schranke von A .

(iv) A ist von unten beschränkt $\iff$ Es existiert eine untere Schranke von A .

(v) A ist beschränkt $\iff A$ ist von oben und von unten beschränkt.

Ist A von oben bzw. unten beschränkt, so ist

$$O := \{x \in \mathbb{K} \mid \forall a \in A : a \leq x\} \neq \emptyset \quad \text{bzw.} \quad U := \{y \in \mathbb{K} \mid \forall a \in A : a \leq y\} \neq \emptyset.$$

(vi) Besitzt $\begin{smallmatrix} O \\ U \end{smallmatrix}$ ein $\begin{smallmatrix} \text{kleinstes} \\ \text{größtes} \end{smallmatrix}$ Element $\begin{smallmatrix} c = \min O \\ d = \max U \end{smallmatrix} \in \mathbb{K}$, so heißt $\begin{smallmatrix} c \text{ Supremum} \\ d \text{ Infimum} \end{smallmatrix}$ oder $\begin{smallmatrix} \text{kleinste obere} \\ \text{größte untere} \end{smallmatrix}$ Schranke von A . Man schreibt dann:

$$c = \sup A \quad \text{bzw.} \quad d = \inf A.$$

Man betrachte nun die folgenden Umformulierungen:

A ist beschränkt

$$\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : \quad y \leq a \leq x$$

$$\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : \quad |a| \leq \max \{|x|, |y|\}$$

$$\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : \quad |a| \leq s$$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : \quad -|s| \leq -|a| \leq a \leq |a| \leq |s|$$

$$\Rightarrow A \text{ ist beschränkt.}$$

Man erkennt damit, dass alle Umformulierungen äquivalent sind – man kann also die Implikationspfeile ($\Rightarrow$) durch Äquivalenzpfeile ($\Leftrightarrow$) ersetzen.

Insbesondere gilt also:

$$A \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow \{|a| : a \in A\} \text{ ist von oben beschränkt.}$$

Definition / Notation 3.2. Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ mit $A \neq \emptyset$. Man schreibt dann:

$$\begin{array}{l} \sup A = \infty \\ \inf A = -\infty \end{array} \Leftrightarrow \text{Es existiert keine } \begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \text{ Schranke } x \in \mathbb{K} \text{ von } A.$$

Man betrachte nun die folgenden Eigenschaften von nichtleeren Teilmengen $A \subset \mathbb{K}$:

Satz 3.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $A \subset \mathbb{K}$ mit $A \neq \emptyset$ und von oben beschränkt, sowie $M, S \in \mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) A besitzt ein Maximum $M = \max A \Rightarrow M \in A$ und $\sup A = M$.
- (2) S ist eine obere Schranke von A und $S \in A \Rightarrow S = \sup A = \max A$.
- (3) Es sind äquivalent:
 - (i) $S = \sup A$
 - (ii) S ist eine obere Schranke von A und für jede weitere obere Schranke S' gilt: $S \leq S'$.
 - (iii) Für alle $a \in A$ gilt $a \leq S$ und

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : a_\varepsilon > S - \varepsilon.$$

Beweis. Übung!

Zusatz: Formuliere und beweise Analoga zu Satz 3.3 für das Infimum von A .

Beispiel 3.4. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt:

$A \subset \mathbb{R}$	$\sup A$	$\inf A$
$[a, b]$	$\max A = b \in A$	$\min A = a \in A$
(a, b)	$b \notin A$	$a \notin A$
$[a, b)$	$b \notin A$	$\min A = a \in A$

Definition 3.5 (Supremumsvollständigkeit). Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *vollständig*, falls jede von oben beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{K}$ ein Supremum (in $\mathbb{K}$) besitzt.

Satz 3.6 (Schnittaxiom). *Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Dann ist $\mathbb{K}$ genau dann vollständig, wenn gilt:*

Für $A, B \subset \mathbb{K}$, $A \neq \emptyset \neq B$, mit

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B : \quad a \leq b,$$

existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B : \quad a \leq c \leq b.$$

Beweis. Übung!

Lemma 3.7. *In einem vollständig angeordneten Körper $\mathbb{K}$ besitzt jedes von unten beschränkte $A \subset \mathbb{K}$ mit $A \neq \emptyset$ ein Infimum.*

Beweis. Definiere B durch

$$B := -A := \{x \in \mathbb{K} \mid -x \in A\}.$$

Nach Voraussetzung ist dann $B \neq \emptyset$ und von oben beschränkt. Wegen Definition 3.5 existiert somit ein $s \in \mathbb{K}$ derart, dass

$$s = \sup B.$$

Daraus folgt, dass $-s = \inf A$, was zu zeigen war. □

Satz 3.8. *(Bis auf Isomorphieäquivalenz) existiert genau ein vollständig angeordneter Körper. Diesen nennen wir $\mathbb{R}$ bzw. Körper der reellen Zahlen.*

(Ohne Beweis)

┌

Dabei heißen zwei angeordnete Körper $\mathbb{K}$ und $\tilde{\mathbb{K}}$ (isomorphie-)äquivalent, falls eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ existiert mit

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \quad x > y \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y).$$

φ heißt dann *Isomorphismus*. └

Bemerkung 3.9 (Bezug zur intuitiven Vorstellung von $\mathbb{R}$). Für jeden Körper $\mathbb{K}$ können wir eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi(m) = m \cdot e$$

definieren.

Behauptung. Ist $\mathbb{K}$ angeordnet, so ist φ injektiv.

Beweis der Behauptung. Seien dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit (kurz: o.B.d.A.) $m, l \in \mathbb{N}$ mit $m > l$, damit insbesondere $m \neq l$. Wegen $e > n$ gilt $k \cdot e > n$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und damit:

$$\underbrace{(m-l)}_{\substack{m>l \\ \in \mathbb{N}}} \cdot e > n \quad \Leftrightarrow \quad me > le \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(m) > \varphi(l),$$

insbesondere also $\varphi(m) \neq \varphi(l)$, was zu zeigen war.

Wie sieht es denn mit einer Fortsetzung $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}$ auf den rationalen Zahlen aus? Für $m \in \mathbb{N}$ setze $f = f_m := (me)^{-1}$.

Behauptung. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$m \cdot f_m = e.$$

Beweis der Behauptung. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$m \cdot f_m = m \cdot (ef_m) \stackrel{(\text{K7})}{=} (me) \cdot f_m = e.$$

Setze also $\frac{1}{m} \cdot e = f_m$.

┌
Übung: Zeigen Sie:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}: \quad p \cdot \left(\frac{1}{q} e \right) = \frac{1}{q} (pe).$$

└

Definiert man dann

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) := \frac{p}{q} e := p \left(\frac{1}{q} e \right),$$

so hat man eine Fortsetzung von φ auf alle rationalen Zahlen.

Setze nun für $a \in \mathbb{K}$: $\frac{p}{q} a := \left(\frac{p}{q} e \right) \cdot a$.

┌
Übung: Zeigen Sie, dass damit die Rechenregeln der „Skalarmultiplikation“ aus Abschnitt 1 auch für $\mathbb{Q}$ -Koeffizienten gelten.

└

LINK: TEIL 1 DER 5. VORLESUNG VOM 25.10.2021

Fazit. Jeder angeordnete Körper „enthält eine Kopie“ von $\mathbb{N}$ (sogar von $\mathbb{Z}$ und von $\mathbb{Q}$). Damit ist $\mathbb{Q}$ der kleinste angeordnete Körper, der $\mathbb{N}$ enthält, und insbesondere ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist – die Menge $\mathbb{Q}$ ist also ein Körper mit den von $\mathbb{R}$ geerbten Verknüpfungen „+“ und „·“.

Definition 3.10 (Archimedisches Axiom). Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *archimedisches*, wenn zu $a, b \in \mathbb{K}$ mit $n < a < b$ immer ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$b < m \cdot a.$$

Lemma 3.11. In einem archimedischen Körper $\mathbb{K}$ gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{K}$ mit $\varepsilon > n$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{m} \cdot e < \varepsilon$$

Beweis. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{K}$ mit $\varepsilon > n$. Man betrachte dann die folgende Fallunterscheidung:

- $\varepsilon < e$:
Dann existiert nach Definition 3.10 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $e < m \cdot \varepsilon$. Multiplikation mit $\frac{1}{m} > 0$ auf beiden Seiten liefert dann

$$\frac{1}{m} \cdot e < \frac{1}{m} \cdot m \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

- $\varepsilon \geq e$:
Übung!

□

Satz 3.12. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen besitzt

- (1) keine obere Schranke in $\mathbb{Q}$,
- (2) keine obere Schranke in $\mathbb{R}$.

Beweis.

- (1) Angenommen es existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \frac{p}{q}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wählt man dann $m = p + 1$, gilt dann

$$p + 1 \leq \frac{p}{q} \stackrel{q \geq 1}{\leq} \frac{p}{1} = p,$$

was ein Widerspruch ist.

- (2) Angenommen $\mathbb{N}$ besitzt eine obere Schranke $x \in \mathbb{R}$. Nach Definition 3.5 existiert dann ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s = \sup \mathbb{N}$, es gilt also nach Satz 3.3 (3):

$$\forall m \in \mathbb{N} : m \leq s \quad \text{und} \quad \exists m_1 \in \mathbb{N} : m_1 > s - 1.$$

Damit gilt dann aber

$$s < m_1 + 1 \in \mathbb{N},$$

was ein Widerspruch ist.

□

Satz 3.13. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind archimedisch.

Beweis. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Da $\mathbb{N}$ nach Satz 3.12 (2) keine obere Schranke in $\mathbb{R}$ besitzt, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$m > \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad m \cdot a > b.$$

$\mathbb{R}$ ist also archimedisch.

Der Beweis für $\mathbb{Q}$ verläuft unter der Verwendung von Satz 3.12 (1) komplett analog. □

Übung / Beispiel 3.14. Es sei A gegeben durch

$$A := \left\{ \frac{m}{m+1} \mid m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

$$\inf A = \frac{1}{2} = \min A \quad \text{und} \quad \sup A = 1 \notin A.$$

Lemma 3.15. Es existiert kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.

Beweis. Übung!

Lemma 3.15 sagt also aus, dass die Quadratwurzel von 2 in $\mathbb{Q}$ nicht existiert. Dagegen existieren m -te Wurzeln von Zahlen in $\mathbb{R}$ aufgrund der Vollständigkeit der Menge:

Satz 3.16. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x > 0 \quad \text{und} \quad x^m = a.$$

Diese Zahl x bezeichnen wir als m -te Wurzel von a und schreiben

$$x = \sqrt[m]{a} \quad \text{oder} \quad x = a^{\frac{1}{m}}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft in zwei Schritten: Wir zeigen zunächst, dass es *höchstens* eine Lösung für die Gleichung, und zeigen anschließend, dass es *mindestens* eine Lösung gibt. Damit zeigt man, dass es *genau eine* Lösung gibt, und damit die Behauptung.

- ① Es existiert höchstens eine Lösung, denn:
Nehme o.B.d.A. an, dass $x, y \in \mathbb{R}$ existieren mit $0 < y < x$ und $x^m = a = y^m$ für $m \in \mathbb{N}$. Vollständige Induktion über m liefert dann

$$y^m < x^m,$$

was ein Widerspruch ist.

- ② Es existiert mindestens eine Lösung, denn:
Definiere dazu A durch

$$A := \left\{ b \in \mathbb{R} \mid b > 0, b^m < a, a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

und $t := \frac{a}{a+1} < 1$. Es gilt $t > 0$ und $t^m \leq t < a$ für alle $m \in \mathbb{N}$; insbesondere ist $t \in A$. Für $y \geq 1 + a > 1$ ist dann $y^m > y > a > b^m$ für alle $b \in A$. Daraus folgt $y \notin A$ und

$$\forall b \in A : y \geq b,$$

da man im Fall $y < b$ auch $y^m < b^m < a$ gelten würde, was ein Widerspruch ist. Damit ist $1 + a$ eine obere Schranke von A , so dass $x := \sup A$ endlich ist.

Behauptung. Es gilt

$$x^m = a$$

Zeigt man die Behauptung, so ist der Satz bewiesen, weil man dann die gesuchte eindeutige Lösung der Gleichung gefunden hat.

Beweis der Behauptung. (Durch Widerspruch):

1. Angenommen es gelte $x^m < a$. Dann gilt insbesondere $a - x^m > 0$, es existiert also ein $h \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < h < \min \left\{ 1, \frac{a - x^m}{m(1+x)^{m-1}} \right\}.$$

Für allgemeine $0 < s < t$ liefert dann die Summenformel in Korollar 2.8:

$$t^m - s^m \stackrel{\substack{2.8 \\ (c)}}{=} (t-s) \sum_{j=0}^{m-1} t^j s^{m-j-1} \stackrel{s < t}{<} (t-s) \cdot m \cdot t^{m-1}. \quad (*)$$

Einsetzen von $s := x < x + h =: t$ in $(*)$ liefert dann:

$$\begin{aligned} (x+h)^m - x^m &< (x+h-x) \cdot m \cdot (x+h)^{m-1} \\ &= h \cdot m(x+h)^{m-1} \\ &< h \cdot m(1+x)^{m-1} \\ &< a - x^m, \end{aligned}$$

also $(x+h)^m < a$ und $x+h \in A$. Damit gilt jedoch $x \neq \sup A$, was ein Widerspruch ist.

2. Angenommen es gelte $x^m > a$, also $x^m - a > 0$. Setze dann

$$h := \frac{x^m - a}{m \cdot x^{m-1}} > 0.$$

Es gilt dann

$$h < \frac{x^m}{m \cdot x^{m-1}} = \frac{x}{m} \leq x.$$

Wegen $x = \sup A$ existiert ein $b \in A$ mit $b > x - h > 0$. Einsetzen von $s := x - h < x =: t$ in (*) liefert dann:

$$x^m - (x - h)^m < h \cdot m \cdot x^{m-1} = x^m - a,$$

also $a < (x - h)^m < b^m$. Damit gilt jedoch $b \notin A$, was ein Widerspruch ist.

Also muss $x^m = a$ gelten.

□

LINK: TEIL 2 DER 5. VORLESUNG VOM 25.10.2021

Korollar 3.17. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, es existiert also eine Menge $A \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, die von oben beschränkt ist, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Beweis. Übung!

Potenzregeln (Für rationale Exponenten). Sei $r := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Setze nun für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Ist $\frac{p}{q} = r = \frac{m}{n}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ eine alternative Darstellung von r , so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$p = m \cdot k \quad \text{und} \quad q = n \cdot k.$$

Behauptung. Es gilt

$$b := (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} =: c.$$

Die Definition ist also konsistent.

Beweis der Behauptung. Es gilt $b^n = a^m$. Nach Definition und Eindeutigkeit der Wurzel gilt ebenso:

$$c^q = a^p = a^{k \cdot m} = (a^m)^k = (b^n)^k = b^{n \cdot k} = b^q.$$

Da die q -te Wurzel eindeutig ist, gilt somit $c = b$, was zu zeigen war.

Nun ist eine weitere Konsistenz nachzurechnen:

Behauptung. Es gilt

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Beweis der Behauptung. Es gilt

$$\left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^m$$

und

$$\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m \cdot n} = \underbrace{\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m}_{=a} = a^m.$$

Da die m -te Wurzel eindeutig ist, gilt somit $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, was zu zeigen war.

Lemma 3.18. Für $r, s \in \mathbb{Q}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$ gelten:

- (1) $a^r a^s = a^{r+s}$,
- (2) $a^r b^r = (ab)^r$,
- (3) $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$,
- (4) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

Setze für $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad s = \frac{m}{q}$$

und betrachte die folgende Vorüberlegungen:

Behauptung.

$\alpha)$ Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$ gilt

$$(ab)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{q}}$$

$\beta)$ Speziell für $b = \frac{1}{a}$ gilt dann

$$1 = 1^{\frac{1}{q}} = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q}} \stackrel{\alpha)}{=} a^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q}},$$

also

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis der Behauptung. Es ist nur $\alpha)$ zu zeigen. Für $c := a^{\frac{1}{q}}$ und $d := b^{\frac{1}{q}}$ gilt nach Definition:

$$(cd)^q = c^q \cdot d^q = a \cdot b.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Wurzel folgt dann

$$(ab)^{\frac{1}{q}} = c \cdot d = a^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis von Lemma 3.18. Übung!

Notation. Für $m \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ setzen wir

$$\sqrt[m]{0} = 0 \quad \text{sowie} \quad 0^r = 0.$$

Definition 3.19. Für $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ definieren wir $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A(x_1, \dots, x_m) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j$$

und bezeichnen es als den *arithmetischen Mittelwert* von $x_1, \dots, x_m$.

Gilt zusätzlich $x_1, \dots, x_m \geq 0$, so definieren wir das *geometrische Mittel* $G: \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch:

$$G(x_1, \dots, x_m) := \sqrt[m]{x_1 \cdot \dots \cdot x_m} = \left(\prod_{j=1}^m x_j \right)^{\frac{1}{m}}$$

Es gelten:

(i) $A(\cdot)$ und $G(\cdot)$ sind *homogen*: Für $\lambda \geq 0$ gilt also

$$A(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_m) = \lambda \cdot A(x_1, \dots, x_m) = \lambda \cdot \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j$$

und

$$G(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_m) = \lambda \cdot G(x_1, \dots, x_m) = \lambda \cdot \left(\prod_{j=1}^m x_j \right)^{\frac{1}{m}}.$$

(ii) Es gilt

$$\min \{x_1, \dots, x_m\} \leq A(x_1, \dots, x_m) \leq \max \{x_1, \dots, x_m\}$$

und

$$\min \{x_1, \dots, x_m\} \leq G(x_1, \dots, x_m) \leq \max \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Satz 3.20 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel). Für $x_1, \dots, x_m \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist

$$G(x_1, \dots, x_m) \leq A(x_1, \dots, x_m), \quad (*)$$

wobei genau dann Gleichheit gilt, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_m$.

Beweis. Man nehme zunächst einige Vereinfachungen vor:

(1) Existiert ein $j \in \{1, \dots, m\}$ derart, dass $x_j = 0$, so folgt direkt $G(x_1, \dots, x_m) = 0$ und $(*)$ ist erfüllt. Man nehme also $x_1, \dots, x_m > 0$ an.

(2) Aufgrund der Homogenität von A und G können wir o.B.d.A annehmen, dass

$$A(x_1, \dots, x_m) = 1$$

gilt. (Ansonsten kann man $\tilde{x}_j := \frac{x_j}{A(x_1, \dots, x_m)}$ setzen.)

(3) Für $x_1 = \dots = x_m$ gilt:

$$G(x_1, \dots, x_m) = x_1 = A(x_1, \dots, x_m).$$

Damit ist nur noch die folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung. Für $x_1, \dots, x_m > 0$, $x_1 + \dots + x_m = m$ und $x_j \neq 1$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_m < 1.$$

Beweis der Behauptung. Mit Induktion über $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, also $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

(IA) $m = 2$:

Für $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $x_1 = 1 + \varepsilon$. Dann ist $x_2 = 2 - x_1 = 1 - \varepsilon$ und damit

$$x_1 \cdot x_2 = 1 - \varepsilon^2 < 1.$$

(IV) Für $x_1, \dots, x_m > 0$, $x_1 + \dots + x_m = m$ und $x_j \neq 1$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gelte:

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_m < 1 \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

(IS) $m \mapsto m + 1$:

Seien $x_0, x_1, \dots, x_m > 0$ nicht alle gleich und $x_0 + \dots + x_m = m + 1$. Dann ist für $i, j \in \{0, \dots, m+1\}, i \neq j$, mindestens ein x_i größer als 1 und mindestens ein x_j kleiner als 1.

Es sei also o.B.d.A

$$x_0 = 1 - \alpha, \quad x_1 = 1 + \beta > 1 \quad \text{für } \alpha, \beta \in (0, 1).$$

Setze nun $y := x_0 + x_1 - 1 = 1 - \alpha + \beta$ und man erhält

$$y + x_2 + \dots + x_m = m$$

und nach (IV) gilt dann

$$y \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m < 1.$$

Wegen $x_0 \cdot x_1 = 1 - \alpha + \beta - \alpha\beta < y$ folgt dann

$$\prod_{j=0}^m x_j < 1.$$

□

Frage: Warum haben wir die Induktion nicht mit $m = 1$ angefangen?

└

Beispiel 3.21. Für $a > 0$, $m \geq 2$ und $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ gilt

$$\sqrt[m]{a^j} \leq 1 + \frac{j}{m} (a - 1),$$

denn Satz 3.20 besagt:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{j}} = G\left(\underbrace{a, \dots, a}_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-j}\right) &\leq A\left(\underbrace{a, \dots, a}_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-j}\right) \\ &= \left[ja + (m-j)\right] \frac{1}{m} \\ &= 1 + (a-1)j \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $j = 1$

$$\sqrt[m]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{m}$$

und für $j = 2$ und $x_1 = x_2 = \sqrt{m}$

$$\sqrt[m]{m} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{2}{m}.$$

LINK: TEIL 1 DER 6. VORLESUNG VOM 28.10.2021

Wie liegt $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$? Mit dieser Frage beschäftigt sich der folgende Satz:

Satz 3.22. Zu $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$m \leq x < m + 1.$$

Dieses m bezeichnen wir mit der Gaußklammer und schreiben

$$m := \lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Beweis. Übung!

Korollar 3.23. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt:

- (a) $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$,
- (b) $(a, b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, falls $b - a > 1$,
- (c) $(a, b) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$, wobei $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Menge der irrationalen Zahlen bezeichnet.

Beweis. Übung!

┌

Jedes offene Intervall enthält also mindestens ein Element (tatsächlich sogar unendlich viele Elemente) von $\mathbb{Q}$ als auch von $\mathbb{I}$ – man sagt:

$\mathbb{Q}$ (und $\mathbb{I}$) liegt *dicht* in $\mathbb{R}$.

Aber: Es existiert eine Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, die surjektiv ist – es gilt zumindest $|\mathbb{R}| \geq |\mathbb{Q}|$. Jedoch existiert *keine* surjektive Abbildung $\Psi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ – tatsächlich gilt also $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$.

└

4 Die komplexen Zahlen

Am Ende des letzten Kapitels haben wir uns mit der Frage nach der Lösung der Gleichung

$$x^2 = 1$$

beschäftigt und sind so auf die irrationalen Zahlen gestoßen. In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit der Frage nach der Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1$$

beschäftigen, und werden uns so mit den komplexen Zahlen bekannt machen.

Definition 4.1. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ zwei Verknüpfungen $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\cdot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix} \quad (\text{Addition})$$

und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix} \quad (\text{Multiplikation})$$

für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Tatsächlich ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper und wird Körper der *komplexen Zahlen* genannt und mit dem Symbol $\mathbb{C}$ bezeichnet. Weiter ist die Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Körperhomomorphismus – $\mathbb{R}$ ist also ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Wir schreiben „ $\mathbb{C} \ni z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ “ oder auch

$$z = x + iy \in \mathbb{R} \times i\mathbb{R}, \quad (*)$$

wobei i dem Vektor $(0, 1)$ entspricht.

Definition 4.2. Die Zahl i wird *imaginäre Eins* genannt. Weiter bezeichnen für eine komplexe Zahl $z := x + iy \in \mathbb{C}$:

- $\operatorname{Re}(z) := x$ den *Realteil* von z ,
- $\operatorname{Im}(z) := y$ den *Imaginärteil* von z und
- $\bar{z} := x - iy = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ die zu z *komplex-konjugierte* Zahl.

Bemerkung 4.3. Für $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{C}$ gelten:

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad x = u \quad \text{und} \quad y = v.$$

Die Verknüpfungsregeln aus der Definition 4.1 werden in der Darstellung in $(*)$ folgendermaßen notiert:

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

$$z \cdot w = (xy - uv) + i(xv + uy).$$

Für $z \neq (0, 0) =: 0 \in \mathbb{C}$ gilt dann außerdem

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

┌ Test: Es gilt

$$\frac{1}{z} \cdot z = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \cdot (x + iy) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

└

Insbesondere gilt

$$i^2 = (0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) \stackrel{4.1}{=} (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Bezüglich Rechenregeln für die Konjugation ist Folgendes zu beachten:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w},$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad \text{falls } w \neq 0, \text{ und}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z.$$

┌ Insbesondere ist Φ definiert durch

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$$

ein Körperautomorphismus.

└

Weiter ist

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad i\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

und

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = x \in \mathbb{R}.$$

Soweit wissen wir, dass $\mathbb{C}$ ein Körper und $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist. Lässt sich dann die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erweitern?

Wäre dies der Fall, so müsste wegen $i \neq 0$ (0 ist dabei das additive neutrale Element) nach Satz 1.4 (5) $i^2 > 0$ folgen. Wir haben aber bereits gezeigt, dass

$$i^2 = -1 < 0$$

gilt. Die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ lässt sich also nicht auf $\mathbb{C}$ erweitern.

Die gute Nachricht ist jedoch, dass wir einen vernünftigen Betrag auf $\mathbb{C}$ definieren können! Da gibt es eine passende Erweiterung:

Definition 4.4 (Betrag auf $\mathbb{C}$). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

und nennen $|z|$ den *Betrag* von z .

Geometrisch interpretiert beschreibt $|z|$ den Abstand von z zu $0 \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 4.5 (Eigenschaften des Betrags in $\mathbb{C}$). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ gelten:

- $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z \cdot \bar{z}$,
- $|\bar{z}| = |z|$,
- $|\operatorname{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$,
- $|\operatorname{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$,
- $z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z}{w}$, falls $w \neq 0$,
- $|z| \geq 0$,
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \in \mathbb{C}$,
- $|zw| = |z||w|$,
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, falls $w \neq 0$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ und
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Beweis. Übung!

LINK: [TEIL 2 DER 6. VORLESUNG VOM 28.10.2021](#)

5 Folgen und ihre Konvergenz

Definition 5.1. Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung

$$x: \mathbb{N} \rightarrow M, \quad n \mapsto x(n),$$

üblicherweise schreiben wir jedoch

$$(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (x_n).$$

Die Elemente x_n heißen *Folglieder*.

┌ Manchmal wird auch für eine andere Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ die Abbildung $x: \mathcal{N} \rightarrow M$ als Folge bezeichnet; dann schreibt man explizit $(x_n)_{n \in \mathcal{N}}$.
└

Ist $\begin{matrix} M = \mathbb{R} \\ M = \mathbb{C} \end{matrix}$, so nennt man (x_n) eine reelle komplexe Folge oder $\begin{matrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{matrix}$ -Folge.

Im Folgenden betrachten wir nur $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$. Um beide Fälle simultan zu abzudecken, wird $\mathbb{K}$ entweder den Körper $\mathbb{R}$ oder den Körper $\mathbb{C}$ bezeichnen, wir betrachten also $M = \mathbb{K}$.

Beispiel 5.2.

- (a) Es sei $c \in \mathbb{K}$. Gilt für eine Folge $x_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$(x_n) = (c, c, c, \dots),$$

so ist x eine *konstante Folge*.

- (b) Gilt für eine Folge $x_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$(x_n) = (1, 2, 3, \dots),$$

so handelt es sich um eine *lineare Folge*.

- (c) Es seien $a, d \in \mathbb{K}$, $d \neq 0$, derart, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n = a + n \cdot d,$$

und damit insbesondere

$$x_{n+1} = x_n + d$$

gilt. Eine solche Folge wird dann *arithmetische Folge* oder *arithmetische Progression* genannt und hat die Form

$$(x_n) = (a, a + d, a + 2d, \dots).$$

- (d) Es seien $a, q \in \mathbb{K}$, $q \neq 0$ derart, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n = a \cdot q^n,$$

und damit insbesondere

$$x_{n+1} = x_n \cdot q$$

gilt. Eine solche Folge wird dann *geometrische Folge* oder *geometrische Progression* genannt und hat die Form

$$(x_n) = (a, aq, aq^2, \dots).$$

- (e) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n = \frac{1}{n}$$

wird *harmonische Folge* genannt und hat die Form

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

Für die Konstruktion von Folgen ist der Fantasie keine Grenzen gesetzt. So kann eine Folge auch folgendermaßen definiert werden:

(f) Gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad x_n = (-1)^n \cdot \frac{4n^2 + 2n + 1}{3n^3 + 6},$$

dann hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die folgende Form:

$$(x_n) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{9}, \frac{7}{10}, -\frac{43}{87}, \dots \right).$$

Definition 5.3 (Umgebung). Für $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung oder der offene ε -Ball um $a \in \mathbb{K}$ und

$$\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

die punktierte ε -Umgebung bzw. punktierter offener ε -Ball um a .

┌ In $\mathbb{R}$ gilt:

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{R}.$$

└

Wie man am Namen des Abschnitts erkennen kann, wollen wir uns hier neben den Folgen auch mit ihrer Konvergenz beschäftigen. Was unter Konvergenz zu verstehen ist, sollte zwar geklärt werden, aber bevor wir das tun, muss man sich natürlicherweise die folgende Frage stellen: Wieso benötigen wir überhaupt einen Konvergenzbegriff?

Man betrachte hierzu die Zahl $\sqrt{2}$, von der wir nach Lemma 3.15 wissen, dass sie keine rationale Zahl ist. Aufgrund ihrer Irrationalität ist sie jedoch durch eine unendliche, nicht-periodische Dezimaldarstellung gegeben, nämlich

$$1,4142135\dots$$

Allerdings kann ein Computer nur endlich viele Dezimalstellen berechnen, speichern und/oder darstellen. Je besser der Computer ist, desto mehr Dezimalstellen können dargestellt werden: Betrachtet man die folgende Iteration

$$\begin{array}{rcl} q_3 & = & 1,414 \\ \downarrow & & \\ q_4 & = & 1,4142 \\ \downarrow & & \\ q_5 & = & 1,41421 \\ \vdots & & \downarrow \quad \text{[In welchem Sinne?]} \\ & & \sqrt{2}, \end{array}$$

erhält man eine Folge (q_n) rationaler Zahlen mit der Eigenschaft

$$\varepsilon_n := |\sqrt{2} - q_n| \leq 10^{-n}.$$

Dieser Gedankengang motiviert:

Definition 5.4 (Konvergente Folge). Es sei $a \in \mathbb{K}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{K}$ -Folge. Dann heißt $(x_n)_n$ *konvergent gegen a* , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Man beachte, dass $n_0 = n_0(\varepsilon)$ von ε abhängt.

Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{oder} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a.$$

Eine Folge, die gegen $a = 0 \in \mathbb{K}$ konvergiert, heißt *Nullfolge*. Konvergiert eine Folge *nicht*, so heißt sie *divergent*. Konvergiert (x_n) gegen a , so liegen für jedes $\varepsilon > 0$ *nur endlich viele* der x_n außerhalb von $U_\varepsilon(a)$; wie viele es sind, hängt allerdings von ε ab.

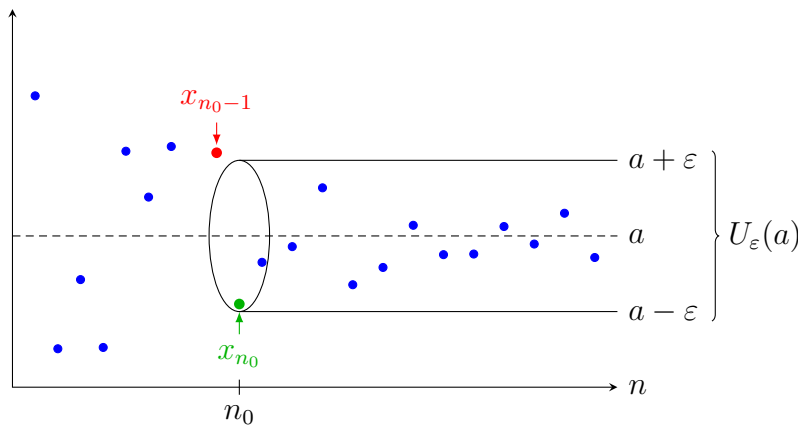


Abbildung 3: Visualisierung einer konvergenten Folge – man beachte dabei die ε -Umgebung um a .

Lemma 5.5. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{K}$ -Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b,$$

so folgt $a = b$.

Beweis. Angenommen es gelte $a \neq b$. Dann gilt

$$\varepsilon := \frac{|a - b|}{2} > 0.$$

Zu diesem $\varepsilon > 0$ existieren dann $n_a(\varepsilon), n_b(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall n \geq n_a(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall n \geq n_b(\varepsilon) : |x_n - b| < \varepsilon.$$

Daraus folgt jedoch für alle $n \geq \max\{n_a(\varepsilon), n_b(\varepsilon)\}$:

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$

also $|a - b| < |a - b|$, was ein Widerspruch ist. Damit muss $a = b$ gelten. $\square$

Fazit. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig festgelegt.

Beispiel 5.6. Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Das ist möglich, weil $\mathbb{N}$ nach Satz 3.12 unbeschränkt in $\mathbb{R}$ ist. Daraus folgt dann:

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n_0^\alpha} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon). \quad \square$$

Ähnlich zeigt man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0.$$

Sobald wir n^α für $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, definiert haben, werden wir herausfinden, dass dann die obigen Aussagen ebenfalls zutreffen werden.

Beispiel 5.7 (Divergente Folgen).

(a) Es sei $x_n = (-1)^n$.

Behauptung. Es gibt kein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ existiert insbesondere dann auch kein $a \in \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft.

Beweis der Behauptung. Angenommen es existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Dann existiert zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon = \frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Daraus folgt jedoch für alle $n \geq n_0$:

$$2 = \left| (-1)^{n+1} - (-1)^n \right| = |x_{n+1} - x_n| \leq |x_{n+1} - a| + |a - x_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1,$$

also $2 < 1$, was ein Widerspruch ist.

Also existiert kein $a \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(b) Es sei $x_n = n^2$.

Behauptung. Es gibt kein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Beweis der Behauptung. Angenommen es existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon = 1) \in \mathbb{N}$ mit

$$|n^2 - a| < 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

Wegen $(n_0 + \lceil |a| \rceil)^2 \geq n_0$ folgt jedoch:

$$\begin{aligned} 1 &> \left| (n_0 + \lceil |a| \rceil)^2 - a \right| \geq (n_0 + \lceil |a| \rceil)^2 - |a| \\ &\geq \underbrace{n_0^2}_{\geq 1} + \underbrace{(2n_0 - 1)}_{\geq 1} \underbrace{\lceil |a| \rceil}_{\geq 0} + \underbrace{\lceil |a| \rceil^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

also $1 > 1$, was ein Widerspruch ist.

Anzumerken ist, dass letztere Folge auf eine spezielle Art divergent ist:

LINK: [TEIL 1 DER 7. VORLESUNG VOM 4.11.2021](#)

Definition 5.8.

- (i) Eine $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$, wenn gilt:

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} x_n > N \\ x_n < -N \end{array} \quad \forall n \geq n_0.$$

- (ii) Eine $\mathbb{R}$ -Folge heißt *von oben beschränkt*, wenn die Menge A gegeben durch

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = x_n\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

von oben beschränkt ist. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert dann das Supremum

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (x_n) := \sup A.$$

- (iii) Eine $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *von unten beschränkt*, wenn die Folge $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von oben beschränkt ist.
- (iv) Eine $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von oben und von unten beschränkt ist.

┌
Übung: Eine $\mathbb{R}$ -Folge ist genau dann beschränkt, falls gilt:

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M.$$

└

Lemma 5.9. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{R}$ -Folge. Dann gilt:*

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (|x_n - a|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
- (b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis.

- (a) Folgt direkt aus Definition 5.4.
- (b) Es sei $(x_n)_n$ konvergent, es gelte also

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert $n_0 = n_0(\varepsilon = 1) \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : |x_n - a| < 1,$$

also $|x_n| \leq 1 + |a|$ für alle $n \geq n_0$. Setze nun $K := \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0}|, 1 + |a|\}$. Dann folgt

$$|x_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. □

Bemerkung. Die Umkehrung von Lemma 5.9 (b) gilt im Allgemeinen nicht: Es sei

$$x_n := (-1)^n.$$

Es gilt $|x_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also beschränkt. Jedoch ist die Folge divergent (siehe Beispiel 5.7 (a)).

Satz 5.10. *Es seien (x_n) und (y_n) $\mathbb{R}$ -Folgen. Dann gilt:*

- (a) *Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, so ist $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.*
- (b) *Falls $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit*

$$|x_n| \leq |y_n| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Beweis.

- (a) Da $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass gilt:

$$|y_n| < m \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert weiter für $\frac{\varepsilon}{m} > 0$ ein $n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{m}\right) \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \forall n \geq n_0.$$

Daraus folgt dann:

$$\forall n \geq n_0 : \quad |x_n \cdot y_n - 0| \leq |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon.$$

Also ist $(x_n \cdot y_n)_n$ eine Nullfolge.

- (b) Da $(y_n)_n$ eine Nullfolge ist, existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\varepsilon > |y_n - 0| = |y_n| \stackrel{\text{Vor.}}{\geq} |x_n| = |x_n - 0|.$$

Also ist $(x_n)_n$ eine Nullfolge. □

Beispiel 5.11 (Geometrische Folge). Es sei $q \in \mathbb{C}$ und $x_n := q^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Man betrachte nun die folgende Fallunterscheidung:

- $q = 0$: Daraus folgt insbesondere $x_n = 0^n = 0$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

- $|q| \in (0, 1)$: Für ein $h > 0$ ist dann

$$1 < \frac{1}{|q|} = 1 + h,$$

und man erhält mit der Bernoulli-Ungleichung 2.16:

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|} \right)^n \stackrel{2.16}{\geq} 1 + nh > nh \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also

$$|q^n| = |q|^n < \frac{1}{nh} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

das heißt:

$$|n \cdot q^n| < \frac{1}{h} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Damit ist die Folge $(n \cdot q^n)_n = (n \cdot x_n)_n$ beschränkt und es folgt, dass $(x_n)_n$ eine Nullfolge ist.

- $|q| = 1$: Hier sind wieder Unterfälle zu unterscheiden: Falls $q = 1 \in \mathbb{C}$, so gilt $x_n = 1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Falls $q = -1 \in \mathbb{C}$, so ist $x_n = (-1)^n$ divergent. Allgemeiner ist $(x_n)_n$ divergent für alle q mit $|q| = 1$ und $q \neq 1$.
- $|q| > 1$: Für ein $h > 0$ ist dann

$$|q| = 1 + h,$$

und man erhält mit der Bernoulli-Ungleichung 2.16:

$$|q^n| = |q|^n = (1 + h)^n \stackrel{2.16}{\geq} 1 + nh \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt und nach Lemma 5.9 divergent.

Insbesondere für $q \in (1, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist $x_n = q^n$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Beispiel 5.12. Seien $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$ und

$$x_n := n^k q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Beweis der Behauptung. Beweis mit vollständiger Induktion über $k \in \mathbb{N}$:

(IA): $k = 1$:

Die Aussage ist wahr wegen $(*)$ in Beispiel 5.11.

(IV): Für ein $k \in \mathbb{N}$ sei $x_n := n^k q^n$ eine Nullfolge mit $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(IS): $k \mapsto k + 1$:

Es existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $|q| < t < 1$. Setzt man $p := \frac{q}{t}$, so folgt

$$|p| < 1 \quad \text{und} \quad q = pt.$$

Wegen $(*)$ ist dann $(n \cdot t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, weshalb ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:

$$\left| n^{k+1} q^n \right| = \underbrace{(nt^n)}_{\text{beschränkt}} \underbrace{(n^k |p|^n)}_{\substack{\text{(IV)} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}}.$$

Nach Satz 5.10 (a) folgt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{k+1} q^n) = 0.$$

Also ist $x_n := n^k q^n$ eine Nullfolge für alle $k \in \mathbb{N}$.

LINK: [TEIL 2 DER 7. VORLESUNG VOM 4.11.2021](#)

Fazit. Das exponentielle Verhalten von q^n dominiert also das polynomielle Verhalten von n^k .

┌

Übung: Beweise die Behauptung von Beispiel 5.12 mithilfe des binomischen Lehrsatzes und ohne vollständige Induktion.

└

Beispiel 5.13. Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei x_n definiert durch

$$x_n := \frac{z^n}{n!}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Beweis. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq |z|, n_0 \geq 2$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$|x_n| = \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z| \cdot |z| \cdot \dots \cdot |z|}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n_0 - 1)}_{=:k, \text{ konstant}}} \cdot \underbrace{\frac{|z|}{n_0} \cdot \dots \cdot \frac{|z|}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \frac{|z|}{n} \leq \underbrace{k \cdot \frac{|z|}{n}}_{=:y_n} \stackrel{k \geq 0}{\stackrel{n > 0}{\cong}} |y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nach Satz 5.10 (b) gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \quad \square$$

Bevor wir uns mit weiteren Aussagen über Grenzwerte beschäftigen, ist zunächst eine weitere Begrifflichkeit einzuführen:

Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ formuliert. Wir sagen dann

$A(n)$ ist für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ wahr

$:\Leftrightarrow$ Es gibt nur *endlich viele* $n \in \mathbb{N}$, für die $A(n)$ falsch ist

$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad A(n) \text{ ist wahr.}$

Mit dieser Voraussetzung basteln wir uns nun aus gegebenen konvergenten Folgen neue konvergente Folgen.

Satz 5.14 (Grenzwertsätze). *Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{C}$ -Folgen und $a, b \in \mathbb{C}$ derart, dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Dann gilt:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b.$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, \text{ falls } b \neq 0.$

[Für den Fall $y_n = 0$ sei auf den unteren Teil (h) verwiesen.]

- (d) Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}$ -Folgen und gilt

$$x_n \leq y_n \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $a \leq b.$

(e) Sind $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ $\mathbb{R}$ -Folgen und gilt

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a = b,$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

(g) Sind $(a_n)_n, (b_n)_n$ $\mathbb{R}$ -Folgen, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + i \cdot b_n) = a + i \cdot b &\Leftrightarrow \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= a \in \mathbb{R}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \end{aligned}$$

(h) Gilt

$$z_n = x_n \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

┌ Man darf also endlich viele Folgenglieder ändern, ohne den Limes zu beeinflussen. ─

Beweis. (a) Nach Voraussetzung existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \stackrel{1.12 (4)}{\leq} |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$.

(b) Da (x_n) konvergent ist, ist insbesondere $(|x_n|)$ beschränkt. Es existiert also ein $K \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|x_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wähle nun zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \quad \text{und} \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
 |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\
 &\stackrel{1.12 (4)}{\leq} |x_n (y_n - b)| + |(x_n - a) b| \\
 &= \underbrace{|x_n|}_{< K} \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2K}} + \underbrace{|x_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}} |b| \\
 &< \underbrace{K \cdot \frac{\varepsilon}{2K}}_{=\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{|b|}{|b|+1}}_{\leq 1} \\
 &\leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$.

(c) Zunächst ist die Frage zu klären, ob man durch y_n dividieren kann: Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$$

existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2} \stackrel{1.12 (5)}{\Rightarrow} |y_n| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

Es gilt also $y_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit Teil (h) zeigt man später dann auch, dass alle (endlich vielen) „bösen“ Terme geändert werden können, ohne den eigentlichen Grenzwert zu beeinflussen.

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

Beweis der Behauptung. Zu $\varepsilon > 0$ wähle ein $n_1 = n_1(\varepsilon) \geq n_0$ derart, dass

$$|y_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1.$$

Dann gilt

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{y_n b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| |b|}.$$

Wegen $n \geq n_1 \geq n_0$ gilt insbesondere $|y_n| \geq \frac{|b|}{2}$ und damit

$$\frac{|y_n - b|}{|y_n| |b|} \leq \frac{2|y_n - b|}{|b|^2} < \frac{2|b|^2 \varepsilon}{2|b|^2} = \varepsilon.$$

Insgesamt gilt also

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1,$$

was zu zeigen war.

Nun gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) \stackrel{5.14 \text{ (b)}}{=} a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

(d) Ist $a = b$, dann gilt insbesondere $a \leq b$, es ist also nichts zu zeigen.

Betrachte also den Fall $a \neq b$: Setze dazu $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - b| > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall n \geq n_0 : \left. \begin{array}{l} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - b| < \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow a < x_n + \varepsilon \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} y_n + \varepsilon < b + 2\varepsilon = b + |a - b|.$$

Es gilt also $a - b < |a - b|$ und damit $a < b$, insbesondere auch $a \leq b$.

(e) - (h): Übung!

□

Beispiel 5.15.

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n + 3n^2}{4 + 7n^2} \quad [\text{Höchste Potenz}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + 3 \right)}{n^2 \left(\frac{4}{n^2} + 7 \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + 3}{\frac{4}{n^2} + 7} \\ &\stackrel{5.14}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 7} \\ &= \frac{0 - 0 + 3}{0 + 7} \\ &= \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 2^n - 4n^9 + 8}{2n - 3^n} \quad [\text{Wächst am schnellsten}] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(n^5 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 4 \cdot \frac{n^9}{3^n} + \frac{8}{3^n} \right)}{3^n \left(2 \cdot \frac{n}{3^n} - 1 \right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 4 \cdot \frac{n^9}{3^n} + \frac{8}{3^n}}{2 \cdot \frac{n}{3^n} - 1} \\
 &= \frac{\overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(\frac{2}{3} \right)^n}^{5.12_0} - \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} n^9 \left(\frac{1}{3} \right)^n}^{5.12_0} + \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n}^{5.12_0}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n}_{5.12_0} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \\
 &= \frac{0 - 4 \cdot 0 + 0}{2 \cdot 0 - 1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

LINK: TEIL 1 DER 8. VORLESUNG VOM 8.11.2021

(3) Zu Satz 5.14 (c):

Gilt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, aber $y_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = \infty,$$

das heißt, $\left(\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Dagegen ist im Fall $a = 0 = b$ (und $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$) keine allgemeine Aussage möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen:

- Man betrachte $y_n = \frac{1}{n^2}$ und $x_n = \frac{1}{n^3}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Betrachtet man jedoch $y_n = \frac{1}{n^2}$ und $x_n = \frac{1}{n}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

- Für $y_n = \frac{1}{n^2}$ und $x_n = \frac{c}{n^2}$, $c \in \mathbb{R}$, gilt entsprechend

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$$

(4) Zu Satz 5.14 (d):

Es sei $x_n := 0 < \frac{1}{n} =: y_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Die strikte Ungleichheit zwischen den Folgengliedern für alle $n \in \mathbb{N}$ lässt sich also nicht auf den Grenzwert übertragen:

$$x_n < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(5) Man betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$x_n := \sqrt[n]{n}.$$

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

Beweis der Behauptung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \leq n \quad \xRightarrow{\text{Übung}} \quad \underbrace{\sqrt[n]{1}}_{=1} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Weiter liefert die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel aus Satz 3.20:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} + \underbrace{\frac{2}{\sqrt[n]{n}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Wegen des Sandwich-Arguments aus Satz 5.14 (e) gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

was zu zeigen war.

Bei der Betrachtung von $y_n := \sqrt[n]{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \right)^k \stackrel{5.14 \text{ (b)}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^k = 1^k = 1.$$

(6) Für $a > 0$ betrachten wir die $\mathbb{R}$ -Folge $(\sqrt[n]{a})_n$.

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0.$$

Beweis der Behauptung. Man betrachte hierzu die folgende Fallunterscheidung:

- $a \geq 1$:
Dann gilt

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n},$$

wenn man $n \in \mathbb{N}$ groß genug wählt. Es gilt also

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ liefert das Sandwich-Argument aus Satz 5.14 (e) dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \geq 1.$$

- $a \in (0, 1)$:
Setze $c := \frac{1}{a} > 1$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{a} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{c} \right)^{-1} \stackrel{5.14 (c)}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} \right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0.$$

(7) Wir betrachten die $\mathbb{R}$ -Folge $\left(\sqrt[n]{n!} \right)_n$.

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Beweis der Behauptung. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (n!)^2 = n! \cdot n! &= \left(\prod_{k=1}^n k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n (n - k + 1) \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \underbrace{k(n - k + 1)}_{=(k-1)(n-k)+n} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\underbrace{(k-1)(n-k) + n}_{\geq 0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \prod_{k=1}^n n \\ &= n^n. \end{aligned}$$

Also gilt $(n!)^2 \geq n^n$, also $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$, und man erhält

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}} = n^{\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Wegen $\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

(8) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ und $p, q \in \mathbb{N}$.

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^p - 1}{x_n^q - 1} = \frac{p}{q}.$$

┌ Man beachte, dass hier insbesondere

$$x_n^p - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad x_n^q - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

gilt, man betrachtet also einen Fall „0/0“ – eine Sache, die uns später bei der Betrachtung von differenzierbaren Funktionen begegnen wird. ┐

Beweis der Behauptung. Wir nutzen zunächst die Identität der geometrischen Summenformel aus Lemma 2.7 bzw. Korollar 2.8 (a): Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x_n^p - 1}{x_n - 1} = \sum_{j=0}^{p-1} x_n^j \quad \text{und} \quad \frac{x_n^q - 1}{x_n - 1} = \sum_{k=0}^{q-1} x_n^k.$$

Damit erhält man:

$$\frac{x_n^p - 1}{x_n^q - 1} = \frac{\frac{x_n^p - 1}{x_n - 1}}{\frac{x_n^q - 1}{x_n - 1}} = \frac{\sum_{j=0}^{p-1} x_n^j}{\sum_{k=0}^{q-1} x_n^k}.$$

Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{j=0}^{p-1} x_n^j}{\sum_{k=0}^{q-1} x_n^k} \right) = \frac{\sum_{j=0}^{p-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^j \right)}{\sum_{k=0}^{q-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k \right)} = \frac{\sum_{j=0}^{p-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^j}{\sum_{k=0}^{q-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^k} \stackrel{\text{Vor.}}{=} \frac{\sum_{j=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1} = \frac{p}{q},$$

was zu zeigen war.

- (9) Wir betrachten wieder die geometrische Summenformel: Lemma 2.7 besagt, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Betrachtet man den Grenzwert beider Seiten für $n \rightarrow \infty$, so erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) \stackrel{5.11}{=} \frac{1}{1 - z}.$$

Speziell für $z = \frac{1}{2}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

In den vorigen Beispielen haben wir gesehen, wie sich der Limes bei Potenzen mit ganzzahligen Exponenten verhält. Der nächste Satz beleuchtet dasselbe Verhalten, aber für rationale Exponenten:

Satz 5.16. *Es sei $a > 0$, $x_n \in [0, \infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, und $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r = a^r. \quad (*)$$

Ist zusätzlich $r > 0$, so gilt auch

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty) \text{ ist eine Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad (x_n^r)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge.}$$

Beweis. Vorbereitend betrachten wir zunächst Folgendes: Man kann o.B.d.A. annehmen, dass $x_n \in (0, \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ansonsten kann man eine modifizierte Folge y_n betrachten, gegeben durch

$$y_n := \max \left\{ x_n, \frac{a}{2} \right\} > 0.$$

Dann existiert nämlich ein $n_0 = n_0 \left(\frac{a}{2} \right) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|x_n - a| < \frac{a}{2} \quad \forall n \geq n_0,$$

also $0 < \frac{a}{2} \leq x_n$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $y_n = x_n$ für alle $n \geq n_0$, für $r \in \mathbb{Q}$ also

$$y_n^r = x_n^r \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 5.14 (h) liefert dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^r$.

┘

LINK: TEIL 2 DER 8. VORLESUNG VOM 8.11.2021

Der Beweis des Satzes erfolgt mehrteilig:

- ① Ist $r \in \mathbb{N}$, so folgt aus Satz 5.14 (b) induktiv:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(x_n \cdot \dots \cdot x_n)}_{r\text{-mal}} = a^r.$$

- ② Nun betrachte man den Fall $r = \frac{1}{M}$ für $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq 2$. Die geometrische Summenformel aus Korollar 2.8 (c) liefert:

$$x^M - y^M = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{M-1} x^k \cdot y^{M-k-1}.$$

Setze nun $x = x_n^{\frac{1}{M}}$ und $y = a^{\frac{1}{M}}$ und erhalte

$$\begin{aligned} x_n - a &= \left(x_n^{\frac{1}{M}} - a^{\frac{1}{M}} \right) \cdot \sum_{k=0}^{M-1} \left(x_n^{\frac{k}{M}} \cdot a^{\frac{M-1-k}{M}} \right) \\ &= \left(x_n^{\frac{1}{M}} - a^{\frac{1}{M}} \right) \cdot \underbrace{a^{\frac{M-1}{M}}}_{=: A > 0} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{x_n}{a} \right)^{\frac{k}{M}}}_{=1+\dots+1}. \end{aligned} \quad (**)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $n_0 = n_0(A \cdot \varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_n - a| < A \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Nach (**) gilt

$$x_n - a \geq \left(x_n^{\frac{1}{M}} - a^{\frac{1}{M}} \right) \cdot A.$$

Umstellen des Terms und einsetzen des Betrags liefert dann

$$\left| x_n^{\frac{1}{M}} - a^{\frac{1}{M}} \right| \stackrel{A>0}{\leq} |x_n - a| \cdot \frac{1}{A} < A \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{A} = \varepsilon.$$

Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[M]{x_n} = \sqrt[M]{a}.$$

③ Ist allgemein $r = \frac{p}{M}$ für $p \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{p}{M}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[M]{x_n})^p \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[M]{x_n} \right)^p \stackrel{\textcircled{2}}{=} (\sqrt[M]{a})^p = a^r.$$

④ Man betrachte nun den zusätzlichen Fall $a = 0$, $r > 0$ und $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|x_n - 0| < \varepsilon^{\frac{1}{r}} \quad \forall n \geq n_0,$$

also

$$|x_n^r| = |x_n|^r < (\varepsilon^{\frac{1}{r}})^r = \varepsilon.$$

□

Beispiel 5.17.

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{4n^2 - 1}{n^2 + 7} \right)^3} &\stackrel{5.16}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2 + 7} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{7}{n^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{4 - 0}{1 + 0} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 4^{\frac{3}{2}} \\ &= 8. \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) \cdot \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - n^2}{(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

6 Monotone Folgen

Gewisse „abstrakte“ Eigenschaften garantieren, dass eine Folge konvergiert – auch wenn man den Grenzwert (bzw. Limes) einer solchen Folge eventuell nicht explizit angeben kann. Im Folgenden wird ein solches Szenario untersucht.

Definition 6.1. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{R}$ -Folge. Dann heißt

- (x_n) *streng isoton*, wenn

$$x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- (x_n) *isoton*, wenn

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- (x_n) *streng antiton*, wenn

$$x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- (x_n) *antiton*, wenn

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- (x_n) *(streng) monoton*, wenn (x_n) (streng) isoton oder (streng) antiton ist.

Der Begriff „isoton“ ist dabei äquivalent zu „monoton steigend“ und „antiton“ zu „monoton fallend“.

Beispiel 6.2. Man betrachte die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad c_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}.$$

(a_n) ist streng antiton, (b_n) ist isoton und antiton, und

$$(c_n) \text{ ist } \begin{cases} \text{streng isoton} & \text{für } q > 1, \\ \text{streng antiton} & \text{für } q \in (0, 1), \\ \text{isoton und antiton} & \text{für } q \in \{0, 1\}, \\ \text{nichts davon} & \text{für } q < 0. \end{cases}$$

Satz 6.3 (Monotonie und Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz). Jede *isotone* und von *oben* beschränkte $\mathbb{R}$ -Folge ist konvergent.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isoton und von oben beschränkt. Dann existiert eine obere Schranke

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Beweis der Behauptung. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach den Eigenschaften des Supremums existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_{n_0} > a - \varepsilon.$$

Wegen der Isotonie von $(x_n)_n$ gilt dann

$$x_n \geq x_{n_0} > a - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

und weil a eine obere Schranke ist, gilt ebenso

$$x_n \leq a < a + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt gilt also

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

was zu zeigen war.

Damit ist (x_n) offensichtlich konvergent gegen a . □

Eine Anwendung der Monotonie-Eigenschaft findet sich im Babylonischen Verfahren bzw. Heron-Algorithmus zum Wurzelziehen:

Beispiel 6.4 (Heron-Verfahren). Es seien $a > 1$ und $b > 0$ sowie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$x_0 = b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

Behauptung. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist antiton, beschränkt und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Beweis der Behauptung.

- ① Zeige zunächst, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (dann darf man damit dividieren) durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

(IA) $n = 0$:Es gilt $x_0 = b > 0$, ist also erfüllt.

(IV) Es gilt

$$x_n > 0 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0.$$

(IS) $n \mapsto n + 1$:

Es gilt

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} \left(\underbrace{x_n}_{\substack{\text{(IV)} \\ >0}} + \underbrace{\frac{a}{x_n}}_{\substack{\text{(IV)} \\ >0}} \right) > 0.$$

Also gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.(2) Zeige nun, dass $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist nämlich

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{\overbrace{(x_n - \sqrt{a})^2}^{\geq 0}}{2x_n} \geq 0.$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \stackrel{(2)}{\leq} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{a} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Damit gilt $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, (x_n) ist also antiton, und zusammen mit (2) ist (x_n) konvergent.(4) Identifiziere nun den Grenzwert der Folge $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$: Lasse dazu $n \rightarrow \infty$ auf beide Seiten in (*) laufen. Es gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right). \quad (**)$$

┌ Insbesondere ist x dann ein Fixpunkt der Iteration (*), es gilt also

$$x_n = x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x$$

└

Löse nun (**) auf: Es gilt

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}.$$

Wegen $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss auch $x \geq 0$ gelten, und man erhält $x = \sqrt{a}$ als Lösung.

⑤ Fehlerabschätzung:

Wegen ② gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} \stackrel{a>1}{\leq} \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a})^2.$$

Ist beispielsweise $|x_n - \sqrt{a}| = 10^{-k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} 10^{-2k}.$$

LINK: TEIL 1 DER 9. VORLESUNG VOM 11.11.2021

In der Tat verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt die Anzahl der „korrekten Stellen“ von x_n . So gilt zum Beispiel für $a = 2$ und $b = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_2 &= \frac{17}{12} = 1,416\dots \\ x_3 &= \frac{577}{408} = 1,414215\dots, \end{aligned}$$

im Vergleich zu $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

Beobachtung. Der Startwert $x_0 = b$ beeinflusst den Grenzwert sowie die Konvergenzrate nicht. Sind außerdem $a, b \in \mathbb{Q}$, so ist auch $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, auch wenn der Limes $\sqrt{a}$ irrational ist.

Eine Erweiterung dieses Verfahrens zum Ziehen der k -ten Wurzel ist gegeben durch:

Bemerkung (Verfahren zum Ziehen der k -ten Wurzel). Es seien $a \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $b^k \geq a$ und

$$x_0 = b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

Beispiel 6.5 (Exponentielles Wachstum). Eine Anlage von Kapital K mit jährlichem Zinssatz p ergibt nach einem Jahr

$$K \cdot (1 + \alpha), \quad \alpha = \frac{p}{100}.$$

Nach t Jahren ohne Zinseszins hat man

$$K \cdot (1 + t \cdot \alpha).$$

Haben wir eine Zinsauszahlung zu den Zeitpunkten $\frac{t}{2}$ und t , so gilt

$$\left(K \left(1 + \frac{t}{2}\alpha\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{2}\alpha\right) = K \left(1 + \frac{t}{2}\alpha\right)^2.$$

Bei n Zinsterminen hat man entsprechend Zeitpunkte

$$\frac{t}{n}, 2\frac{t}{n}, \dots, (n-1)\frac{t}{n}, n\frac{t}{n} = t$$

und damit eine Zinsauszahlung von $K \left(1 + \frac{t}{n}\alpha\right)^n$.

Einer „stetigen Verzinsung“ entspricht also der Limes $n \rightarrow \infty$. Dies motiviert die Untersuchung der Folge

$$(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Das Kapital wächst mit Zinseszins schneller als ohne. Daraus folgt, dass die Folge $(e_n(x))$ für $x > 0$ isoton bezüglich $n \in \mathbb{N}$ ist.

Betrachte nun die modifizierte Folge gegeben durch

$$e_n^*(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} = e_n(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

wobei $e_n^*(x) > e_n(x)$ für $x > 0$.

Betrachte nun die folgende Fallunterscheidung:

- $x = 0$:
Dann ist $e_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $x > 0$:
Dann ist $(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ streng isoton.
- $x < 0$:
Dann ist die Folge $(e_n(x))_{n \geq n_x}$ streng isoton, wobei n_x die kleinste natürliche Zahl ist mit

$$n_x \geq -x + 1.$$

Beweis. Es sei $x \neq 0$ und $n \geq n_x$ (für $x > 0$ sei dann $n_x = 1$). Dann gilt

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \cdot \frac{n^n \cdot (n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1+x)^{n+1} \cdot n^{n+1}}{(n+x)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n+x}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\overbrace{n^2 + n + nx}^{=(n+x)(n+1)-x}}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\
&= \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\
&\stackrel{2.16}{>} \left(1 - \frac{x}{n+x} \right) \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\
&= \frac{n+x-x}{n+x} \frac{n+x}{n} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

[Strikte Bernoulli-Ungl. anwendbar wegen $n \geq n_x$]

Für alle $n \geq n_x$ gilt also $e_{n+1}(x) > e_n(x)$, $(e_n(x))_{n \geq n_x}$ ist also streng isoton.

Ähnlich zeigt man, dass die Folge $(e_n^*(x))_{n \geq n_x}$ streng antiton ist. Insgesamt gilt also für $x \neq 0$:

$$e_{n_x}(x) < e_{n_x+1}(x) < e_{n_x+2}(x) < \dots < e_{n_x+2}^*(x) < e_{n_x+1}^*(x) < e_{n_x}^*(x).$$

Damit ist $(e_n(x))_{n \geq n_x}$ streng isoton und von oben beschränkt und $(e_n^*(x))_{n \geq n_x}$ streng antiton und von unten beschränkt. Nach Satz 6.3 sind die Folgen dann konvergent. Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) =: e(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e_n^*(x) =: e^*(x).$$

Da bekannterweise $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) = 1$, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x),$$

es gilt also $e(x) = e^*(x)$.

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Damit haben wir die Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x)$$

definiert. Speziell heißt

$$e := \exp(1) \quad \text{die Eulersche Zahl.}$$

Insbesondere ist $e \in (2, 3)$: Setzt man $e_n := e_n(1)$ bzw. $e_n^* := e_n^*(1)$ für $n \in \mathbb{N}$, gilt nämlich

$$2 = e_1 < e < e_5^* < 3.$$

Die ersten Dezimalstellen lauten 2,718281828...

Im Gegensatz zu der Folge konstruiert im Heron-Verfahren 6.4 konvergiert die Folge

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nur langsam gegen e , genauer gilt:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n} \sim \frac{1}{n}.$$

Für $n = 10$ hat man also einen Fehler von $\sim \frac{1}{10}$ und bei $n = 100$ einen Fehler von $\sim \frac{1}{100}$. Es sind also 90 Multiplikationen mehr auszuführen, um eine weitere Dezimalstelle bestimmen zu können.

LINK: TEIL 2 DER 9. VORLESUNG VOM 11.11.2021

Wesentlich schneller wird e , und allgemein $\exp(x)$, approximiert durch die Folge gegeben durch

$$n \mapsto E_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Für $x > 0$ sind alle Summanden positiv, $(E_n(x))_n$ ist also strikt isoton. Setze nun

$$E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) \quad \text{für } x > 0,$$

wobei $E(x) = +\infty$ noch nicht ausgeschlossen ist.

Behauptung. Für alle $x > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = \exp(x) < \infty.$$

Beweis der Behauptung. Es gilt

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &\stackrel{2.15}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{x^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \\ &= E_n(x), \end{aligned}$$

es gilt also $e_n(x) \leq E_n(x)$. Zeige nun eine komplementäre Ungleichung: Fixiere dazu ein $m \in \mathbb{N}$ und wähle $n \geq m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \\ &\geq 1 + \sum_{k=1}^m \left(\underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \text{ fest}} \cdot \frac{x^k}{k!} \right), \end{aligned}$$

es gilt also

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) \geq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k!} = E_m(x).$$

Das Sandwich-Argument aus Satz 5.14 (e) liefert dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x).$$

Bemerkung 6.6.

(a) Für den Approximationsfehler gilt (Übung!):

$$0 < \varepsilon_n := e - E_n(x) < \frac{1}{n! \cdot n}.$$

(b) e ist irrational.

Beweis. Angenommen es existieren $p, q \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$e = \frac{p}{q}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \varepsilon_n \quad \Leftrightarrow \quad n! \cdot \frac{p}{q} = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + n! \cdot \varepsilon_n.$$

Wähle nun $n \geq \max\{2, q\} \in \mathbb{N}$, dann liefert Teil (a):

$$0 < n! \cdot \varepsilon_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < 1,$$

also $n! \cdot \frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$e \left(\frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Beweis.

- $n = 1$:

Es gilt

$$e \cdot \frac{1}{e} = 1 \leq 1! \leq 1 = e \cdot 1 \cdot \frac{1}{e},$$

die Behauptung gilt also für $n = 1$.

- $n \geq 2$:

Bekannterweise gilt

$$0 < e_j < e < e_j^* \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Multiplikation der $n-1$ Ungleichungen liefert dann:

$$\prod_{j=1}^{n-1} e_j^* > e^{n-1} > \prod_{j=1}^{n-1} e_j.$$

Man bemerkt, dass

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n-1} e_j &= \left(\frac{2}{1} \right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdot \dots \cdot \left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot n^{n-1} \\ &= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise, dass

$$\prod_{j=1}^{n-1} e_j^* = \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Es gilt also

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \cdot n! < e^{n-1} \cdot n! < \frac{n^n}{(n-1)!} \cdot n! \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{n^n}{e^{n-1}}}_{e \left(\frac{n}{e} \right)^n} < n! < \underbrace{\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}}_{=e \cdot n \left(\frac{n}{e} \right)^n},$$

und damit die Behauptung.

(d) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Eine Kurzschreibweise dafür ist gegeben durch

$$\sqrt[n]{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

Definition 6.7 (Intervallschachtelung). Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone $\mathbb{R}$ -Folge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone $\mathbb{R}$ -Folge mit

$$a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt dann

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Man nennt dann die Folge $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Intervallschachtelung*.

Satz 6.8. Es sei $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a \leq b \quad \text{und} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b] \neq \emptyset.$$

Gilt zusätzlich $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, dann gilt

$$a = b \quad \text{und} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{a\}.$$

Beweis. Übung!

Beispiel 6.9.

(a) Es seien Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n$ definiert durch

$$a_n := e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n := e_n^* = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(a_n) ist dann isoton und (b_n) antiton. Damit ist $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{e\}, \quad \text{da} \quad 0 < b_n - a_n = \frac{e_n}{n} < \frac{3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (b) Die Folge $([E_n, E_n + \varepsilon_n])_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n = \frac{1}{n! \cdot n}$, wobei $E_n := E_n(1)$, ist auch eine Intervallschachtelung mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [E_n, E_n + \varepsilon_n] = \{e\}.$$

- (c) Bekannterweise liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$, insbesondere jedem $x \in \mathbb{I}$, eine Intervallschachtelung $([r_n, q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit $r_n, q_n \in \mathbb{Q}$ und

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [r_n, q_n] = \{x\}.$$

Insbesondere ist $(r_n)_n$ isoton und $(q_n)_n$ antiton und beide konvergieren gegen x .

- (d) Da

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset, \quad (\text{Übung!})$$

darf man im Satz 6.8 die abgeschlossenen Intervalle nicht durch offene ersetzen.

Beispiel 6.10 (Konstruktion einer Intervallschachtelung zu $x = \sqrt{2}$). Wähle zunächst für die Definition des ersten Intervalls

$$a_1 := 1 < x = \sqrt{2} < 2 =: b_1.$$

Setze nun

$$c_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{3}{2} \Rightarrow c_1^2 = \frac{9}{4} > 2.$$

Wähle also

$$a_2 := a_1 = 1 < x < c_1 =: b_2 \quad \text{und damit} \quad c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{5}{4}.$$

Es gilt $c_2^2 = \frac{25}{16} < 2$. Wähle also

$$a_3 = c_2 = \frac{5}{4} < x < b_2 =: b_3 \quad \text{und damit} \quad c_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3) = \frac{11}{8}$$

und erhalte $c_3^2 = \frac{121}{64} < 2$.

Die Fortsetzung dieser Iteration liefert dann Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n$ in $\mathbb{Q}$, wobei

$$\underbrace{\left[1, 2\right]}_{\text{Länge } 1} \supset \underbrace{\left[1, \frac{3}{2}\right]}_{\text{Länge } \frac{1}{2}} \supset \underbrace{\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]}_{\text{Länge } \frac{1}{4}} \supset \underbrace{\left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right]}_{\text{Länge } \frac{1}{8}} \supset \dots,$$

also $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \ni \sqrt{2}$ für alle n mit $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und insbesondere

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$$

Dieses Verfahren nennt man das *Bisektionsverfahren* zur Konstruktion von Intervallschachtelungen.

LINK: TEIL 1 DER 10. VORLESUNG VOM 15.11.2021

Dieses Verfahren lässt sich tatsächlich verallgemeinern: So kann man eine Intervallschachtelung $([a'_k, b'_k])_{k \in \mathbb{N}}$ finden, so dass für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a'_k, b'_k] = \{ \sqrt[n]{a} \}.$$

Wie beim Verfahren in Beispiel 6.10 geht man dabei mit einer ‚Trial-and-Error‘-Methode vor.

Nun stellen wir einen Bezug her zwischen (Teil-)Folgen und dem Supremum:

Satz 6.11. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, von oben beschränkt und $s \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(α) $s = \sup A$;

(β) s ist eine obere Schranke von A und es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A derart, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s;$$

(γ) Es gilt (β) und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist isoton.

Beweis. Übung!

Beachte: In (β) darf $(x_n)_n$ einen Wert aus A mehrmals annehmen.

7 Häufungspunkte und Cauchyfolgen

Definition 7.1. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{C}$ -Folgen und $a \in \mathbb{C}$.

(α) a ist ein *Häufungspunkt* von (x_n) , wenn

$$\left| \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_\varepsilon(a) \} \right| = \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Jede noch so kleine Umgebung von a enthält also unendlich viele Folgenglieder.

$\Lambda(x_n)$ bezeichnet die *Limesmenge* von (x_n) , d.h. die Menge aller Häufungspunkte von (x_n) .

(β) $(y_k)_k$ heißt *Teilfolge* von $(x_n)_n$, wenn eine streng isotone Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit

$$y_k = x_{\varphi(k)}.$$

Typischerweise schreibt man

$$\varphi(k) = n_k \quad \text{bzw.} \quad y_k = x_{n_k}.$$

Ist φ bijektiv, dann gilt sogar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Beispiel. $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$ sind Teilfolgen von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 7.2.

(a) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte $\mathbb{C}$ -Folge. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda(x_n) = \{a\}.$$

(b) Es gilt genau dann $b \in \Lambda(x_n)$, wenn eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ derart existiert, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b.$$

Beweis.

(a) Übung!

(b) ($\Leftarrow$) Es sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_n$ derart, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ liegen dann fast alle x_{n_k} in $U_\varepsilon(b)$, insbesondere existieren unendlich viele x_{n_k} mit $x_{n_k} \in U_\varepsilon(b)$. Damit ist b ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$, also $b \in \Lambda(x_n)$.

($\Rightarrow$) Es sei b ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$, es gilt also $b \in \Lambda(x_n)$. Für $\varepsilon = 1$ gilt dann

$$\left| \left\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_1(b) \right\} \right| = \infty \quad \Rightarrow \quad \exists x_{n_1} \in U_1(b),$$

und für $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\left| \left\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_{\frac{1}{2}}(b) \right\} \right| = \infty \quad \Rightarrow \quad \exists x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(b) \quad \text{mit } n_2 > n_1,$$

und ebenso für $\varepsilon = \frac{1}{3}$:

$$\exists x_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(b) \quad \text{mit } n_3 > n_2.$$

Induktiv erhält man dann:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k : \quad |x_{n_k} - b| < \frac{1}{k}, \quad n_{k+1} > n_k.$$

Es existiert also eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ derart, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b$. □

Beispiel 7.3.

- Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$. Dann ist $\Lambda(x_n) = \emptyset$.

- Es sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

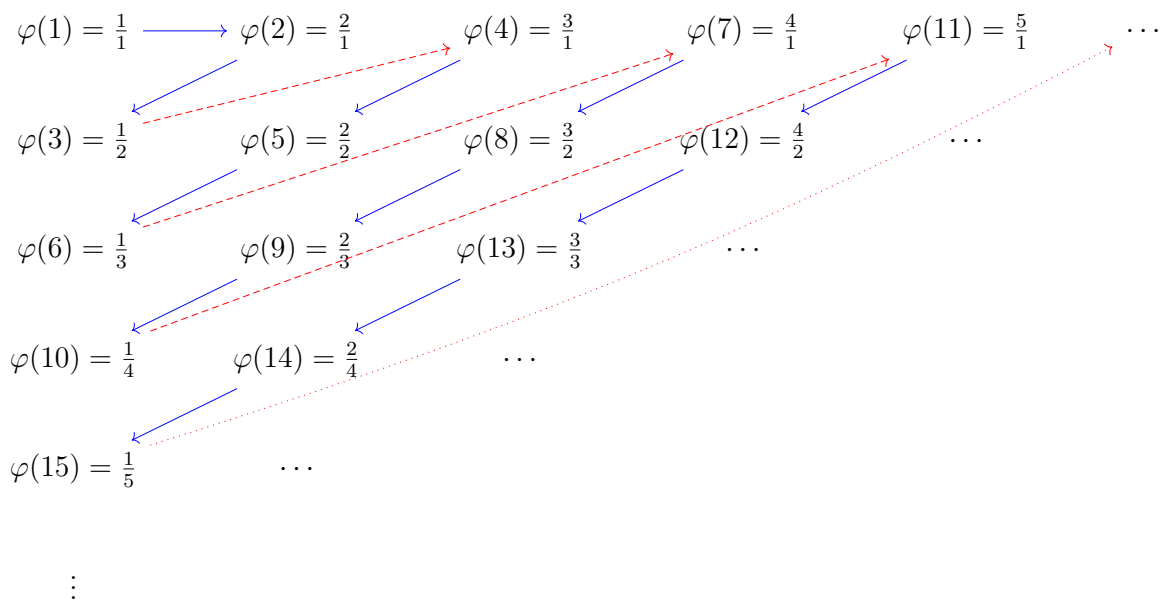
$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{n \in 2\mathbb{N}, \\ n \rightarrow \infty}} x_n = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{n \in 2\mathbb{N}-1, \\ n \rightarrow \infty}} x_n = -1$$

und damit $\Lambda(x_n) = \{-1, 1\}$.

- Wir konstruieren nun eine surjektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ auf folgende Weise:



- ⌈
- * Zeigen Sie, dass für $x_n = \varphi(n)$ gilt:

$$\Lambda(x_n) = [0, \infty).$$

- * Konstruieren Sie eine Folge $(x_n)_n$ mit

$$\Lambda(x_n) = \mathbb{R}.$$

⌋

Mit dem folgenden Satz schlagen wir nun eine Brücke zum letzten Kapitel:

Satz 7.4. Jede $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält eine monotone Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Man lege zunächst folgenden Begriff fest: Eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ heißt *Gipfelstelle* der Folge $(x_n)_n$, wenn

$$\forall n > k : \quad x_n < x_k.$$

Der Wert x_k wird also „nie mehr erreicht“.

Wir betrachten nun die folgende Fallunterscheidung:

- Es existieren unendlich viele Gipfelstellen:
Dann existieren Gipfelstellen $n_1, n_2, n_3, \dots$ mit

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Damit ist $(x_{n_k})_k$ eine streng antitone Teilfolge von $(x_n)_n$.

- Es existieren nur endlich viele (eventuell sogar keine) Gipfelstellen:
Es sei $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass die Indexfolge $n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$ keine Gipfelstellen enthält. Da n_1 keine Gipfelstelle ist, existiert ein $n_2 > n_1$ mit $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Da n_2 nach Konstruktion keine Gipfelstelle ist, existiert ein $n_3 > n_2$ mit $x_{n_3} \geq x_{n_2}$. Setzt man dies induktiv fort, so findet man eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_{k+1} > n_k$ und

$$x_{n_k} \geq x_{n_{k-1}}.$$

Damit ist $(x_{n_k})_k$ eine isotone Teilfolge von $(x_n)_n$. □

Satz 7.5 (von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte $\mathbb{R}$ -Folge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Da $(x_n)_n$ beschränkt ist, enthält sie nach Satz 7.4 eine monotone Teilfolge, die ebenfalls beschränkt ist. Nach Satz 6.3 ist diese Teilfolge dann konvergent. □

┌ Übung: Beweise Satz 7.5 mit dem Bisektionsverfahren (vgl. Beispiel 6.10) anstatt mit Satz 7.4. └

Definition 7.6. Es sei $(x_n)_n$ eine $\mathbb{R}$ -Folge und $A = \Lambda(x_n)$. Falls (x_n) von oben unten beschränkt ist, so bezeichnen wir $\sup A \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\inf A \in \mathbb{R}$ mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ und nennen es den Limes Superior Inferior von $(x_n)_n$.

Falls $(x_n)_n$ nicht von oben unten beschränkt ist, dann setzen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Bemerkung 7.7 (Übung).

- Die $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei von oben beschränkt und $\Lambda(x_n) \neq \emptyset$. Dann ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$; es handelt sich sogar um den größten Häufungspunkt.

(b) Die $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_n$ sei beschränkt. Dann gilt

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

LINK: TEIL 2 DER 10. VORLESUNG VOM 15.11.2021

(c) Eine $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_n$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Es gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Satz 7.8. Die $\mathbb{R}$ -Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei von oben beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n < \lambda + \varepsilon$,
- (ii) $\forall \varepsilon > 0$ existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ derart, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} > \lambda - \varepsilon.$$

Beweis.

($\Rightarrow$) Es sei $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dann ist $\lambda \in \Lambda(x_n)$, also

$$\left| \left\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_\varepsilon(\lambda) \right\} \right| = \infty.$$

Insbesondere gibt es x_{n_k} mit $x_{n_k} > \lambda - \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also (ii).

Ist $\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n =: s$, dann gilt $x_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also (i). Ist $\lambda < s$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\lambda < \lambda + \varepsilon < s$. Daraus folgt, dass es nur endlich viele Folgenglieder x_n gibt mit $x_n \in [\lambda + \varepsilon, s]$ und damit (i). Falls das nämlich nicht der Fall wäre, so existierte nach dem Satz 7.5 von Bolzano-Weierstraß ein Häufungspunkt $a \in [\lambda + \varepsilon, s]$ mit $\lambda < a$. Dies ist ein Widerspruch, da λ nach Bemerkung 7.7 (a) der größte Häufungspunkt von (x_n) ist.

($\Leftarrow$) Es seien die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Dann existieren für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_m - \lambda| < \varepsilon,$$

also $\lambda \in \Lambda(x_n)$. Aus der Bedingung (i) folgt

$$\lambda + \varepsilon \notin \Lambda(x_n) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

λ ist also der größte Häufungspunkt, d.h. $\lambda \stackrel{7.7(a)}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. □

Satz 7.9. Es sei $(x_n)_n$ eine von oben beschränkte $\mathbb{R}$ -Folge. Setze für $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $(\lambda_n)_n$ ist antiton,
- (b) $(\lambda_n)_n$ ist von oben beschränkt,
- (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$.

Beweis.

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \supset \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq \sup \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \lambda_{n+1},$$

$(\lambda_n)_n$ ist also antiton.

- (b) Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$(\lambda_n)_n$ ist also genau dann von oben beschränkt, wenn $(x_n)_n$ von oben beschränkt ist.

- (c) Ist $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$, so gelten die Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 7.8:

$$(i) \quad \Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 : \quad \lambda_n \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Aus (ii) folgt dann $\lambda - \varepsilon < x_n < \lambda_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Tatsächlich gilt diese Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$, da (λ_n) antiton ist. Insgesamt gilt also

$$|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$. □

Definition 7.10. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{C}$ -Folge.

- (a) $(x_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq n_0 : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall k \in \mathbb{N} : \quad |x_{n_0} - x_{n_0+k}| < \varepsilon.$$

- (b) $(x_n)_n$ heißt *beschränkt*, wenn die $\mathbb{R}$ -Folge $(|x_n|)_n$ beschränkt ist.

Lemma 7.11. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist $(x_n)_n$ beschränkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{n_0} - x_{n_0+k}| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

und damit $|x_{n_0+k}| \leq 1 + |x_{n_0}|$. Nun sei $K := \max \{|x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$. Dann gilt

$$|x_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h. $(x_n)_n$ ist beschränkt. □

Satz 7.12. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{C}$ -Folge. Dann gilt:*

$$(x_n)_n \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad (x_n)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge.}$$

Beweis.

($\Rightarrow$) Es sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Daraus folgt

$$\forall n, m \geq n_0 : \quad |x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $(x_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge.

($\Leftarrow$) Es sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Nach Lemma 7.11 ist $(x_n)_n$ beschränkt. Ist $(x_n)_n$ eine $\mathbb{R}$ -Folge, so existiert nach Satz 7.5 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und $a \in \mathbb{R}$ mit

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}. \tag{*}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq n_0 : \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und wegen (*) existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall k \geq k_0 : \quad |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad n_{k_0} \geq n_0.$$

Daraus folgt

$$\forall n \geq n_0 : \quad |x_n - a| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_{k_0}}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_{k_0}} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Wir betrachten nun den Fall, dass $(x_n)_n$ eine $\mathbb{C}$ -Folge ist: Dazu sei $z_n = x_n + i \cdot y_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$(z_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow (x_n)_n$ und $(y_n)_n$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

$\stackrel{7.12}{\Leftrightarrow}_{\text{in } \mathbb{R}} (x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergieren in $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (z_n)_n$ konvergiert in $\mathbb{C}$. □

Vorsicht 7.13.

(a) In $\mathbb{Q}$ gelten die folgenden Sätze nicht:

- Satz 6.3 (Monotonie und Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz),
- Satz 7.5 (von Bolzano-Weierstraß),
- Satz 7.12 (Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ konvergente Folge).

Bei diesen Sätzen wird nämlich (indirekt) die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwendet.

(b) Es sei (x_n) gegeben durch

$$x_n := \sqrt{n}.$$

$(x_n)_n$ ist dann bestimmt divergent gegen $+\infty$. Außerdem gilt:

$$x_{n+1} - x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere gewährleistet dann

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$$

nicht die Cauchy-Eigenschaft.

8 Funktionen

Man betrachte die folgende ‚Definition‘: Seien A und B zwei Mengen mit $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist eine Zuordnung, die jedem $a \in A$ genau ein $b = f(a) \in B$ zuweist. Insbesondere ergibt sich der *Funktionsgraph* G gegeben durch

$$G = G(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}.$$

Hierbei sind wir mit dem folgenden Problem konfrontiert: Was ist eigentlich eine Zuordnung? Zur Klärung dient dann die folgende ‚richtige‘ Definition:

Definition 8.1. Eine Funktion von A nach B ist eine Teilmenge $G \subset A \times B$ mit der Eigenschaft:

Für jedes $a \in A$ gibt es *genau ein* $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.

LINK: [TEIL 1 DER 11. VORLESUNG VOM 18.11.2021](#)

Setze dann $f(a) = b$ (eindeutig) und identifiziere die nun wohldefinierte Zuordnung

$$f: A \rightarrow B, \quad a \mapsto f(a) = b,$$

mit dem Graphen G . A heißt *Definitionsbereich* und B heißt *Wertebereich* von f .

Beispiel 8.2. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$. Dann definieren wir

$$p_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto p_n(z) = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{j=0}^n a_j z^j$$

und nennen p_n eine (komplexe) *Polynomfunktion* der Ordnung n .

Spezialfälle sind gegeben durch:

- $n = 0$:
Dann ist

$$p_0(z) = a_0 \in \mathbb{C}$$

eine konstante Funktion.

- $n = 1$:
Dann ist

$$p_1(z) = a_0 + a_1 \cdot z$$

eine (affin-)lineare Funktion.

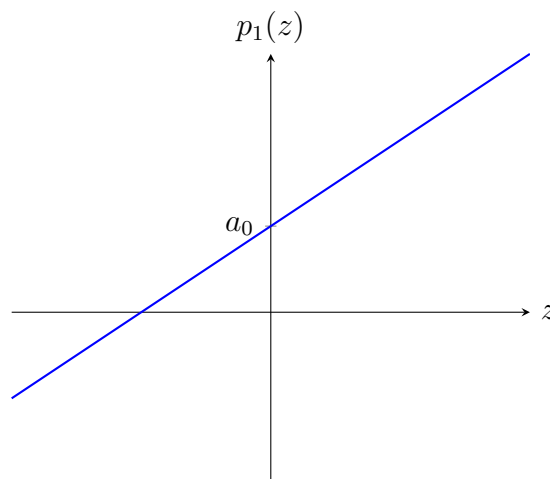


Abbildung 4: Ein Beispiel einer affin-linearen Funktion in $\mathbb{R}$ für $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, mit ‚Steigung‘ a_1 .

Insbesondere ist eine solche Funktion genau dann bijektiv, wenn $a_1 \neq 0$ ist.

Ist weiter $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, dann ist $p_1(z) = z = \text{id}(z)$ die Identitätsabbildung.

- Dann ist

$$p_2(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2$$

eine quadratische Funktion.

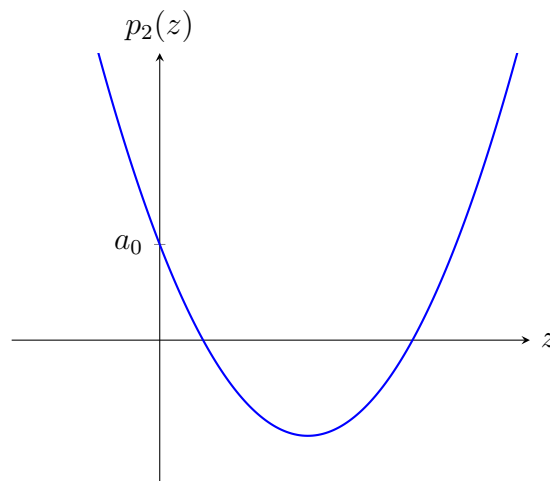


Abbildung 5: Ein Beispiel einer quadratischen Funktion in $\mathbb{R}$.

Beispiel 8.3. Es seien p_n und q_m , gegeben durch

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{und} \quad q_m(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j,$$

Polynome in $\mathbb{R}$ der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $m \in \mathbb{N}_0$. Setze dann

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}.$$

f heißt dann *rationale Funktion*.

Was ist ein legitimer Definitionsbereich von f ? Wir betrachten hierfür reelle Argumente:
Die Menge

$$A = D(f) = \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\}$$

ist der größtmögliche Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$.

Beispiel 8.4.

(a) Es sei f gegeben durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|.$$

f heißt dann *Betragsfunktion*.

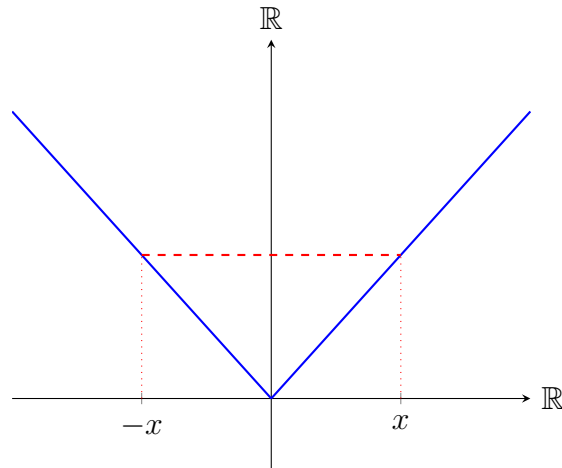


Abbildung 6: Der Graph von $|x|$ in $\mathbb{R}^2$.

Die Funktion f ist nicht injektiv: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(x) = |x| = f(-x)$, aber $x \neq -x$. Außerdem ist f nicht surjektiv: Es gilt

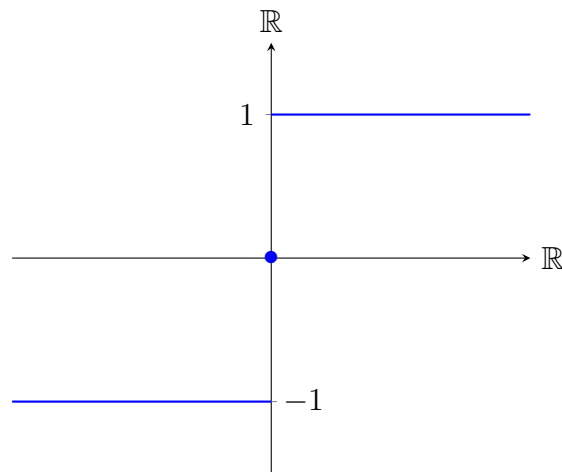
$$f(\mathbb{R}) := \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty) \neq \mathbb{R},$$

wobei $f(\mathbb{R})$ das *Bild* von f bzw. das Bild der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ unter f bezeichnet.

(b) Es sei f gegeben durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

f heißt dann *Signumfunktion*.

Abbildung 7: Der Graph der Signumfunktion in $\mathbb{R}^2$.

(c) Es sei f gegeben durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

f heißt dann *Heaviside-Funktion*.

Beispiel 8.5.

(a) Die *Dirichlet-Funktion* D wird definiert durch

$$D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Alternative Schreibweisen für D sind $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ oder $\chi_{\mathbb{Q}}$.

(b) Es sei f definiert durch

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Dann heißt f *Stammbruchfunktion*.

Wie bei Folgen lassen sich $\mathbb{R}$ - und $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen zu neuen Funktionen kombinieren:

Definition 8.6. Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Setze dann

$$f + g: M \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$\lambda f: M \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x),$$

$$f \cdot g: M \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f}{g}: M \setminus \{x \in M : g = 0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$|f|: M \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto |f|(x) := |f(x)|.$$

Insbesondere ist $\{f: M \rightarrow \mathbb{C}\}$ ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Für $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ können wir auch Folgendes definieren:

$$\max\{f, g\}: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\},$$

$$\min\{f, g\}: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min\{f, g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Außerdem schreiben wir $f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in M$.

Damit sind alle Kombinationen und Relationen von Funktionen über ihre punktweise Auswertung definiert.

Beispiel 8.7. Es sei f definiert durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Im Video:
Beispiel
8.6

Sobald $n \geq |x| + 1$ gilt, ist $1 + \frac{x}{n} > 0$, also $\exp(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

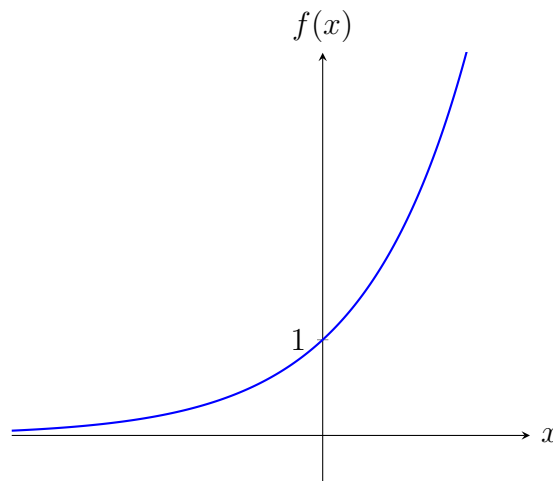
Dabei gilt

$$x = 0 \Rightarrow \exp(0) = 1 > 0,$$

$$\begin{aligned} x \neq 0 &\stackrel{6.5}{\Rightarrow} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right)_{n \geq |x|+1} \text{ streng isoton} \\ &\Rightarrow \exp(x) > 0, \end{aligned}$$

$$x > 0 \Rightarrow \exp(x) > \exp(0) = 1 > 0.$$

Also kann die Exponentialfunktion auch definiert werden durch $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$.

Abbildung 8: Der Graph von $\exp(x)$.

Satz 8.8 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Im Video:
Satz 8.7

Unter einer leichten Zusatzbedingung ist $\exp$ sogar die einzige Funktion, die diese Gleichung erfüllt.

Insbesondere gilt:

$$\exp(-x) = \left(\underbrace{\exp(x)}_{>0} \right)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Als Vorbereitung für den Beweis des Satzes formulieren wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

Lemma 8.9.

(i) Es sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1.$$

(ii) Falls eine $\mathbb{R}$ -Folge $(\alpha_n)_n$ beschränkt ist, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha_n}{n^2} \right)^n = 1.$$

Im Video:
Lemma 8.8

LINK: TEIL 2 DER 11. VORLESUNG VOM 18.11.2021

Beweis.

(i) Nach Voraussetzung existiert zu $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad 0 < \alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sqrt[n]{\alpha - \varepsilon}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \underbrace{\sqrt[n]{\alpha + \varepsilon}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1}.$$

Damit liefert das Sandwich-Argument (s. Satz 5.14 (e)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1.$$

(ii) Da $(\alpha_n)_n$ beschränkt ist, existieren $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a \leq \alpha_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |a| + 1$:

$$1 + \frac{a}{n^2} \leq 1 + \frac{\alpha_n}{n^2} \leq 1 + \frac{b}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{\alpha_n}{n^2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{b}{n^2}\right)^n.$$

Man merke zusätzlich an, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(a) > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(b) > 0,$$

da eine Teilfolge einer konvergenten Folge (hier: $n_k = k^2$) ebenfalls gegen denselben Grenzwert konvergiert. Damit erhält man

$$\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^n = \underbrace{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{n^2}}}_{\substack{\text{8.9 (i)} \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1}} \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{b}{n^2}\right)^n = \underbrace{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{b}{n^2}\right)^{n^2}}}_{\substack{\text{8.9 (i)} \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1}}.$$

Das Sandwich-Argument liefert damit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha_n}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{\alpha_n}{n^2}\right)^{n^2}} = 1. \quad \square$$

Nachdem nun das Lemma gezeigt worden ist, kann man sich dem Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion widmen:

Beweis von Satz 8.8. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Setze weiter

$$\alpha_n := \frac{xy}{1 + \frac{x+y}{n}}.$$

Im Video:
Satz 8.7

Dann gilt

$$\underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp(x)} \underbrace{\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp(y)} = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \left(1 + \frac{xy}{n^2 + n(x+y)}\right)^n \\
&= \underbrace{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(x+y)} \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha_n}{n^2}\right)^n}_{\substack{\text{8.9 (ii)} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right) = \exp(x) \exp(y)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right) = \exp(x+y)$$

und damit die Behauptung. □

Korollar 8.10. Für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(r) = e^r.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(n) = \exp\left(\sum_{i=1}^n 1\right) \stackrel{8.8}{=} \prod_{i=1}^n \underbrace{\exp(1)}_e = e^n.$$

Damit gilt die Aussage zumindest für $r \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^q \frac{1}{q} \\
\Rightarrow e &= \exp(1) = \exp\left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{q}\right) \stackrel{8.8}{=} \prod_{i=1}^q \exp\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q \\
\Rightarrow \exp\left(\frac{1}{q}\right) &= \sqrt[q]{e}.
\end{aligned}$$

Setze nun $r := \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{q}\right) = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p = e^{\frac{p}{q}},$$

also

$$\exp(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty).$$

Im Video:
Korollar
8.9

Für $-r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ gilt entsprechend

$$\exp(-r) = (\exp(r))^{-1} = (e^r)^{-1} = e^{-r}.$$

Damit gilt die Aussage in ganz $\mathbb{Q}$. □

Damit haben wir einen eindeutigen Bezug zwischen der Eulerschen Zahl und der Exponentialfunktion in den rationalen Zahlen gezeigt. Dies motiviert:

Definition 8.11. Für $x \in \mathbb{I}$ setze

$$e^x := \exp(x).$$

Damit gilt

$$\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Insbesondere ist damit der Begriff der „Exponentialfunktion“ berechtigt.

Definition 8.12.

- (a) Es seien A, B, C, D nichtleere Mengen und $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$ Funktionen mit

$$f(A) = \{f(a) \in B : a \in A\} \subset C.$$

Definiere dafür die *Komposition* oder *Verkettung* von g nach f durch

$$g \circ f: A \rightarrow D, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in C}) \in D.$$

- (b) Ist $f: A \rightarrow B$ *bijektiv*, so existiert für alle $b \in B$ *genau ein* $a \in A$ mit $b = f(a)$. Somit ist eine Funktion $b \mapsto a$ definiert. Diese bezeichnen wir mit

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

und nennen sie *Umkehrfunktion* oder *Inverse* zu f . Insbesondere gilt

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) \stackrel{\text{Def.}}{=} a \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = f(a) \stackrel{\text{Def.}}{=} b.$$

Damit gilt für die Verkettung einer bijektiven Funktion f mit ihrer Inversen:

$$f^{-1} \circ f: A \rightarrow A, \quad a \mapsto f^{-1}(f(a)) = a,$$

$$f \circ f^{-1}: B \rightarrow B, \quad b \mapsto f(f^{-1}(b)) = b.$$

- (c) Für jedes $f: A \rightarrow B$ und $C \subset B$ ist die *Urbildmenge* definiert durch

$$f^{-1}(C) := \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

Ist $B = \mathbb{R}$ und $C \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so nennt man $f^{-1}(C)$ auch *Niveaumenge* von C bezüglich f .

Im Video:
Definitio-
on 8.10

Im Video:
Definitio-
on 8.11

Beispiel 8.13.(a) Es sei f definiert durch

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto f(x) := x^2.$$

Dann ist f bijektiv: Ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(b) Es sei f definiert durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^3.$$

Dann ist f bijektiv: Ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f^{-1}(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Man teste dies für $x < 0$: Es gilt

$$\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 = (-1)^3 \left(\sqrt[3]{-x}\right)^3 = -(-x) = x.$$

(c) Es sei f definiert durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^4.$$

 f ist nicht bijektiv: Es gilt $f(2) = 16 = f(-2)$. Weiter ist

$$f^{-1}([1, 16]) = [-2, -1] \cup [1, 2] \quad \text{und} \quad f^{-1}([-16, -1]) = \emptyset.$$

Definition 8.14. Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f

- *isoton* auf A genau dann, wenn

$$\forall x, y \in A: \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y),$$

- *antiton* auf A genau dann, wenn

$$\forall x, y \in A: \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y),$$

- *streng isoton* auf A genau dann, wenn

$$\forall x, y \in A: \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y),$$

- *streng antiton* auf A genau dann, wenn

$$\forall x, y \in A: \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y),$$

Im Video:
Beispiel
8.12

Im Video:
Definiti-
on 8.13

- *monoton* genau dann, wenn f isoton oder antiton ist,
- *streng monoton* genau dann, wenn f streng isoton oder streng antiton ist.

Ist $B \subset A$, so bezeichnet $f|_B$ die *Einschränkung* von f auf B . Sie ist gegeben durch

$$f|_B: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f|_B(x) = f(x).$$

LINK: [TEIL 1 DER 12. VORLESUNG VOM 22.11.2021](#)

Beispiel 8.15.

- (a) Die folgenden Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind streng isoton:

$$f(x) = a \cdot x, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = a \cdot x^{2k+1}, \quad \text{für } a > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Dementsprechend ist die Abbildung $g(x) := f(-x) = -f(x)$ streng antiton.

- (b) Die Funktion $f = \text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R}$ ist isoton, aber nicht streng isoton.
- (c) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ ist nicht monoton. Dagegen ist die Einschränkung $f|_{(-\infty, 0]}$ streng antiton und $f|_{[0, \infty)}$ streng isoton.
- (d) Für $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann ist f nicht monoton auf $\mathbb{R}^*$. Dagegen sind die beiden Einschränkungen $f|_{(-\infty, 0)}$ und $f|_{(0, \infty)}$ streng antiton.

Im Video:
Beispiel
8.14

Lemma 8.16. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ mit $A \neq \emptyset$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ streng isoton. Dann ist f injektiv und die Abbildung*

$$g: A \rightarrow f(A), \quad x \mapsto g(x) = f(x),$$

Im Video:
Lemma
8.14 $\frac{1}{2}$

ist bijektiv.

Beweis. Es seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Dann ist $x < y$ oder $x > y$. Falls $x < y$, so folgt wegen der strengen Isotonie von f , dass $f(x) < f(y)$. Analog folgt für $x > y$, dass $f(x) > f(y)$. Insbesondere gilt bei beiden Fällen $f(x) \neq f(y)$ und es folgt die Injektivität von f .

Ist $z \in f(A)$, so existiert ein $a \in A$ mit $z = f(a) = g(a)$. Damit ist g zusätzlich surjektiv und somit bijektiv. $\square$

9 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Bei Folgen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir bereits das Verhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

untersucht. Bei Funktionen ist beispielsweise auch der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

interessant: Existiert der Limes? Stimmt dieser mit dem Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right)$$

überein?

Definition 9.1. Es sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$ und $b \in \mathbb{R}$ oder $b = \infty$. Sei weiter $x_0 \in I$, oder $x_0 = a$ oder $x_0 = b$, und $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir definieren:

- f besitzt in x_0 den *rechtsseitigen Limes / Grenzwert* $c_+ \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \in I, \quad x_n > x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

das Folgende gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c_+.$$

- f besitzt in x_0 den *linksseitigen Limes* $c_- \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \in I, \quad x_n < x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

das Folgende gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c_-.$$

Dafür schreiben wir dann

$$c_+ = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x) = f(x_{0+})$$

bzw.

$$c_- = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x) = f(x_{0-}).$$

f besitzt in x_0 den *Limes* $c \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c = \lim_{x \searrow x_0} f(x),$$

das heißt, dass f sowohl den rechtsseitigen Limes c_+ als auch den linksseitigen Limes c_- besitzt und dass zusätzlich $c_- = c = c_+$ gilt. Wir schreiben dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c.$$

Erläuterung zu den Randpunkten:

- Ist $\begin{matrix} x_0 = a \\ x_0 = b \end{matrix}$, so kann nur der $\begin{matrix} \text{rechtsseitige} \\ \text{linksseitige} \end{matrix}$ Limes existieren.
- Ist $\begin{matrix} x_0 = a = -\infty \\ x_0 = b = \infty \end{matrix}$, so schreiben wir

$$c = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} \quad \text{für} \quad c = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow b} f(x)}.$$

Ist $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, so kann auch $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \pm\infty$ vorkommen: Dies gilt genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \in I, \quad x_n < x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

die Folge $(f(x_n))_n$ bestimmt divergent gegen $\pm\infty$ ist.

Analog:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Beispiel 9.2. Für $I = \mathbb{R}$ betrachte man die Heaviside-Funktion

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $x_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$:

$$\lim_{x \nearrow x_0} H(x) = H(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} H(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} H(x).$$

LINK: [TEIL 2 DER 12. VORLESUNG VOM 22.11.2021](#)

Dagegen ist für $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0, \quad \text{aber} \quad \lim_{x \searrow 0} H(x) = 1 = H(0).$$

Also existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ nicht.

Analog gilt für die Signumfunktion $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, dass

$$x_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \text{sgn}(x) = \text{sgn}(x_0)$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} \text{sgn}(x) = -1 \neq \text{sgn}(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \text{sgn}(x).$$

Man betrachte nun $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$$

und

$$\forall y \in \mathbb{R}^* : \quad \lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Nun sei

$$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2, \quad \text{denn} \quad \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Betrachte nun für $p, q \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$h: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) := \frac{x^p - 1}{x^q - 1}.$$

Nach Beispiel 5.15 (8) gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{p}{q}.$$

Satz 9.3 (Rechenregeln für Limiten). *Es seien $a, b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \{a\} \cup I \cup \{b\}$ sowie $f, g, h: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen. Wir nehmen weiter an, dass*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = d.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = c + d,$
- (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$ und
- (c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{c}{d},$ falls zusätzlich $d \neq 0 \in \mathbb{C}.$

Falls f, g, h $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen sind, so gelten auch:

- (d) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad c \leq d,$
- (e) *Falls $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ und $c = d$ gilt, so gilt auch*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = c.$$

Beweis. Der Beweis folgt aus den entsprechenden Aussagen für Folgen (vgl. Satz 5.14). $\square$

Entsprechende Aussagen gelten außerdem analog für rechtsseitige und linksseitige Limiten. Diese sind jedoch nicht (direkt) anwendbar, falls f, g, h $\mathbb{R}$ -wertig sind und $c, d \in \{-\infty, \infty\}$.

Beispiel 9.4.

(a) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt{x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_n \cdot b_m \neq 0$ sei

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}, \quad \text{wobei} \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{j=0}^m b_j x^j \neq 0 \right\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty, & \text{falls } n > m, \\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{falls } n = m, \\ 0, & \text{falls } n < m. \end{cases}$$

(c) Es sei $f = \exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $E_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(x)$. Die Folge $(E_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert strikt isoton für $x > 0$, insbesondere gilt:

$$\exp(x) > E_{n+1}(x) > E_1(x) = 1 + x.$$

Es gilt also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) \stackrel{8.8}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

(d) Es sei $M \in \mathbb{Z}$ und

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^M \cdot \exp(x).$$

Falls $M \geq 0$ ist, so sieht man, dass

$$f(x) \geq \exp(x) \quad \text{für } x \geq 1,$$

also $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Falls $-m =: M < 0$ gilt, so erhält man mit

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{x^{k-m}}{k!}}_{>0}$$

einen isotonen Grenzwert. Es folgt

$$f(x) \geq E_{m+1}(x) \cdot x^{-m} > \frac{x^{m+1-m}}{(m+1)!} = \frac{x}{(m+1)!} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty,$$

also $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Damit wächst $\exp(x)$ für $x \rightarrow \infty$ schneller, als x^{-m} schrumpft.

Bei der Betrachtung des Grenzwertes für $x \rightarrow 0$ erhält man entsprechend

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^M \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x)}_{=1} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } M < 0, \\ 1, & \text{falls } M = 0, \\ 0, & \text{falls } M > 0. \end{cases}$$

Nachdem nun Grenzwerte für Funktionen soweit geklärt worden sind, folgt der zweite Teil dieses Abschnitts, der sich mit der *Stetigkeit* von Funktionen beschäftigt:

Definition 9.5. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sagt man:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$\begin{aligned} f \text{ ist unstetig in } x_0 &:\Leftrightarrow x_0 \text{ ist eine Unstetigkeits- oder Sprungstelle von } f \\ &:\Leftrightarrow f \text{ ist nicht stetig in } x_0 \end{aligned}$$

$$f \text{ ist rechtsstetig in } x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$f \text{ ist linksstetig in } x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$f \text{ ist stetig auf } I \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ ist stetig in } x_0 \text{ für jedes } x_0 \in I,$$

$$f \text{ ist rechtsstetig auf } I \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ ist rechtsstetig in } x_0 \text{ für jedes } x_0 \in I,$$

$$f \text{ ist linksstetig auf } I \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ ist linksstetig in } x_0 \text{ für jedes } x_0 \in I.$$

Ist $x_0 = \min I$, so gilt

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist rechtsstetig in } x_0,$$

denn es existiert keine isotone Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n \in I \quad \text{und} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0.$$

Beispiel 9.6. Die Identitätsfunktion $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}(x) = x$, ist stetig in jedem $x = x_0$.

Die Heaviside-Funktion $H: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ ist stetig in x_0 für alle $x_0 \neq 0$. Sie ist unstetig in $x_0 = 0$, aber dafür rechtsstetig. Daraus folgt, dass H rechtsstetig auf $\mathbb{R}$ ist, aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ betrachte nun

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}.$$

Für $n \geq k$ ist f ein Polynom und

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := f(x),$$

ist eine stetige Fortsetzung von f , das heißt, dass:

$$\mathbb{R} = D(g) \supset \mathbb{R}^* = D(f) \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Definition 9.7 (Fortsetzung). Es seien A, B, C Mengen mit $A \neq \emptyset$ und $A \subset C$, und $f: A \rightarrow B$ und $g: C \rightarrow B$ Funktionen. Dann heißt g *Fortsetzung von f* , falls:

$$\forall x \in A: \quad g(x) = f(x) \quad \text{bzw.} \quad g|_A = f.$$

Für $n < k$ ist dagegen

$$f(x) = x^{n-k} = \frac{1}{x^{k-n}}$$

nicht *stetig* auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar: So kann man natürlich beispielsweise g definieren durch

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist aber dieses g nicht stetig in $x = 0$: Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{k-n}} = \infty,$$

aber

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(-x) = \lim_{x \searrow 0} (-1)^{n-k} \frac{1}{x^{k-n}} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } n-k \text{ gerade,} \\ -\infty, & \text{falls } n-k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

So gilt beispielsweise

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \infty$$

und

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty.$$

LINK: [TEIL 1 DER 13. VORLESUNG VOM 25.11.2021](#)

Bei der Betrachtung der Definition 9.5 der Stetigkeit stoßen wir relativ schnell auf ein Problem: Für die Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ müssen nämlich alle konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ betrachtet werden. Aus diesem Grund ist es für die Berechnung des Grenzwertes oft hilfreich, eine alternative Umformulierung zu nutzen:

Satz 9.8 (ε - δ -Kriterium für Stetigkeit). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Für $x_0 \in I$ ist dann äquivalent:*

- (i) f ist stetig in x_0 .
- (ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ derart, dass Folgendes gilt:

$$\forall x \in I: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

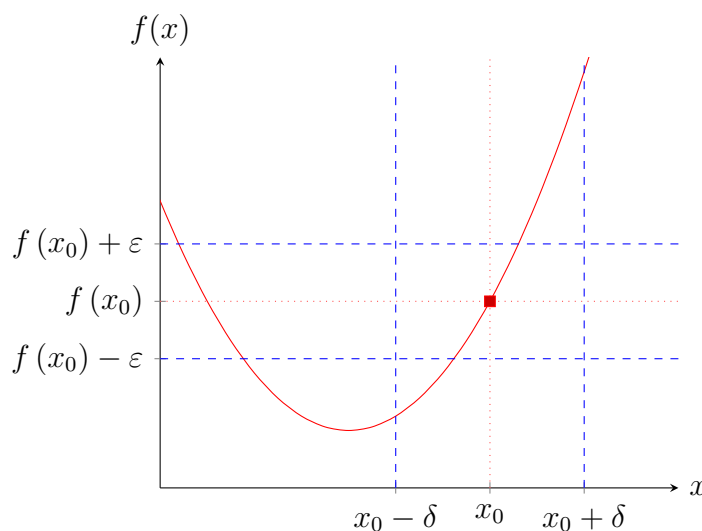


Abbildung 9: Illustration einer stetigen Abbildung f gemäß des ε - δ -Kriteriums. Man bemerke dabei – ähnlich wie bei der Definition der Folgenkonvergenz – die δ -Umgebung um x_0 sowie die ε -Umgebung um $f(x_0)$.

Beweis.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiter $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in I$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_0.$$

Nach (ii) gilt dann insbesondere

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Da $(x_n)_n$ beliebig gewählt ist, ist f somit stetig in x_0 .

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wir zeigen „ $\neg(\text{ii}) \Rightarrow \neg(\text{i})$ “: Angenommen, es gelte (ii) nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $\delta > 0$ ein $x'_\delta \in I$ existiert mit

$$|x'_\delta - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x'_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wähle nun für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta_n := \frac{1}{n} > 0.$$

Dann existiert ein $x_n := x'_{\delta_n}$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0.$$

Damit gilt zwar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, aber $(f(x_n))_n$ konvergiert *nicht* gegen $f(x_0)$, weshalb f nicht stetig ist. $\square$

Beispiel 9.9.

(1) Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := |x|.$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$: Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Wähle nun $\delta := \varepsilon$. Dann folgt wegen Satz 9.8 direkt:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann, ist somit f stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

(2) Man betrachte nun die Funktion

$$D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Dann ist D in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig: Sei dazu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert zu jedem $\delta > 0$

(a) ein $x \in \mathbb{I}$, falls $x_0 \in \mathbb{Q}$, und

(b) ein $x \in \mathbb{Q}$, falls $x_0 \in \mathbb{I}$.

Mit $|x - x_0| < \delta$ erhält man dann:

$$|D(x) - D(x_0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann, ist somit D unstetig auf ganz $\mathbb{R}$.

(3) Man betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x \cdot D(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Dann ist f stetig in $x_0 = 0$: Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x \cdot D(x)| \leq |x|.$$

Wähle nun $\delta := \varepsilon$ und es folgt wegen Satz 9.8 direkt:

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

f ist also stetig in $x_0 = 0$.

(4) Man betrachte die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \text{ ggT}(p, q) = 1, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Dann ist f stetig in allen Punkten $x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$: Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $q_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{1}{q} < \varepsilon \quad \forall q \geq q_0.$$

Dann ist

$$M := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : \frac{1}{q} \geq \varepsilon, \quad p \in \mathbb{N} \right\} \subset \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : q < q_0, \quad p \leq q_0 \right\}$$

eine endliche Menge. Damit existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M = \emptyset,$$

da $x_0 \notin M$. Ist nun $x \in [0, 1]$ mit $|x - x_0| < \delta$, so gilt:

(a) Falls $x \notin \mathbb{Q}$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \varepsilon.$$

(b) Falls $x \in \mathbb{Q}$: Dann ist $x \notin M$ und es muss damit $\frac{1}{q} < \varepsilon$ gelten. Folglich erhält man

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{q} - 0 \right| = \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

Also ist f stetig für alle $x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

┌ Übung: Untersuchen Sie die Stetigkeit von f in $x_0 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. ┐

Satz 9.10. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in I . Ist $f(x_0) > 0$, so existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I.$$

Analog existiert für $f(x_0) < 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $f(x_0) > 0$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}f(x_0) > 0$. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall x \in I: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

┌ Diese Aussage ist äquivalent zu: ┐

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \cap I: \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

┐

Damit folgt für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) \geq f(x_0) - \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\leq \varepsilon} \geq f(x_0) - \varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0,$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Satz 9.11. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $g: I \rightarrow J$ stetig in $x_0 \in I$ und $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $g(x_0) \in J$. Dann ist $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in x_0 .

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Da g stetig in $x_0 \in I$ ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(x_0).$$

Also ist $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Aufgrund der Stetigkeit von f in $g(x_0)$ folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)\right) = f(g(x_0)),$$

also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(x_0).$$

□

LINK: [TEIL 2 DER 13. VORLESUNG VOM 25.11.2021](#)

Satz 9.12. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in I$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Funktionen stetig auf x_0 :

- (i) $f + g$,
- (ii) $f \cdot g$,
- (iii) $|f|$,
- (iv) $\frac{f}{g}$, falls $g(x_0) \neq 0$, und
- (v) $\lambda \cdot f$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sind f und g reellwertig, dann sind zusätzlich die folgenden Funktionen stetig in x_0 :

- (vi) $\min\{f, g\}$ und
- (vii) $\max\{f, g\}$.

Beweis. Übung! (Tipp: Satz 9.3)

Beispiel 9.13.

- (1) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$i \cdot f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto i \cdot f(x),$$

stetig in x_0 .

- (2) Nach Beispiel 9.6 ist die Identitätsfunktion

$$\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x,$$

stetig auf $\mathbb{R}$. Nach Satz 9.12 ist dann auch

$$m_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto m_n(x) := x^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

stetig in $\mathbb{R}$. Insbesondere sind dadurch alle Polynome stetig auf $\mathbb{R}$.

Definition 9.14.

(1) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f

- *nach oben beschränkt*, falls $f(I)$ von oben beschränkt ist, also:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad f(x) \leq M \quad \forall x \in I.$$

Insbesondere ist $M = \sup f(I) = \sup_{x \in I} f(x)$.

- *nach unten beschränkt*, falls

$$\exists m \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq m \quad \forall x \in I.$$

Insbesondere ist $m = \inf f(I) = \inf_{x \in I} f(x)$.

- *beschränkt*, falls f nach oben und nach unten beschränkt ist.

(2) Ist f komplexwertig, also $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, dann heißt f beschränkt, falls:

$$\exists K > 0 : \quad |f(x)| \leq K \quad \forall x \in I.$$

Satz 9.15 (Satz vom Minimum und Maximum). *Es sei $I := [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf I stetige Funktion. Dann existieren $x_1, x_2 \in I$ mit*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in I.$$

Man schreibt dann auch:

$$f(x_1) = \min_{x \in I} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_2) = \max_{x \in I} f(x).$$

Insbesondere ist dadurch f beschränkt auf I .

Beweis. Wir zeigen den Beweis für die Existenz des Maximums; der Beweis für das Minimum erfolgt analog unter Betrachtung von Beschränktheit nach unten.

Zeige zunächst, dass f nach oben beschränkt ist: Angenommen, f sei auf I *nicht* nach oben beschränkt. Dann existiert eine (beschränkte) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ mit

$$f(x_n) > n \quad \forall x_n \in \mathbb{N}.$$

Da $(x_n)_n$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz 7.5 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset I$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in I.$$

Da f stetig ist, erhält man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}}_{\in I}\right) \in \mathbb{R},$$

was im Widerspruch zu der Annahme steht, dass f nach oben unbeschränkt ist. Also muss f nach oben beschränkt sein.

Da f nach oben beschränkt ist, ist $A := f(I)$ eine nach oben beschränkte Menge und es existiert das Supremum

$$s := \sup A = \sup f(I) = \sup_{x \in I} f(x).$$

Nach Aufgabe 4 aus Blatt 7 der Übung zur Analysis I (Lehramt) existiert also eine Folge $(y_n)_n$ in I mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = s.$$

Da nach dem Satz 7.5 von Bolzano-Weierstraß wieder eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset I$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_2 \in I.$$

Da f stetig ist, erhält man dann

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}\right) = f(x_2).$$

Wegen $x_2 \in I$ gilt insbesondere $f(x_2) \in \mathbb{R}$ und damit

$$f(x_2) = \sup_{x \in I} f(x) = \max_{x \in I} f(x). \quad \square$$

Bemerkung.

- (1) Für Satz 9.15 ist die Stetigkeit von f essentiell: Betrachte für $a = 0$ und $b = 2$ die Funktion

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{falls } x = 1, \\ x - 2, & \text{falls } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

f ist wegen $-1 < f(x) < 1$ für alle $x \in [0, 2]$ beschränkt, aber aufgrund ihrer Unstetigkeit in $x_0 = 1$ nimmt sie kein Maximum bzw. Minimum an.

- (2) Im Allgemeinen Satz 9.15 für unbeschränkte Intervalle nicht: Ist $I = [1, \infty)$ und

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{x},$$

so gilt $f(I) = (0, 1]$, also $0 = \inf f(I) \notin I$.

- (3) Ebenso gilt Satz 9.15 im Allgemeinen nicht für offene Intervalle: Für $I = (0, 1)$ und

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{x},$$

ist $f(I) = (1, \infty)$; hier nimmt f das Maximum nicht an.

Satz 9.16 (Nullstellensatz). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter gelte entweder $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$.*

Dann besitzt f eine Nullstelle, das heißt, es existieren $x_0 \in (a, b)$ derart, dass

$$f(x_0) = 0.$$

Beweis. Beweis mit dem Bisektionsverfahren: Nehme dazu o.B.d.A an, dass

$$f(a) < 0 < f(b) \quad (\text{Ansonsten: Betrachte } -f).$$

Es sei $I_0 = I$ und $l = b - a$. Induktiv zeigt man, dass Intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ derart existieren, dass

$$f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k), \quad I_{k+1} \subset I_k \quad \text{und} \quad |I_k| = b_k - a_k = l \cdot 2^{-k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (*)$$

Nach Konstruktion erfüllen die Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(b_k)_k$ folgende Eigenschaften: $(a_k)_k$ isoton, $(b_k)_k$ antiton und

$$a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit $(*)$ werden die Bedingungen von Aufgabe 4 auf Blatt 5 der Übung zur Analysis I (Lehramt) erfüllt: Damit existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

Da f stetig auf $[a, b]$ (und damit auch insbesondere in x_0), erhält man

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) \\ &= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k). \end{aligned}$$

Wegen $(*)$ gilt weiter

$$f(a_k) \cdot f(b_k) \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

und es folgt

$$(f(x_0))^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(a_k) \cdot f(b_k)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0,$$

was zu zeigen war. □

LINK: [TEIL 1 DER 14. VORLESUNG VOM 29.11.2021](#)

Wiederholung. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall – I besitzt also mindestens 2 Punkte. Dann ist

$$V = \{f: I \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ist stetig}\}$$

ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum (vgl. Satz 9.12) unendlicher Dimension. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$3P_n = \left\{ f: I \rightarrow \mathbb{K} : \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} : f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\}$$

ein $(n+1)$ -dimensionaler Untervektorraum von V .

Betrachten wir wieder den Beweis des Nullstellensatzes 9.16, in welchem auf das Bisektionsverfahren zurückgegriffen worden ist. Tatsächlich ist dieses Verfahren konstruktiv: Es erlaubt, die Nullstelle einer stetigen Funktion approximativ zu berechnen; allerdings ist das Verfahren relativ langsam.

Daran anlehnend betrachten wir mit dem folgenden Satz eine Verallgemeinerung des Nullstellensatzes:

Satz 9.17 (Zwischenwertsatz). *Seien $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie*

$$G = \max_{x \in I} f(x), \quad k = \min_{x \in I} f(x).$$

Dann nimmt f jeden Wert in $[k, G]$ an: Es gilt also

$$f(I) = [k, G]$$

bzw.

$$\forall y \in [k, G] \quad \exists x \in I : f(x) = y.$$

Beweis. Nach dem Satz 9.15 vom Minimum und Maximum existieren $x_+, x_- \in I$ mit

$$f(x_+) = G \quad \text{und} \quad f(x_-) = k.$$

Man betrachte nun die folgende Fallunterscheidung:

- $G = k$:
Dann ist die Funktion konstant es folgt direkt die Behauptung.
- $G > k$:
Es sei also $k < y < G$ und

$$g: I \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) := f(x) - y$$

eine Hilfsfunktion. Damit ist g als Komposition stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Weiter gilt

$$g(x_+) = f(x_+) - y = G - y > 0 \quad \text{und} \quad g(x_-) = f(x_-) - y = k - y < 0.$$

Nach dem Nullstellensatz 9.16 existiert dann ein $x_0 \in I$ derart, dass

$$0 = g(x_0) = f(x_0) - y \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = y. \quad \square$$

Beispiel. Es sei $I = [0, 1]$ und

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^3 + x - 1.$$

Es gilt $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$. Nach dem Nullstellensatz 9.16 besitzt f dann eine Nullstelle in $(0, 1)$. Da f außerdem streng isoton ist, ist die Nullstelle insbesondere *eindeutig*.

Bemerkung. Es seien f, g und $h = g \circ f$ Funktionen. Dann besagt Satz 9.11:

$$f, g \text{ stetig} \Rightarrow h \text{ stetig}.$$

Damit stellt sich nun die folgende Frage: Gilt auch die folgende Implikation

$$f, h \text{ stetig} \Rightarrow g \text{ stetig?}$$

Dies motiviert den folgenden Satz:

Satz 9.18 (Stetige Inverse). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I \neq \emptyset$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) f ist injektiv $\Rightarrow f$ ist streng monoton.
- (b) Falls f isoton
antiton ist, so folgt, dass für $J = f(I)$ die Funktion

$$g: I \rightarrow J, \quad x \mapsto g(x) := f(x),$$

bijektiv, J ein Intervall sowie $g^{-1}: J \rightarrow I$ stetig und streng isoton
antiton ist.

Beweis.

- (a) Widerspruchs-Annahme: Angenommen, f ist nicht streng monoton. Dann existieren $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ mit

$$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1) \quad \text{oder} \quad f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$$

oder

$$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2) \quad \text{oder} \quad f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

┌ Im Fall der Monotonie gilt nämlich

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \quad \text{oder} \quad f(x_3) < f(x_2) < f(x_1).$$

└

Wir betrachten für den Beweis den letzten Fall: Es seien also $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ mit

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

Nach dem Zwischenwertsatz 9.17 existiert dann ein $x \in (x_1, x_2)$ derart, dass

$$f(x) = f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2)),$$

was ein Widerspruch zu der Voraussetzung ist, dass f injektiv ist. Der Beweis für die anderen Fälle erfolgt analog.

- (b) Nach Lemma 8.16 ist $g: I \rightarrow J$ bijektiv. Der Zwischenwertsatz 9.17 impliziert außerdem, dass J ein Intervall ist.

Wir zeigen nun:

$$f \text{ ist strikt isoton} \Rightarrow g^{-1} \text{ ist strikt isoton.}$$

Angenommen, g^{-1} ist *nicht* strikt isoton: Es seien also $y_1 < y_2 \in J$, aber

$$g^{-1}(y_1) \geq g^{-1}(y_2).$$

Da f isoton ist, ist g isoton und es folgt

$$y_1 = g(g^{-1}(y_1)) \geq g(g^{-1}(y_2)) = y_2,$$

was ein Widerspruch ist. Also ist g^{-1} strikt isoton.

Wir zeigen nun, dass g^{-1} stetig in $y_0 \in J$ ist: Betrachte dazu eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Dann existiert wegen der Bijektivität von g genau eine Folge $(x_n)_n$ in I mit $y_n = f(x_n)$ und ein $x_0 \in I$ mit $y_0 = f(x_0)$.

Behauptung. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Beweis der Behauptung. (Durch Widerspruch): Angenommen, es existiere ein $\varepsilon > 0$ sowie eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset I$ derart, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_{n_k} \geq x_0 + \varepsilon \tag{1}$$

oder

$$x_{n_k} \leq x_0 - \varepsilon. \tag{2}$$

Betrachte nun den Fall (1): Da f isoton ist, gilt

$$f(x_{n_k}) \geq f(x_0 + \varepsilon) > f(x_0).$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhält man wegen der Stetigkeit von f

$$f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_0 + \varepsilon) > f(x_0),$$

was ein Widerspruch ist. Die Argumentation im Fall (2) erfolgt analog.

Damit ist g^{-1} stetig. □

Satz 9.19 (Stetigkeit von $\exp$). *Es sei $f := \exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Dann gilt:*

- (a) f ist streng isoton.
 (b) Für $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$|f(x) - 1| \leq e \cdot |x|.$$

- (c) f ist stetig.

Beweis.

- (a) Übung!
 (b) Es gilt

$$f(x) = \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}_{=: E_n(x)}.$$

Da $\frac{x^k}{k!} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $(E_n(x))_n$ eine isotone Folge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man dann

$$|E_n(x) - 1| = \sum_{k=1}^n \frac{|x|^k}{k!} \stackrel{|x| \leq 1}{\leq} |x| \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq e \cdot |x|.$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt dann

$$|f(x) - 1| = \lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(x) - 1| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e \cdot |x| = e \cdot |x|.$$

- (c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|e^{x+y} - e^x| = |e^x e^y - e^x| = |e^x (e^y - 1)| \stackrel{(b)}{\leq} |e^x| \cdot |e^y - 1| \leq e^x \cdot |y| e.$$

Zu beliebigem $\varepsilon \in (0, 1)$ und $x \in \mathbb{R}$ wähle nun $\delta = \frac{\varepsilon}{e^{x+1}}$ und für $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ folgt:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq e^{x+1} |x - \tilde{x}| < e^{x+1} \cdot \frac{\varepsilon}{e^{x+1}} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig. □

LINK: [TEIL 2 DER 14. VORLESUNG VOM 29.11.2021](#)

Bemerkung 9.20 (Eigenschaften der Exponentialfunktion).

- (1) Es gilt $\exp(0) = e^0 = 1$ mit $e := \exp(1)$.
 (2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad e^x \cdot e^y = e^{x+y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$

(3) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng isoton. Außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Damit liefert der Zwischenwertsatz 9.17:

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty).$$

Weiter ist $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4) Es gilt

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x)$$

mit

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{2.15}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}.$$

Aufgrund der Eigenschaft (3) aus Bemerkung 9.20 und Satz 9.18 ist

$$f = \exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

bijektiv. Damit existiert $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ist stetig sowie strikt isoton. Die Funktion wird im Folgenden definiert:

Definition 9.21. Die inverse Funktion $\exp^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zur Exponentialfunktion heißt *natürliche Logarithmusfunktion* oder *natürlicher Logarithmus* und wird durch

$$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

gekennzeichnet.

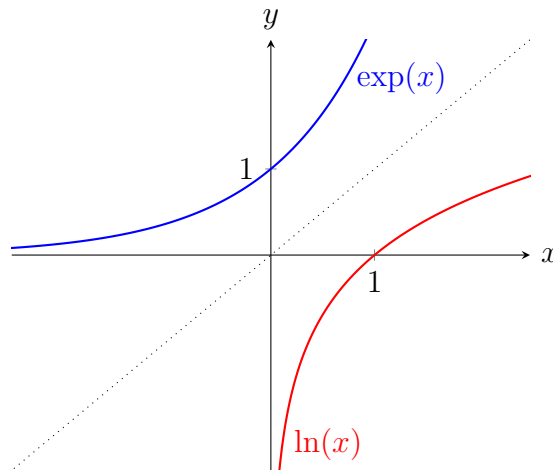


Abbildung 10: Der Graph von $\ln(x)$ in rot zusammen mit dem Graph von $\exp(x)$ in blau.

Damit ergeben sich die folgenden Eigenschaften zusammen mit denen der Exponentialfunktion:

(5) Nach Definition gilt:

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}.$$

(6) Es gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

(7) Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt:

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y), \quad \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{und} \quad -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

(8) Die natürliche Logarithmusfunktion $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und strikt isoton. Außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty.$$

Damit liefert der Zwischenwertsatz 9.17:

$$\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}.$$

(9) Nach Korollar 8.10 gilt

$$\exp(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Auf analoge Weise zeigt man

$$a^r = e^{r \cdot \ln(a)} \quad \forall a > 0.$$

Dies motiviert, a^t für allgemeine $t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}, a > 0$ zu definieren:

Definition 9.22. Für $a > 0$ setze:

$$\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp_a(x) := a^x := \exp(x \cdot \ln(a)) = e^{x \cdot \ln(a)}.$$

Diese Funktion erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $a = 1$ ist $\ln(a) = \ln(1) = 0$ und damit

$$a^x = e^0 = 1.$$

- Für $a \in (0, 1)$ ist

$$\exp(x \cdot \ln(a)) = \exp\left(-x \cdot \ln\left(\frac{1}{a}\right)\right).$$

Also reicht es aus, im Folgenden nur den Fall $a > 1$ zu betrachten:

(1) Es gilt $\exp_a(0) = a^0 = 1$ und $\exp_a(1) = a^1 = a$.

(2) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y), \quad \exp_a(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

und

$$(\exp_a(x))^y = (a^x)^y = a^{x \cdot y} = \exp_a(x \cdot y),$$

wobei

$$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp\left(y \cdot \ln\left(\exp(x \cdot \ln(a))\right)\right) = \exp(xy \cdot \ln(a)) = a^{xy}.$$

(3) Für $a > 1$ ist $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt isoton. Weiter ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \infty,$$

da $\ln(1) = 0$ und $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ strikt isoton ist. Wegen (2) ist weiter

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0.$$

Damit liefert der Zwischenwertsatz 9.17:

$$\exp_a(\mathbb{R}) = (0, \infty).$$

(4) Damit existiert nach Satz 9.18 eine Umkehrfunktion

$$\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x),$$

den wir als *Logarithmusfunktion zur Basis a* bezeichnen: Für $a = e > 1$ gilt entsprechend

$$\log_a(x) = \ln(x) \quad \forall x \in (0, \infty).$$

(5) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log_a(\exp_a(x)) = \log_a(a^x) = x.$$

Für alle $y > 1$ gilt außerdem

$$a^{\log_a(y)} = \exp_a(\log_a(y)) = y.$$

(6) Es gilt wieder $\log_a(1) = 0$ und $\log_a(a) = 1$.

(7) Auch hier werden die Funktionalgleichungen erfüllt: Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y), \quad \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

und

$$-\log_a(x) = \log_a\left(\frac{1}{x}\right).$$

Außerdem gilt

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x).$$

(8) $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Satz 9.18 stetig und streng isoton. Außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty.$$

Damit liefert der Zwischenwertsatz 9.17:

$$\log_a((0, \infty)) = \mathbb{R}.$$

(9) Für alle $a > 1$ und $x > 0$ folgt aus (7):

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \underbrace{\frac{1}{\ln(a)}}_{\text{Vorfaktor}} \cdot \ln(x).$$

Damit unterscheiden sich die jeweiligen Logarithmusfunktionen nur um einen konstanten Vorfaktor. Somit kann man die Eigenschaften von Logarithmusfunktionen jeglicher Basis auf die Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion zurückführen.

Definition 9.23 (Allgemeine Potenz). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Potenzfunktion* durch

$$p_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto p_\alpha(x) := x^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln(x)}.$$

p_α erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist p_α stetig auf $(0, \infty)$.
- Falls $\alpha > 0$ ist, so ist p_α streng isoton und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_\alpha(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p_\alpha(x) = \infty.$$

- Falls $\alpha < 0$ ist, so ist p_α streng antiton und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_\alpha(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p_\alpha(x) = 0.$$

- Falls $\alpha = 0$ ist, so ist p_α konstant und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_\alpha(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p_\alpha(x) = 1.$$

Beispiel 9.24.

(a) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Beweis.

(a) Es sei $u \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$(1+u)(1-u) = 1 - u^2 \leq 1.$$

Für $u < 1$ erhält man dann

$$1+u \leq \frac{1}{1-u}.$$

Damit folgt für alle $x < 1$:

$$1 + \frac{x}{n} \leq \frac{1}{1 - \frac{x}{n}}.$$

Die Bernoulli-Ungleichung 2.16 liefert dann für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{n}}\right)^n \stackrel{2.16}{\leq} \frac{1}{1-x},$$

wegen

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{2.16}{\geq} 1 - x.$$

Weiter gilt

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{1}{1-x}$$

und

$$1 = \frac{1+x-1}{x} \stackrel{9.20}{\leq} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{(3)}{\leq} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Satz 9.3 (e) liefert dann

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y := e^x - 1$. Nach Teil (a) gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0.$$

Daraus folgt

$$\underbrace{\frac{y}{\ln(1+y)}}_{\xrightarrow{y \rightarrow 0} 1} = \frac{e^x - 1}{\ln(e^x)} = \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

und wegen $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ die Behauptung. □

Satz 9.25 (Fortsetzung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$). *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} =: \exp(z) =: e^z$ existiert in $\mathbb{C}$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.
- (c) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Beweis.

- (a) Es gilt $0 < |z| \in \mathbb{R}$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(|z|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!}}_{\substack{>0 \\ \text{isoton}}} = \exp(|z|) =: \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{|z|^k}{k!}.$$

Aufgrund der Konvergenz existieren dann für alle $\varepsilon > 0$ $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$0 < e^{|z|} - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Behauptung. $(E_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$.

Beweis der Behauptung. Zu $\varepsilon > 0$ sei n_0 wie oben und $m > n \geq n_0$. Dann gilt

$$|E_m(z) - E_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \underbrace{\frac{|z|^k}{k!}}_{>0} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon.$$

$(E_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$.

Satz 7.12 besagt dann, dass der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(z) = e^z$$

existiert.

- (b) Siehe Beweis von Satz 11.1 aus: Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis I*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- (c) Dieser Beweis verläuft ähnlich (leicht modifiziert) zum Beweis von Satz 8.8. □

LINK: TEIL 1 DER 15. VORLESUNG VOM 2.12.2021

Der obige Beweis zeigt Folgendes:

$$|E_n(z)| \leq E_n(|z|) \leq e^{|z|}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(|z|) = |e^z| \leq e^{|z|}.$$

Für gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ wähle nun $\delta = \ln\left(\frac{\varepsilon}{e^{|z_0|}}\right)$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z_0 - z| < \delta$:

$$\begin{aligned} |e^z - e^{z_0}| &= \left| e^{z_0} (e^{z-z_0} - 1) \right| \leq |e^{z_0}| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k!} - 1 \right| \\ &= |e^{z_0}| \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k!} \right| \\ &\leq e^{|z_0|} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{k!} \\ &\leq e^{|z_0|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{k!} \\ &\leq e^{|z_0|} \cdot e^{|z-z_0|} \\ &< e^{|z_0|} \cdot e^{\delta} \\ &= e^{|z_0|} \cdot \frac{\varepsilon}{e^{|z_0|}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit haben wir die folgende Aussage gezeigt:

Korollar 9.26 (Stetigkeit der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$). *Die (komplexe) Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und erfüllt*

$$|\exp(z)| \leq \exp |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Unter Stetigkeit in $\mathbb{C}$ versteht man dabei:

Definition 9.27 (Stetigkeit in $\mathbb{C}$). Es sei $A \subset \mathbb{C}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion sowie $z_0 \in A$. Dann heißt f stetig in z_0 , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Dementsprechend heißt f stetig auf A , falls f stetig in z_0 für alle $z_0 \in A$ ist.

Auch hier gilt wie im reellen Fall:

$$f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} \quad \Rightarrow \quad f \circ g \text{ stetig}.$$

Trigonometrische Funktionen

Definition 9.28 (Sinus und Kosinus). Wir definieren die Funktionen $\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$\sin(z) := \frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \cos(z) := \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz})$$

Bemerkung 9.29. Als Komposition stetiger Funktionen sind $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls stetig.

Weiter gilt die *Eulersche Formel*:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z).$$

Speziell gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x),$$

wobei hier

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} (e^{ix} + \overline{e^{ix}}) = \operatorname{Re}(e^{ix}).$$

Dabei sei anzumerken, dass

$$\overline{E_n(ix)} = \sum_{k=0}^n \frac{\overline{(ix)^k}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-ix)^k}{k!} = E_n(-ix).$$

Dementsprechend gilt

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Insbesondere ist $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *ungerade* Funktion und $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *gerade* Funktion, wobei die Begriffe im Folgenden definiert werden:

Definition 9.30. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *symmetrisch*, falls gilt:

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad -x \in M.$$

Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer symmetrischen Menge M heißt *gerade*, falls:

$$\forall x \in M : \quad f(-x) = f(x).$$

f heißt *ungerade*, falls:

$$\forall x \in M : \quad f(-x) = -f(x).$$

Wir zeigen nun, dass $\sin$ ungerade und $\cos$ gerade ist: Tatsächlich zeigen wir sogar die Eigenschaften für alle *komplexe* Zahlen $z \in \mathbb{C}$: Es gilt nämlich

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-(-iz)}) = -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin(z)$$

sowie

$$\cos(-z) = \frac{1}{2} (e^{-iz} + e^{-(-iz)}) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos(z).$$

Satz 9.31 (Funktionalgleichungen/Additionstheoreme für Kosinus und Sinus). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten:*

- (a) $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w),$
- (b) $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w).$

Beweis.

- (a) Wir zeigen die Identität mittels der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und den Symmetrien: Es gilt

$$\begin{aligned} & \cos(z + w) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz+iw} + e^{-iz-iw}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} e^{iw} + e^{-iz} e^{-iw}) \\ &= \frac{1}{2} ((\cos(z) + i \sin(z))(\cos(w) + i \sin(w)) \\ & \quad + (\cos(-z) + i \sin(-z))(\cos(-w) + i \sin(-w))) \\ &= \frac{1}{2} ((\cos(z) + i \sin(z))(\cos(w) + i \sin(w)) \\ & \quad + (\cos(z) - i \sin(z))(\cos(w) - i \sin(w))) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) + i(\cos(z) \sin(w) + \sin(z) \cos(w)) \\ & \quad + \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) + i(-\cos(z) \sin(w) - \sin(z) \cos(w))) \\ &= \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w). \end{aligned}$$

- (b) Der Beweis erfolgt analog. □

Bemerkung. Es gilt

$$\sin(0) = \frac{1}{2i}(1 - 1) = 0.$$

Weiter folgt aus Satz 9.31 (a) für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}(1 + 1) = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos(x) \cos(-x) - \sin(x) \sin(-x) \\ &= \cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x) \\ &= \underbrace{\cos^2(x)}_{:= (\cos(x))^2} + \underbrace{\sin^2(x)}_{:= (\sin(x))^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt auch:

$$|\sin(x)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\cos(x)| \leq 1$$

sowie

$$|e^{ix}|^2 = |\cos(x) + i \sin(x)|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Die komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ kann man also darstellen als:

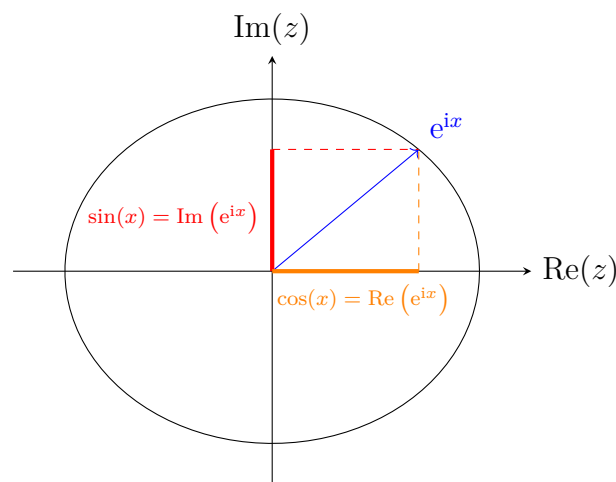


Abbildung 11: Darstellung von komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis:
Mit e^{ix} lässt sich auf der komplexen Ebene ein Kreis parametrisieren.

LINK: TEIL 2 DER 15. VORLESUNG VOM 2.12.2021

Satz 9.32. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} =: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

wobei die beiden Grenzwerte rechts existieren.

Beweis. Für Indizes $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \sum_{k=n}^m \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{j=2n}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt dann die Existenz des ersten Grenzwertes (vgl. Satz 7.12) wie im Beweis von Satz 9.25. Analog zeigt man die Existenz des zweiten Grenzwertes.

Nun widmen wir uns der Aussage, dass die Grenzwerte die oben dargestellten Identitäten erfüllen: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix},$$

wobei e^{ix} durch folgende Größen approximiert wird:

$$E_n(ix) = \sum_{k=0}^n \frac{\overbrace{(ix)^{2k}}^{=(-1)^k \cdot x^{2k}}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^n \frac{\overbrace{(ix)^{2k+1}}{=i(-1)^k x^{2k+1}}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

wobei am Ende der Gleichungskette der erste Summand für $n \rightarrow \infty$ konvergiert; wir bezeichnen den Grenzwert mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Der zweite Summand konvergiert entsprechend gegen $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Ein Koeffizientenvergleich in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}$ (bzw. der Vergleich von Real- und Imaginärteil) liefert dann die Behauptung. $\square$

Satz 9.33 (Definition von π). *Die Funktion $\cos: [0, 2] \rightarrow [-1, 1]$ besitzt genau eine Nullstelle x_0 . Wir setzen*

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Weiter ist $\cos$ streng antiton auf $[0, 2]$ und $\sin$ streng isoton auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Außerdem sind beide Funktionen positiv auf $(0, \frac{\pi}{2})$.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0, k \geq 3$ gilt:

$$\cos(2) = \underbrace{1 - 2 + \frac{16}{24}}_{<0} - + \dots - \underbrace{\frac{2^{2k}}{(2k)!} + \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}(-2k+1+2)<0} - + \dots,$$

also $\cos(2) < 0$. Außerdem gilt $\cos(0) = 1$. Nach dem Nullstellensatz 9.16 existiert dann ein $x_0 \in (0, 2)$ derart, dass

$$\cos(x_0) = 0.$$

Ähnlich zeigt man:

$$\forall x \in [0, 2] : \quad \sin(x) \geq \frac{x}{3}.$$

Nun liefert Aufgabe 1 aus Blatt 9 der Übung zur Analysis I (Lehramt) für $x, y \in [0, 2], x < y$:

$$\cos(y) - \cos(x) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) < 0.$$

Damit ist $\cos$ streng antiton auf $[0, 2]$, weshalb die oben ermittelte Nullstelle sogar eindeutig ist.

Ähnlich zeigt man nun für $x, y \in [0, x_0], x < y$:

$$\sin(y) - \sin(x) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}_{>0} > 0,$$

weshalb $\sin$ streng isoton auf $[0, x_0] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist. □

Bemerkung 9.34 (Periodizität und Werte von Kosinus und Sinus). Es gilt

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 1.$$

Aufgrund der Isotonie von $\sin$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt dann

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq$$

und damit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dies liefert

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \exp\left(i\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp(ix) \\ &= i(\cos(x) + i \sin(x)) \\ &= -\sin(x) + i \cos(x).\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Anzumerken ist außerdem, dass

$$\cos(x + \pi) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

(b) Iteration der Anmerkung in (a) ergibt dann für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

sowie

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

(c) Es gilt:

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,$$

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \quad x = k \cdot \pi,$$

$$e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \quad x = k \cdot 2\pi.$$

(d) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind

$$\sin: \left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$\cos: [k\pi, (k+1)\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton.

- (e) Sinus und Kosinus nehmen an ausgewählten Punkten die folgenden (in einer Tabelle zusammengefassten) Werte an:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\exp(ix)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$	$\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	i	-1	-i	1

Man bemerke, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ für $x = \frac{\pi}{4}$ denselben Wert annehmen.

Wir definieren nun weitere trigonometrische Funktionen:

Definition 9.35. Die Funktion

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

nennen wir *Tangens(funktion)*. Entsprechend heißt

$$\cot: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Kotangens(funktion).

Anzumerken ist, dass der Kosinus nicht nur auf $[0, 2]$, sondern sogar auch $[0, \pi]$ streng antiton, also injektiv, ist. Aufgrund von Stetigkeit ist

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] = \cos([0, \pi])$$

sogar bijektiv auf $[0, \pi]$. Damit definieren wir ihre Umkehrabbildung durch

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

und nennen diesen *Arcus-Kosinus*.

Existiert zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein $p \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x+p) = f(x),$$

so nennen wir f (p -)periodisch.

Damit sind $\sin$ und $\cos$ 2π -periodisch, während $\tan$ und $\cot$ π -periodische sowie ungerade Funktionen sind.

LINK: [TEIL 1 DER 16. VORLESUNG VOM 6.12.2021](#)

10 Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Dieses Kapitel wurde inhaltlich bereits in Kapitel 9 behandelt, weshalb direkt mit dem nächsten Kapitel fortgefahren wird.

11 Differenzierbare Funktionen

Motivation (Benzinverbrauch). Im Fahrtenbuch ist der Durchschnittsverbrauch zwischen zwei Tankfüllungen ablesbar:

km-Stand	Benzinstand b
x	55 l
$x + \Delta x$	5 l

Damit ergibt sich ein Durchschnittsverbrauch von

$$\frac{50}{\Delta x} \frac{\text{l}}{\text{km}}.$$

Im Display des Autos kann man sich dabei den „momentanen Verbrauch“ anzeigen lassen, für entsprechend sehr kurzen Δx . Analog ist die „momentane Geschwindigkeit“ definiert als

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

wobei $x(t)$ den Ort zum Zeitpunkt t bezeichnet. Bei der Betrachtung des „momentanen Verbrauchs“ erhält man:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b(t + \Delta t) - b(t)}{x(t + \Delta t) - x(t)}.$$

Mit dem oben geschilderten Sachverhalt wollen wir nun die folgende Definition motivieren:

Definition 11.1 (Differenzierbarkeit). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Dann heißt f *differenzierbar bzw. ableitbar in x_0* , falls

$$g = g_{x_0, f}: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

den Limes für $x \rightarrow x_0$, $x \in I$, besitzt. Dies ist äquivalent zu der Bedingung, dass der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Den Limes bezeichnen wir dann mit

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}f(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$$

und nennen diesen die *Ableitung von f in x_0* .

$g(\cdot)$ heißt *Differenzenquotient von f in x_0* . Besitzt dieser nur einen Limes $\frac{f'_-(x_0)}{f'_+(x_0)}$ für $x \nearrow x_0$, so heißt f *links-seitig differenzierbar in x_0* . (Falls dies bei Randpunkten $x_0 \in I$ eintritt, so schreiben wir $f'(x_0) = f'_+(x_0)$ bzw. $f'(x_0) = f'_-(x_0)$.)

f heißt weiter *differenzierbar auf I* , falls f für *alle* $x_0 \in I$ differenzierbar in x_0 ist.

┌

Falls $x_0 = \sup I \in I$, so verlangen wir dabei nur die Existenz des *links-seitigen* Limes.

└

In diesem Fall heißt die Abbildung

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

die *Ableitung von f* .

Der Übergang von f zu f' heißt *Differentiation*. Die folgende Abbildung liefert eine geometrische Interpretation des Sachverhaltes:

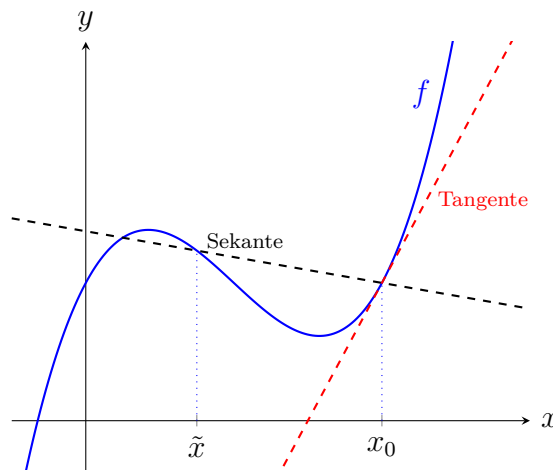


Abbildung 12: Der Graph einer Funktion f (blau), eine Sekante durch die Punkte $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ und $(x_0, f(x_0))$ (schwarz) sowie eine Tangente durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ (rot). Man bemerke, dass die Steigung der Tangente $f'(x_0)$ der Steigung von f im Punkt x_0 entspricht.

$\frac{f(\tilde{x})-f(x_0)}{\tilde{x}-x_0}$ ist die Steigung der Sekante

$$x \mapsto \frac{f(x_0)\tilde{x} - f(\tilde{x})x_0}{\tilde{x} - x_0} + \frac{f(\tilde{x}) - f(x_0)}{\tilde{x} - x_0}x.$$

durch die Punkte $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ und $(x_0, f(x_0))$.

$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$. Beide sind Graphen von affin-linearen Funktionen.

Beispiel 11.2. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Es sei f definiert durch

$$x \mapsto f(x) := a \cdot x + b.$$

Dann ist $f'(x_0) = a$, denn:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = a \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = a \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

(b) Es sei f definiert durch

$$x \mapsto f(x) := x^n.$$

Dann ist $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$, denn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k \cdot x^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{x_0^k \cdot x_0^{n-k-1}}_{=x_0^{n-1}} = n \cdot x_0^{n-1}.$$

(c) Es sei f die Betragsfunktion

$$x \mapsto f(x) := |x|.$$

Dann ist f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn es gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und damit

$$f'_-(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_+(0).$$

Damit ist f in $x_0 = 0$ nur rechts- und linksseitig differenzierbar, während die einseitigen Ableitungen nicht übereinstimmen. Hingegen ist $f|_{(0,\infty)}$ bzw. $f|_{(-\infty,0)}$ differenzierbar.

(d) Es sei f die Exponentialfunktion

$$x \mapsto f(x) := \exp(x).$$

Dann ist $f'(a \cdot x_0) = a \cdot \exp(a \cdot x_0)$, denn für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{e^{a \cdot x} - e^{a \cdot x_0}}{x - x_0} = e^{a \cdot x_0} \cdot \frac{e^{a \cdot (x - x_0)} - 1}{x - x_0} = a \cdot e^{a \cdot x_0} \cdot \frac{e^{a \cdot (x - x_0)} - 1}{a \cdot (x - x_0)}.$$

Setze nun $y := a \cdot (x - x_0)$ und es folgt

$$a \cdot e^{a \cdot x_0} \cdot \frac{e^y - 1}{y} \stackrel{9.24(a)}{\underset{y \rightarrow 0}{\rightarrow}} a e^{a \cdot x_0} \cdot 1 = a e^{a \cdot x_0} = f'(x_0).$$

Für $a = 0$ gilt trivialerweise $f'(x_0) = 1$ für alle x_0 und es folgt direkt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{1 - 1}^{=0}}{x - x_0} = 0 = 0 \cdot \exp(0 \cdot x_0).$$

(e) Es gilt

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Zunächst ist anzumerken, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (\text{Übung!})$$

Damit erhält man mit den Additionstheoremen und für $y := \frac{(x - x_0)}{2}$

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{Übg.}}{=} 2 \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \underbrace{\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \cos(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(y)}{y}}_{\xrightarrow{y \rightarrow 0} 1},$$

und wegen $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0).$$

Auf ähnliche Weise zeigt man:

$$\frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{Übg.}}{=} -2 \cdot \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\sin(x). \quad \square$$

(f) Spannend ist auch die folgende Zusammensetzung von Funktionen

$$x \mapsto \underbrace{x^\alpha}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\text{oszilliert für } x \rightarrow 0} \quad \text{für } \alpha > 0,$$

wobei $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{x} \rightarrow \infty$. Da stellt sich nun die Frage, welche der beiden Funktionen im Limes ‚gewinnt‘.

Betrachte nun im Folgenden Funktionen $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

(g) Es sei f die Wurzelfunktion

$$x \mapsto f(x) := \sqrt{x}.$$

Dann ist $f'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, denn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}^{=x-x_0} (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0) (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Ist für $x_0 = 0$ die Funktion rechtsseitig differenzierbar? Tatsächlich nicht, denn:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty.$$

LINK: TEIL 2 DER 16. VORLESUNG VOM 6.12.2021

(h) Es sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Logarithmusfunktion

$$x \mapsto f(x) := \ln(x).$$

Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, denn für $t := \frac{x}{x_0} - 1$ gilt:

$$\frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\underbrace{\frac{x}{x_0} - 1}_{=t}} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{x_0},$$

wobei $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$.

Satz 11.3. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ sowie $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = a$.
- (ii) Es existiert eine in x_0 stetige Funktion $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(x_0) = 0$ und

$$\forall x \in I: f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad (*)$$

Beweis.

($\Rightarrow$) Es sei f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = a$. Wir definieren nun eine Funktion $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & \text{falls } x \neq x_0, \\ 0, & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Da f nach Voraussetzung differenzierbar in x_0 ist, gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Weiter gilt für $x - x_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cdot \varepsilon(x) &= (x - x_0) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) \\ &= f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0), \end{aligned}$$

was äquivalent zu $(*)$ ist; für $x = x_0$ ist $(*)$ offensichtlich auch erfüllt.

($\Leftarrow$) Es sei ε definiert wie oben. Dann liefert Division von $x - x_0 \neq 0$ in $(*)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)}{x - x_0} = a + \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(a + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\substack{\text{Vor.} \\ \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0}} \right) = a,$$

was zu zeigen war. □

Korollar 11.4. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

- (a) f ist stetig in x_0 .
- (b) Die Funktion

$$G = G_{x_0, f}: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & \text{falls } x \neq x_0, \\ f'(x_0), & \text{falls } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig in x_0 und eine Fortsetzung des Differenzenquotienten $g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 .

(Ohne Beweis)

Wir betrachten nun die Kombination von differenzierbaren Funktionen zu neuen:

Satz 11.5. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktionen. Dann sind auch die folgenden Funktionen differenzierbar in x_0 :*

- $f + g$
- $f \cdot g$

- $\frac{f}{g}$, falls $g(x_0) \neq 0$.

Entsprechend gilt:

- (a) (Linearität der Ableitung)
 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- (b) (Produktregel)
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- (c) (Quotientenregel)
 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, mit dem Spezialfall:
 $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Beweis.

- (a) Es gilt

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) + g'(x_0).$$

- (b) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{(f \cdot g)(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)} g(x) + \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(x_0)} f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{f, g \text{ stetig}} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

- (c) Wir betrachten zunächst den Spezialfall: Setze $c = g(x_0) \neq 0$. Da g differenzierbar in x_0 ist, ist g insbesondere stetig in x_0 . Damit existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad g(x_0) \neq 0,$$

und somit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \underbrace{-\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\rightarrow g(x_0)^{-2}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Mit Teil (b) folgt dann der Allgemeinfall. □

Bemerkung. Wir sehen: „Differenzierbarkeit baut auf Stetigkeit auf.“

Falls wir in 11.5 (b) für $\lambda \in \mathbb{R}$ $g \equiv \lambda$ auf I setzen, so gilt

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Damit bildet die Menge der in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

- einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum,
- einen kommutativen Ring mit Eins ($f(x) = 1 \forall x \in I$), sowie
- eine $\mathbb{R}$ -Algebra.

Satz 11.6 (Kettenregel). *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, f differenzierbar in $x_0 \in I$ und g differenzierbar in $y_0 = f(x_0) \in J$. Dann ist $h = g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit*

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \quad (**)$$

Beweis. Zunächst verwenden wir naiv den Ansatz

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jedoch könnte ja die Funktion $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ Nullstellen besitzen.

Stattdessen arbeiten wir nun mit Satz 11.3: Da g differenzierbar in y_0 ist, existiert eine Funktion $\varepsilon: J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(x_0) = 0$ und

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + \underbrace{(y - y_0) \varepsilon(y)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}}.$$

Setze nun $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ ein und man erhält

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0)) (f(x) - f(x_0)) + \varepsilon(f(x)) (f(x) - f(x_0)).$$

Division durch $x - x_0 \neq 0$ liefert dann

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\rightarrow f'(x_0) \\ x \rightarrow x_0}} + \varepsilon(f(x)) \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\rightarrow f'(x_0) \\ x \rightarrow x_0}}$$

Da f differenzierbar und damit auch stetig in x_0 ist, gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ und aufgrund der Stetigkeit von ε in x_0 folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(f(x)) = \varepsilon(y_0) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} ((g'(f(x_0)) + \varepsilon(f(x))) f'(x_0)) = g'(f(x_0)) f'(x_0). \quad \square$$

Wie bei der Stetigkeit wollen noch die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen betrachten:

Satz 11.7 (Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow f(I) =: J \subset \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1}: J \rightarrow I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

LINK: [TEIL 1 DER 17. VORLESUNG VOM 9.12.2021](#)

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit und Monotonie von f existiert nach Satz 9.18 (b) die Umkehrabbildung $f^{-1}: J \rightarrow I$; insbesondere ist J auch ein Intervall. Sei nun $y_n \in J \setminus \{y_0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $y_n \rightarrow y_0$. Da f bijektiv ist, so ist

$$x_n = f^{-1}(y_n) \in I \quad \text{und} \quad x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da f^{-1} sogar stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f'(x_0))^{-1}.$$

Hierbei benutzen wir den folgenden Grenzwertsatz für Folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{falls } 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \stackrel{\text{hier}}{=} f'(x_0). \quad \square$$

Beispiel 11.8.

(a) Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^3$$

ist strikt isoton und stetig. Dann ist die Inverse von f gegeben durch

$$g = f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \operatorname{sgn}(y) \sqrt[3]{|y|}.$$

Weiter gilt für den Differenzenquotienten im Punkt $y_0 = 0$:

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \frac{\sqrt[3]{|y|}}{|y|} = \frac{1}{|y|^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty.$$

Also ist g in $y_0 = 0$ nicht differenzierbar.

┌
Aber wie ist das möglich?

Tatsächlich ist die Voraussetzung $f'(0) \neq 0$ verletzt: Es gilt

$$\frac{x^3 - 0^3}{x - 0} = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

└

(b) Da bei der Exponentialfunktion

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

so folgt die Differenzierbarkeit von $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auch mittels Satz 11.7: Es gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

(c) Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die allgemeine Potenzfunktion

$$p_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha.$$

Mit der Kettenregel 11.6 erhalten wir

$$p'_\alpha(x) = \underbrace{\exp'(\alpha \cdot \ln(x))}_{=x^\alpha} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{x}\right) = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

(d) Es seien $f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $f = \prod_{k=1}^n f_k$. Dann gilt nach der Produktregel (vgl. Satz 11.5 (b)) und Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

$$f' = \sum_{k=1}^n \left(f_1 \cdot \dots \cdot f_{k-1} \cdot f'_k \cdot f_{k+1} \cdot \dots \cdot f_n \right).$$

(e) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ohne Nullstellen. Dann ist sie insbesondere stetig und besitzt außerdem nach dem Zwischenwertsatz 9.17 ein festes Vorzeichen: Es gilt

$$|f(x)| = (\operatorname{sgn}(f(x))) f(x) = \operatorname{sgn}(f) f(x).$$

Dann impliziert die Kettenregel 11.6:

$$(\ln |f|)'(x) = \ln'(|f(x)|) \operatorname{sgn}(f) f'(x) = \frac{f'(x)}{(\operatorname{sgn}(f))|f(x)|} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Diesen Quotienten bezeichnet man als *logarithmische Ableitung* von f .

- (f) Es seien $f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen ohne Nullstellen und $f = \prod_{k=1}^n f_k$. Dann ist

$$|f| = \prod_{k=1}^n |f_k|.$$

Damit erhält man

$$\frac{f'}{f} = (\ln |f|)' = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^n \ln |f_k| \right) \stackrel{11.5 \text{ (a)}}{=} \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dx} (\ln |f_k|) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k}{f_k}.$$

- (g) Ein Polynom

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

für $a_k \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar: Es gilt wegen Teil (c)

$$p'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \stackrel{11.5 \text{ (a)}}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{d}{dx} (a_k x^k)}_{\frac{d}{dx} a_0 = 0} = \sum_{k=1}^n (k \cdot a_k \cdot x^{k-1})$$

- (h) Die Quotientenregel (vgl. Satz 11.5 (c)) liefert für $x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\tan'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Für $x \neq k\pi$ gilt weiter:

$$\cot'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Beide Ableitungen besitzen alternative Darstellungen: Es gilt

$$\tan^2(x) + 1 = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

sowie

$$-\cot^2(x) - 1 = -\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

- (i) Ähnlich gilt für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)' = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Im Video:
(h)

(j) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha \cdot e^{\beta x}.$$

Im Video:
(i)

Mit der Produktregel erhalten wir:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{\beta x} + x^\alpha \beta e^{\beta x} = (\alpha + \beta x) x^{\alpha-1} e^{\beta x}.$$

(k) Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \sin(x).$$

Im Video:
(j)

Dann gilt für die Ableitung von $h := g \circ f$:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

(l) Iterative Anwendung der Kettenregel auf

$$F(x) := \varphi(h(g(f(x)))) = \left(\sin \left((x^4 + 2x)^2 \right) \right)^5$$

Im Video:
(k)

liefert die Ableitung:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \varphi'(h(g(f(x)))) \cdot h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 5 \cdot \left(\sin(x^4 + 2x)^2 \right)^4 \cdot \cos(x^4 + 2x)^2 \cdot 2(x^4 + 2x) \cdot (4x^3 + 2). \end{aligned}$$

(m) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} (e^{x \ln(a)}) = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x.$$

Im Video:
(l)

LINK: TEIL 2 DER 17. VORLESUNG VOM 9.12.2021

Nun wollen wir eine weitere Klasse von differenzierbaren Funktionen mit der folgenden Fragestellung motivieren: Gibt es Funktionen, deren Ableitungen nicht nur wohldefiniert, sondern auch stetig oder sogar differenzierbar sind? Bekannterweise gilt dies beispielsweise für die Exponentialfunktion. Damit leiten wir zur folgenden Definition über:

Definition 11.9. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf I differenzierbare Funktion mit Ableitung $g = f'$.

(a) Ist $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so heißt f *stetig differenzierbar auf I* . Die Menge aller auf I stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^1(I)$ bezeichnet.

- (b) Ist g auch differenzierbar auf I , so heißt f *zweimal differenzierbar auf I* und

$$g' = (f')'$$

heißt die *zweite Ableitung von f* ; wir schreiben

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}f\right)(x) := f''(x) := g'(x).$$

- (c) Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ definieren wir rekursiv:

$$C^m(I) := \{f \in C^1(I) \mid f' \in C^{m-1}(I)\}, \quad C^0(I) = C(I).$$

Damit bezeichnet $C^m(I)$ die Menge aller auf I stetig differenzierbaren Funktionen f , dessen Ableitungen f' nochmal $(m-1)$ -mal stetig abgeleitet werden können. Wir schreiben dabei:

$$f^{(m)} := (f')^{(m-1)}, \quad \text{wobei } f^{(0)} = f,$$

also zum Beispiel $f^{(1)} = f'$ und $f^{(2)} = f''$. Ein $f \in C^m(I)$ heißt *m -mal stetig differenzierbar auf I* .

- (d) Ein $f \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(I) = C^\infty(I)$ heißt *unendlich oder beliebig oft stetig differenzierbar auf I* . Weitere Notationen für Ableitungen sind:

$$\frac{d^m}{dx^m}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^m f = f^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 11.10.

- (a) Wir untersuchen die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x \cdot |x|$$

auf Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$: Es gilt

$$\frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Für $x_0 \neq 0$ gilt

$$\frac{x|x| - x_0|x| + x_0|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = |x| - x_0 \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$$

Da $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(x_0)$ für $x \sim x_0$, erhält man

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(|x| - x_0 \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} (|x| - x_0 \cdot \operatorname{sgn}(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (|x| + |x_0|) = 2|x_0|.$$

Also ist $g = f'$ sogar stetig auf $\mathbb{R}$, aber offensichtlich nicht differenzierbar. Insbesondere gilt $C^1(\mathbb{R}) \neq C^2(\mathbb{R})$.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f differenzierbar (Übung!) mit stetiger Ableitung $g = f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Mit Produkt- und Kettenregel folgt:

$$g(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Was passiert in $x_0 = 0$? Dazu betrachten wir eine Nullfolge $x_n := \frac{1}{n}$: Es gilt

$$g(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin(\pi n) - \pi \cos(n\pi) = 0 - \pi \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1} \cdot \pi,$$

es existiert also kein Grenzwert. Damit kann g nicht zu einer stetigen Funktion $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Tatsächlich ist aber f in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$. (Übung!)

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ betrachten wir ein Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$p^{(n)}(x) = n! \cdot a_n \quad (\text{Übung!}) \quad \text{und} \quad p^{(n+m)}(x) = 0 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Es gilt also $p \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(d) Es gilt $\exp, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} e^x &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\frac{d}{dx} e^x \right) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^x = \dots = e^x, \\ \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \sin(x) &= (-1)^m \sin(x), \\ \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} \sin(x) &= (-1)^m \cos(x), \\ \cos^{(2m)}(x) &= (-1)^m \cos(x) \quad \text{und} \\ \cos^{(2m+1)}(x) &= (-1)^{m+1} \sin(x). \end{aligned}$$

Satz 11.11. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I m -mal differenzierbare Funktionen. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ m -mal differenzierbar auf I und es gelten:*

- (a) $(f + g)^{(m)} = f^{(m)} + g^{(m)}$ auf I ,
- (b) $(f \cdot g)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k)} \cdot g^{(k)}$ auf I .

Beweis.

- (a) Für $m = 2$ gilt:

$$((f + g)')' \stackrel{11.5}{\underset{(a)}}{=} (f' + g')' \stackrel{11.5}{\underset{(a)}}{=} f'' + g''.$$

Die Behauptung folgt dann mit vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$.

- (b) Für $m = 2$ gilt:

$$(f \cdot g)'' \stackrel{11.5}{\underset{(b)}}{=} (f'g + fg')' \stackrel{11.5}{\underset{(a)+(b)}}{=} f'' + 2 \cdot f'g' + fg''.$$

Analog gilt für $m = 3$:

$$(f \cdot g)''' = (f'' + 2f'g' + fg'')' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

Bis dahin dürfte auffallen, dass sich die Summe gemäß des binomischen Lehrsatzes weiterentwickelt: Die Behauptung folgt direkt mit vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung 11.12. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $m \in \mathbb{N}_0$ oder $m = \infty$, $f, g \in C^m(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Es gilt $f + g, \lambda f, f \cdot g \in C^m(I)$. Insbesondere ist $C^m(I)$ ein Vektorraum, ein Ring sowie eine Algebra mit Eins: $h(x) \equiv 1$ für $x \in I$.
- (b) Ist $0 \notin f(I)$, so ist $\frac{1}{f} \in C^m(I)$.
- (c) Ist $h \in C^m(f(I))$, so ist $h \circ f \in C^m(I)$.
- (d) Ist $0 \notin f'(I)$, so ist $f^{-1} \in C^m(f(I))$. Insbesondere ist f strikt monoton, denn:
- (e) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f strikt isoton.
- (f) Es sei

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

so gilt

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{und} \quad f^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m \cdot m!}{x^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Also ist $f|_{(0,\infty)} \in C^\infty((0,\infty))$ und $f|_{(-\infty,0)} \in C^\infty((-\infty,0))$.

Da $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$, so folgt $\ln \in C^\infty((0,\infty))$.

LINK: TEIL 1 DER 18. VORLESUNG VOM 13.12.2021

(g) Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)} := \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{k=0}^m b_k x^k}$$

für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, sowie $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall derart, dass $q \neq 0$ auf I gilt. Dann ist $f \in C^\infty(I)$.

12 Kurvendiskussion

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Extremwerten und Monotonieverhalten von Funktionen, aber auch mit Aussagen über Konvexität sowie Mittelwertsätze. Dabei wollen wir eine Vorstellung über das Verhalten von Funktionen bzw. das Aussehen von Funktionsgraphen anhand ihrer Charakteristiken entwickeln. Dabei soll das Zusammenspiel zwischen globalen und lokalen sowie geometrischen und analytischen Charakteristiken betont werden (man betrachte z.B. den Zusammenhang zwischen Sekante und der Ableitung einer Funktion).

Definition 12.1 (Minimum und Maximum). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f hat in x_0 genau dann ein *globales Maximum*, wenn:

$$\forall x \in I: f(x) \leq f(x_0), \quad \text{also} \quad f(x_0) = \max f(I).$$

Dann heißt $f(x_0)$ *globales Maximum von f* und x_0 nennen wir *globale Maximalstelle von f* .

f hat in x_0 genau dann ein *lokales Maximum*, wenn:

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in I \cap B_\delta(x_0): f(x) \leq f(x_0), \quad \text{also} \quad f(x_0) = \max f(I \cap B_\delta(x_0)).$$

Dann heißt $f(x_0)$ *lokales Maximum von f* und x_0 nennen wir *lokale Maximalstelle von f* .

Analog sind dann auch globales bzw. lokales Minimum sowie Minimalstelle definiert.

f hat in x_0 genau dann ein globales lokales *Extremum*, wenn f in x_0 ein globales lokales Maximum oder Minimum besitzt.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin(x).$$

Es gilt

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \max f(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 = \min f(\mathbb{R}).$$

Es sei nun

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := |x|.$$

Dann ist

$$f(0) = 0 = \min f(\mathbb{R}).$$

Weiter ist $\sup f(\mathbb{R}) = \infty$, es existiert also kein globales Maximum; ebenso existiert kein lokales Maximum.

Es sei nun

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) := |\sin(x)|$$

und

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) := x + f(x).$$

Es gilt

$$f(0) = 0 = \min f(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \max f(\mathbb{R}).$$

Hingegen ist g unbeschränkt und es existieren weder globale Maxima noch globale Minima.

┌ Besitzt g lokale Minima, z.B. in $-\pi, 0, \pi$ oder 2π ? ─

Nun wollen wir uns weiter mit den Eigenschaften eines lokalen Minimums sowie ihren Bezug zu den vorher eingeführten Eigenschaften der Ableitung einer Funktion beschäftigen: Angenommen die Funktion $f: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Minimum in $x_0 \in I$. Dann gelten

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta): \quad g_{x_0, f}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \geq 0$$

und

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): \quad g_{x_0, f}(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{\underbrace{x_0 - x}_{>0}} \leq 0$$

Der Differenzen-Quotient $g = g_{x_0, f}$ ist also nicht-positiv auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und nicht-negativ auf $(x_0, x_0 + \delta)$, es findet also ein Vorzeichenwechsel in x_0 statt.

Ist damit x_0 eine Nullstelle von g ? Im Allgemeinen nicht, da g nicht stetig sein muss. Wir wissen aber: Da f differenzierbar in x_0 ist, ist g nach Korollar 11.4 stetig fortsetzbar zu $G = G_{x_0, f}$ mit

$$0 = G(x_0) = f'(x_0).$$

Dieses Ergebnis fassen wir in dem folgenden Lemma zusammen:

Lemma 12.2 (Ableitung gleich Null in Extremstellen). *Es sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 sowie x_0 ein lokales Minimum oder Maximum von f . Dann gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Wir werden im Folgenden nun die folgende Annahme häufig verwenden:

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, sowie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) sogar differenzierbar. (A)

Satz 12.3 (von Rolle). *Es gelte die Annahme (A). Ist außerdem $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ derart, dass*

$$f'(\xi) = 0.$$

Beispiel. Es gilt $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$. Außerdem ist

$$\sin'(\xi) = 0 \quad \text{für } \xi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\}.$$

Betrachte nun

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^2.$$

Es gilt $g(-1) = 1 = g(1)$ und $g'(\xi) = 0$ für $\xi = 0 \in [-1, 1]$.

Für $c \in \mathbb{R}$ sei nun

$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := c.$$

Offensichtlich gilt $h(a) = c = h(b)$. Außerdem ist

$$h'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in [a, b],$$

insbesondere auch für alle $\xi \in (a, b)$.

Beweis von Satz 12.3.

- ① Falls f konstant ist, dann ist die Aussage offensichtlich wahr.
- ② Es sei f nicht konstant. Da f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall ist, existieren nach dem Satz 9.15 vom Minimum und Maximum $x_-, x_+ \in [a, b]$ derart, dass

$$\forall x \in I: \quad f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+).$$

Da $f(a) = f(b)$ gilt, können x_- und x_+ nicht gleichzeitig Randpunkte von I sein. Also existiert ein $\xi \in \{x_-, x_+\}$ derart, dass

$$a < \xi < b \quad \text{und nach Lemma 12.2} \quad f'(\xi) = 0. \quad \square$$

LINK: TEIL 2 DER 18. VORLESUNG VOM 13.12.2021

Nun stellt sich die Frage, was passieren würde, wenn die Voraussetzung $f(a) = f(b)$ in Satz 12.3 nicht gegeben ist. Dazu betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

wobei dann $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$. Auch hier gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ an dem die (lokal definierte) Tangente parallel parallel zu der (global definierten) Sekante durch die beiden Endpunkte des Graphen ist. Aber wie kann man diese Aussage beweisen? Dazu kippen wir den Graphen so, dass die Sekante waagrecht liegt. Diese Überlegung wird in dem nächsten Satz formuliert:

Satz 12.4 (Mittelwertsatz). *Es gelte die Annahme (A). Dann gelten:*

- (1) *Es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- (2) *Es gelte zusätzlich $0 \notin g'((a, b))$. Dann gilt $g(b) \neq g(a)$ und es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bemerkung.

- (i) Falls man (1) separat auf f und g anwendet, so erhält man zwei $\xi_f, \xi_g \in (a, b)$, die potentiell unterschiedlich sein können.
- (ii) Es sei I ein Zeitintervall und $f(t)$ beschreibe den Standort eines Autos zum Zeitpunkt t . Dementsprechend bezeichne a die Startzeit, $f(a)$ den Startpunkt des Autos, b die Ankunftszeit und $f(b)$ den Zielpunkt des Autos bei einer Bewegung auf der Geraden $\mathbb{R}$. Dann besagt (1), dass ein Zeitpunkt $\xi \in (a, b)$ existiert mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

die momentane Geschwindigkeit zum Punkt ξ ist also identisch mit der Durchschnittsgeschwindigkeit zum Zeitraum $[a, b]$. Damit haben wir einen Zusammenhang zwischen lokalen Eigenschaften und globalen Eigenschaften.

- (iii) Es bezeichne $t \in [a, b]$ die Zeit, $f: t \mapsto -b(t)$ den Benzinstand eines Autos zum Zeitpunkt t und $g: t \mapsto g(t)$ den Standort zum Zeitpunkt t . Wir erkennen, dass

$$\frac{\text{Verbrauchtes Benzin}}{\text{Zurückgelegte Strecke}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \stackrel{12.4 (2)}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (\times)$$

Bezeichnet nun $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ den momentanen Benzinverbrauch zum Zeitpunkt ξ ?

Wir betrachten dazu die folgende Umparametrisierung

$$J = \overbrace{[g(a), g(b)]}^{\text{Ort}} \xrightleftharpoons[g]{g^{-1}} \overbrace{[a, b]}^{\text{Zeit}} \xrightarrow{f} \overbrace{[f(a), f(b)]}^{\text{-Benzinstand}}$$

und nehmen dabei an, dass f und g strikt isoton sind. Dann ist

$$h := f \circ g^{-1}: J \rightarrow [f(a), f(b)]$$

der Benzinverbrauch parametrisiert durch den Standort. Wir erhalten

$$h'(x) = f'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = \frac{f'(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}.$$

Setze nun $t = g^{-1}(x)$ und es folgt

$$h'(g(t)) = \frac{f'(t)}{g'(t)} \stackrel{t=\xi}{=} (\times).$$

Es gibt also eine Position $g(\xi) \in (g(a), g(b))$ entlang der Strecke, an der der momentane Benzinverbrauch mit dem Durchschnittsverbrauch über die gesamte Reise übereinstimmt.

Beweis von Satz 12.4.

(1) Setze zunächst

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Man bemerke, dass

$$F(a) = f(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \cdot (b - a) = F(b).$$

Damit existiert nach dem Satz von Rolle 12.3 ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(2) Es sei $0 \notin g'((a, b))$. Wir nehmen zunächst an, dass $g(a) = g(b)$ gelte. Nach dem Satz von Rolle 12.3 existiert dann ein $\xi_0 \in (a, b)$ mit $g'(\xi_0) = 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Es gilt also $g(b) \neq g(a)$.

Wir setzen nun

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Damit erhalten wir

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Weiter ist

$$F(a) = f(a) = f(b) - f(b) + f(a) = F(b).$$

Damit ist der Satz von Rolle 12.3 anwendbar: Es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi),$$

also

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \square$$

Man bemerke, dass der Beweis von Teil (2) nicht Teil (1) benutzt! Damit folgt Teil (1) auch aus Teil (2) mit $g(x) = x$. ┐

Der Mittelwertsatz kann an verschiedenen Stellen angewendet werden. Dieser wird uns aber besonders nützlich für den Beweis des nächsten Satzes sein, der uns nützliche Aussagen über die Berechnung von Grenzwerten liefern kann.

Satz 12.5 (Regeln von L'Hospital). *Es seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $0 \notin g'((a, b))$. In jeder der zwei Situationen*

- (i) $f(x) \rightarrow 0$ und $g(x) \rightarrow 0$ für $x \searrow a$,
- (ii) $f(x) \rightarrow \infty$ und $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \searrow a$

gilt dann:

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt auch für

- (1) $x \nearrow b$,
- (2) $x \rightarrow \infty$, d.h. $b = \infty$,
- (3) $x \rightarrow -\infty$, d.h. $a = -\infty$.

Beweis.

- (i) Wir setzen f und g auf $I := [a, b)$ fort durch $f(a) = 0 = g(a)$. Damit sind f und g stetig auf I , so dass der Mittelwertsatz 12.4 anwendbar ist: Für alle $x \in (a, b)$ existiert also ein $\xi \in (a, x) \subset [a, x] \subset I$ mit

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Wegen $a < \xi < x$ impliziert $x \searrow a$ außerdem $\xi \searrow a$. Es folgt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \searrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- (ii) Wir setzen

$$Q = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - Q \right| < \varepsilon \quad \forall t \in (a, a + \delta).$$

Damit folgt mit dem Mittelwertsatz 12.4 für jedes $x, y \in (a, a + \delta)$ mit $x \neq y$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f'(t)}{g'(t)} + \frac{f'(t)}{g'(t)} - Q \right| < \varepsilon, \quad (*)$$

wobei $t \in (x, y)$ eine Zwischenstelle ist. Man beachte, dass $g' \neq 0$ auf (a, b) gilt, weshalb g strikt monoton und damit insbesondere $g(x) \neq g(y)$ ist. Damit erhält man über elementare Umformungen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \underbrace{\frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}}_{\xrightarrow[x \searrow a]{\text{red}} 1}.$$

Also existiert ein $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$ mit

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a + \tilde{\delta}).$$

Kombiniert mit $(*)$ folgt aus der Dreiecksungleichung aus Satz 1.12 (4) dann

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - Q \right| < 2\varepsilon \quad \forall x \in (a, a + \tilde{\delta}).$$

Der Fall $x \rightarrow \infty$ kann dann schließlich mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ auf den Fall $y \searrow a = 0$ zurückgeführt werden. $\square$

LINK: [TEIL 1 DER 19. VORLESUNG VOM 16.12.2021](#)

Beispiel 12.6. Für $x \in (0, \infty)$ gilt

$$\ln(x) \leq x - 1.$$

Beweis. Mit dem Mittelwertsatz 12.4 erhalten wir

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \stackrel{\text{MWS}}{=} \ln'(\xi) = \frac{1}{\xi}$$

mit $\xi = \xi_x$ zwischen 1 und x . Nun betrachten wir die folgende Fallunterscheidung:

- $x > 1$:
Dann ist auch $\xi > 1$, also

$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{x-1}}_{>0} < 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) < x - 1.$$

- $x < 1$:
Dann gilt $\xi < 1$, also

$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{x-1}}_{<0} > 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) < x - 1$$

Für $x = 1 \in (0, \infty)$ gilt schließlich

$$\ln(1) = 0 = 1 - 1,$$

weshalb die Ungleichung immer noch erfüllt ist. □

Notation. Für eine $\mathbb{R}$ -wertige Funktion schreiben wir

$$g \left\{ \begin{array}{l} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \text{auf } I \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in I : \quad g(x) \left\{ \begin{array}{l} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{array} \right\} 0.$$

Entsprechend schreiben wir auch

$$g > f \quad \text{auf } I \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in I : \quad g(x) > f(x).$$

Satz 12.7. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gelten:

- Falls $f' > 0$ auf (a, b) , so ist f streng isoton auf $[a, b]$;
- Falls $f' < 0$ auf (a, b) , so ist f streng antiton auf $[a, b]$;
- Es gilt $f' \geq 0$ auf (a, b) genau dann, wenn f isoton auf $[a, b]$ ist;

Im Video:
Beispiel
12.7.

Im Video:
Satz
12.7 $\frac{1}{5}$.

- (d) Es gilt $f' \leq 0$ auf (a, b) genau dann, wenn f antiton auf $[a, b]$ ist;
 (e) Es gilt $f' = 0$ auf (a, b) genau dann, wenn f auf $[a, b]$ konstant ist.

Beweis.

- (a) Es seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz 12.4 ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0.$$

Also ist f streng isoton auf $[a, b]$.

- (b) Der Beweis erfolgt analog zu (a) unter Betrachtung von Vorzeichenwechsel.
 (c) ($\Rightarrow$) Analog zu Teil (a).
 ($\Leftarrow$) Es sei f isoton auf $[a, b]$. Da f auf (a, b) differenzierbar ist, gilt für $x, x_0 \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$, dass

$$G(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

Wegen der Isotonie von f gilt dann insbesondere $G(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, also auch $f'(x_0) \geq 0$.

- (d) Analog zu (c) unter Betrachtung von Vorzeichenwechsel.
 (e) Erfolgt ebenfalls analog zu (c) unter Betrachtung, dass $f(x_1) - f(x_2) = 0$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt. $\square$

Bemerkung 12.8.

- (1) Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

ist strikt isoton, aber es gilt $f'(0) = 0$. Also wäre eine Umkehrung der Aussage in Satz 12.7 (a) falsch.

- (2) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$f' = g' \quad \text{auf } I \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in I : \quad f(x) = g(x) + c,$$

wegen

$$f' = g' \quad \text{auf } I \quad \Leftrightarrow \quad (f - g)' = 0 \quad \text{auf } I \quad \Leftrightarrow \quad f - g = c \quad \text{auf } I.$$

Satz 12.9 (Hinreichendes Kriterium für Extrema). *Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann hat f in x_0 ein*

Im Video:
Bem.
12.7 $\frac{1}{4}$.

Im Video:
Satz
12.7 $\frac{1}{5}$.

Im Video:
Satz
12.7 $\frac{1}{3}$.

(1) *Minimum, wenn*

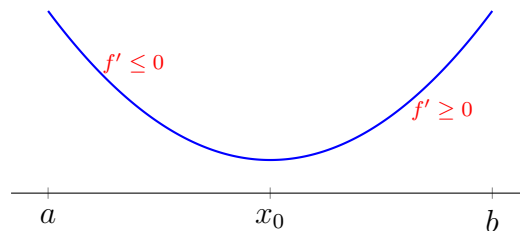
$$f' \leq 0 \quad \text{auf } (a, x_0) \quad \text{und} \quad f' \geq 0 \quad \text{auf } (x_0, b);$$

(2) *Maximum, wenn*

$$f' \geq 0 \quad \text{auf } (a, x_0) \quad \text{und} \quad f' \leq 0 \quad \text{auf } (x_0, b).$$

x_0 ist sogar die einzige Minimal- bzw. Maximalstelle von f in (a, b) , wenn x_0 die einzige Nullstelle von f' in (a, b) ist.

Bild / Beweis zu Teil (1).



Hier ist f antiton auf $(a, x_0]$ und isoton auf $[x_0, b)$; insbesondere gilt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Damit ist x_0 eine Minimalstelle von f in (a, b) .

Die Argumentation für Teil (2) erfolgt analog. □

Korollar 12.10. *Es sei $f \in C([a, b])$ auf (a, b) differenzierbar und es existiere der Grenzwert*

$$c := \lim_{x \searrow a} f'(x).$$

Dann ist f in a rechtsseitig differenzierbar und es gilt

$$f'_+(a) = c.$$

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in (a, b]$. Mit dem Mittelwertsatz 12.4 gilt dann

$$g_{a,f}(x_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \stackrel{MWS}{=} f'(\xi_n)$$

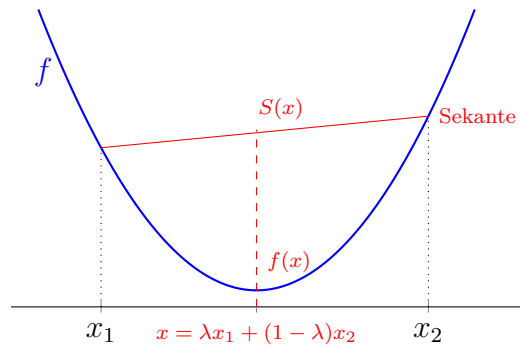
für ein $\xi_n \in (a, x_n)$. Insbesondere impliziert $x_n \rightarrow a$ schon $\xi_n \rightarrow a$. Man erhält

$$c = \lim_{x \searrow a} f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{a,f}(x_n) = f'_+(a). \quad \square$$

Analoge Kriterien gelten auch für linksseitige bzw. beidseitige Ableitungen, wobei im Fall von beidseitigen Ableitungen $c_+ = c_-$ gilt.

Man beachte nun das folgende Bild:

Im Video:
Korollar
12.7 $\frac{1}{2}$.



Bei der Betrachtung der obigen Funktion f mit einer Sekante S durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ können wir uns eine Stelle $x \in [x_1, x_2]$ anschauen. Hier existiert ein $\lambda \in [0, 1]$ mit $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Die Sekante $S(x)$ hat hier die folgende Darstellung:

$$S(x) = S_{f, x_1, x_2}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 12.11. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f heißt *konvex (auf I)*, falls für alle $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \quad (*)$$

Da die Bedingung $x \in (x_1, x_2)$ äquivalent ist zu der Aussage

$$\exists \lambda(0, 1) : \quad x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2,$$

ist die Formel $(*)$ äquivalent zu: Für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (**)$$

(b) Ersetzt man in der Ungleichung $(*)$ bzw. $(**)$ das Symbol $\leq$ durch

- $<$, so heißt f *strikt konvex*;
- $\geq$, so heißt f *konkav*;
- $>$, so heißt f *strikt konkav*.

Im Video:
Def.
12.8.

LINK: [TEIL 2 DER 19. VORLESUNG VOM 16.12.2021](#)

(c) Existiert ein $L \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x_1, x_2 \in I : \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|,$$

so heißt f *Lipschitz(-stetig)* (mit Lipschitz-Konstante L).

Beispiel 12.12.

- Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^\alpha, \quad \alpha \geq 1.$$

Im Video: Beispiel 12.9.
--

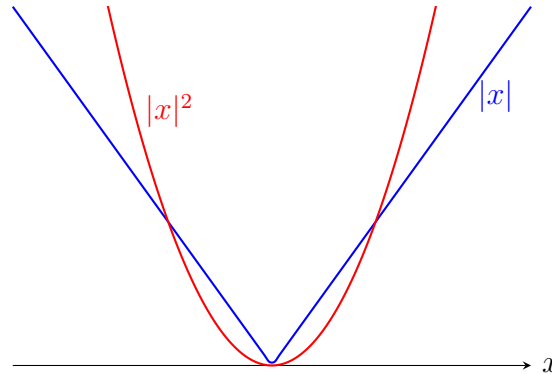


Abbildung 13: Der Graph von f für $\alpha = 1$ (in blau) und für $\alpha = 2$ (in rot).

f ist konvex für $\alpha = 1$ und strikt konvex für $\alpha > 1$. Für jedes beschränkte Intervall I ist weiter $f|_I$ Lipschitz-stetig. Falls $\alpha = 1$ ist, so ist auch f Lipschitz-stetig. Falls $\alpha > 1$ gilt, so ist f nicht Lipschitz-stetig.

Wir betrachten nun die folgende geometrische Interpretation von der Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

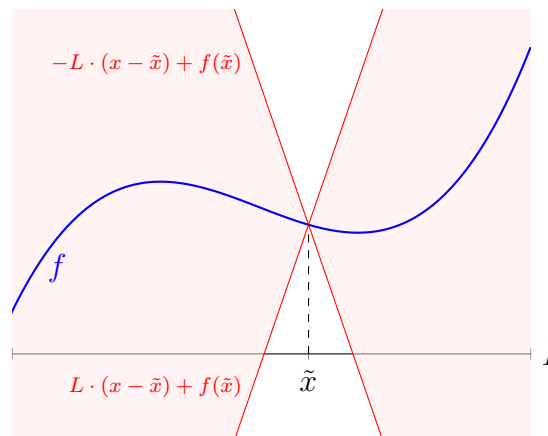


Abbildung 14: Graphische Illustration einer Lipschitz-stetigen Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Lipschitz-Konstanten L .

Die Lipschitz-Stetigkeit beschreibt damit, dass der Graph von f für jeden Punkt $\tilde{x} \in I$ innerhalb der in Abbildung 14 rot gefärbten Kegelflächen liegt.

- Die Funktion

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 5$$

ist offensichtlich konvex, aber nicht strikt konvex. Außerdem ist g Lipschitz-stetig mit $L = 0$.

- Die affin-lineare Funktion

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 + a_1 \cdot x, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

ist Lipschitz-stetig mit $L = |a_1|$ und konvex, aber nicht strikt konvex.

- Die Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist strikt konvex, aber nicht Lipschitz-stetig. Dafür ist aber für jedes beschränkte Intervall I die Einschränkung $\exp|_I$ Lipschitz-stetig.

- Die Funktion

$$g(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 6, & \text{falls } x \in \{a, b\}, \\ 5, & \text{falls } x \in (a, b), \end{cases}$$

ist nicht Lipschitz-stetig. Außerdem ist g konvex, aber nicht strikt konvex.

- Die Funktion

$$h_1: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\sqrt{x},$$

ist strikt konvex und nicht Lipschitz-stetig, aber für alle $\varepsilon > 0$ ist die Einschränkung $h_1|_{[\varepsilon, \infty)}$ Lipschitz-stetig.

- Dieselbe Eigenschaften von h_1 teilt auch die Funktion

$$h_2: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\ln(x).$$

Bemerkung 12.13. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (i) Falls f Lipschitz-Stetig ist, dann ist f auch stetig.

Beweis. Wähle o.B.d.A. $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ für $L \neq 0$ (für $L = 0$ ist f nämlich konstant und damit offensichtlich stetig). Daraus folgt

$$|f(x) - f(y)| \stackrel{\text{L-Stet.}}{\leq} L|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Damit ist f auch stetig. □

- (ii) f ist genau dann konkav, wenn $-f$ konvex ist.

- (iii) Ist $J \subset I$ auch ein Intervall und f konvex auf I , so ist f auch konvex auf J .

Im Video:
Bem.
12.10.

- (iv) Es seien $c, d \in I$ mit $\inf I < c < d < \sup I$. Sind $f|_{I \cap (c, \infty)}$ und $f|_{I \cap (-\infty, d)}$ jeweils konvex, so ist f sogar auf ganz I konvex. Diese Aussage kann man induktiv auf n Teilintervalle verallgemeinern. Dies ist ein praktisches Kriterium für stückweise definierte Funktionen. Da muss man nur an jeder Nahtstelle und jedem Teilsegment einzeln auf Konvexität prüfen.

┌

Achtung: Die Überlappung der Intervalle $(-\infty, d)$ und (c, ∞) ist wichtig! Falls $c = d$ gilt und die Einschränkungen $f|_{[a, c]}$ und $f|_{[d, b]}$ jeweils konvex sind, so muss f nicht unbedingt konvex sein.

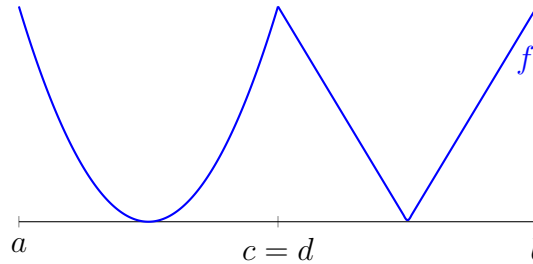


Abbildung 15: Eine Zusammensetzung von zwei konvexen Funktionen, die selbst nicht konvex ist.

└

- (v) f ist genau dann konvex, wenn für jedes Tripel $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (***)$$

Im Video:
(vi)

Dies ist außerdem äquivalent zur folgenden Aussage (Übung!): Für $x_1 < x < x_2$ wie oben gilt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Beweis der ersten Äquivalenz. Wir multiplizieren die Ungleichung (*) mit $x_2 - x_1 > 0$: Es gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Leftrightarrow \overbrace{(x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x)}^{=(x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x)} \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)). \end{aligned}$$

Division durch $(x_2 - x)(x - x_1) > 0$ liefert dann die Ungleichung (* * *). □

- (vi) Für $a < b < c < d$ gilt:

$$f \text{ ist konvex auf } (a, d) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist Lipschitz-stetig auf } [b, c]$$

Im Video:
(vii)

Beweis. Es sei f konvex auf (a, d) . Für alle t_-, t_+ mit $a < t_- < b < c < t_+ < d$ und $x_1, x_2 \in [b, c]$ gilt dann (Übung!)

$$\frac{f(b) - f(t_-)}{b - t_-} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(t_+) - f(c)}{t_+ - c}.$$

Wähle nun als Lipschitz-Konstante

$$L = \max \left\{ \left| \frac{f(b) - f(t_-)}{b - t_-} \right|, \left| \frac{f(t_+) - f(c)}{t_+ - c} \right| \right\}.$$

Direktes Nachrechnen ergibt dann die Lipschitz-Stetigkeit von f auf $[b, c]$. $\square$

LINK: [TEIL 1 DER 20. VORLESUNG VOM 20.12.2021](#)

Es folgen nun schöne Anwendungen des Mittelwertsatzes 12.4 bzw. des Satzes 12.7:

Satz 12.14 (Charakterisierung der Exponentialfunktion). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit*

$$f' = \alpha f \quad \text{auf } I.$$

Im Video:
Satz
12.10 $\frac{1}{2}$.

Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = c \cdot e^{\alpha x} \quad \forall x \in I.$$

Beweis. Wir setzen

$$g(x) = f(x) \cdot e^{-\alpha x} \quad \text{für } x \in I.$$

Für alle $x \in I$ gilt dann

$$g'(x) = f'(x)e^{-\alpha x} - \alpha f(x)e^{-\alpha x} \stackrel{\text{Ann.}}{=} \alpha f(x)e^{-\alpha x} - \alpha f(x)e^{-\alpha x} = 0.$$

Nach Satz 12.7 (e) ist dann g konstant auf I , es existiert also ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$g = c \quad \text{auf } I.$$

Im Video:
Satz
12.7 $\frac{1}{5}$.

Äquivalenzumformung liefert direkt

$$f(x) = g(x) \cdot e^{\alpha x} = c \cdot e^{\alpha x} \quad \forall x \in I. \quad \square$$

Satz 12.15. *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

$$f \text{ ist konvex auf } [a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f' \text{ ist isoton auf } (a, b).$$

Im Video:
Satz
12.11.

Beweis.

($\Rightarrow$) Es sei f konvex auf $[a, b]$. Für jedes Tripel $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt dann (**). Bildet man den Grenzwert $x \searrow x_1$, erhält man

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Bildet man den Grenzwert $x \nearrow x_2$, so erhält man

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Also ist $x \mapsto f'(x)$ isoton auf (a, b) .

($\Leftarrow$) Es seien $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz 12.4 existieren dann $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Da f' isoton ist, gilt $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Insbesondere ist dadurch die Ungleichung (**) erfüllt, weshalb f konvex auf $[a, b]$ ist. $\square$

Korollar 12.16. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) zweimal differenzierbar. Dann gelten:

Im Video:
Korollar
12.12.

- (i) f ist konvex auf $[a, b] \Leftrightarrow f'' \geq 0$ auf (a, b) ;
- (ii) $f'' > 0$ auf $(a, b) \Rightarrow f$ ist strikt konvex auf $[a, b]$.

Beweis.

- (i) Es sei f konvex auf $[a, b]$. Nach Satz 12.15 ist dies äquivalent dazu, dass f' isoton auf (a, b) ist, was nach Satz 12.7 wiederum äquivalent zu $f'' \geq 0$ auf (a, b) ist.
- (ii) Es gelte $f'' > 0$ auf (a, b) . Nach Teil (i) ist f zumindest konvex auf $[a, b]$. Nehmen wir nun an, dass strikte Konvexität verletzt ist, es existiert also ein Tripel $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x < x_2$, so dass in (**) Gleichheit gilt. Nach dem Mittelwertsatz 12.4 existieren dann $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \stackrel{(**)}{=} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \stackrel{\text{MWS}}{=} f'(\xi_2).$$

Also ist f' nicht streng monoton, so dass f'' eine Nullstelle besitzen muss – im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f'' > 0$ auf (a, b) gilt. Also ist f strikt konvex auf $[a, b]$. $\square$

Satz 12.17. Es seien $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $x \in (a, b)$. Dann gelten:

- (i) Ist x ein globales Maximum von f , so ist f schon konstant;

Im Video:
Satz
12.13.

- (ii) Ist x ein lokales Maximum von f , so ist f auf einer Umgebung von x konstant, es existieren also $\delta > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(y) = c \quad \forall y \in B_\delta(x).$$

- (iii) Ist f sogar strikt konvex, so hat f höchstens ein globales Minimum.
- (iv) Sind $c, d \in I$, $c < d$, zwei globale Minimalstellen von f , so sind alle $y \in [c, d]$ globale Minimalstellen von f .

Beweis.

- (i) Da $x \in (a, b)$ gilt, existieren $y, z \in (a, b)$ mit $a < y < x < z < b$ (insbesondere existiert dann ein $t_0 \in (0, 1)$ mit $x = t_0 y + (1 - t_0)z$). Für beliebige $t \in [0, 1]$ folgt daraus

$$f(x) = tf(y) + (1-t)f(z) \stackrel{\text{Max.}}{\geq} tf(y) + (1-t)f(z) \stackrel{\text{Konv.}}{\geq} f(ty + (1-t)z) \stackrel{t=t_0}{=} f(x).$$

Insbesondere hat man oben sogar überall Gleichheit und es folgt

$$f(z) = f(y) = f(x).$$

Variiert man y und z , so sieht man, dass f konstant ist.

LINK: [TEIL 2 DER 20. VORLESUNG VOM 20.12.2021](#)

- (ii) Da x ein lokales Maximum von f ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall y \in (x - \delta, x + \delta) : \quad f(y) \leq f(x).$$

Wähle nun $x - \delta < y < z < x + \delta$ beliebig. Dann existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ mit

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Damit erhält man

$$f(x) = \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z) \stackrel{\text{lok. Max.}}{\geq} \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z) \stackrel{\text{konv.}}{\geq} f(\lambda y + (1 - \lambda)z) = f(x).$$

Damit hat man in den obigen Ungleichheiten sogar Gleichheiten und es folgt $f(x) = f(y) = f(z)$. Also ist f auf $B_\delta(x)$ konstant.

- (iii) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ strikt konvex. Wir nehmen nun an, dass $c, d \in I$ mit $c < d$ globale Minimalstellen von f seien. Für

$$x = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \in (c, d) \subset I$$

gilt dann

$$f(x) = f\left(\frac{c}{2} + \frac{d}{2}\right) \stackrel{\text{str. konv.}}{<} \frac{1}{2}f(c) + \frac{1}{2}f(d) = f(c) = \min f(I),$$

was ein Widerspruch ist. Also hat f höchstens ein globales Minimum.

- (iv) Es seien $c, d \in I$ mit $c < d$ zwei globale Minimalstellen von f , es gelte also $f(c) = f(d) = \min f(I) =: m$. Jedes $x \in [c, d]$ hat dann die Darstellung

$$x = \lambda c + (1 - \lambda)d, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Es folgt

$$f(x) = f(\lambda c + (1 - \lambda)d) \stackrel{\text{konv.}}{\leq} \underbrace{\lambda f(c) + (1 - \lambda)f(d)}_{=\lambda m + (1-\lambda)m} = m.$$

Damit sind alle $x \in [c, d]$ globale Minimalstellen von f .

□

Satz 12.18 (Hinreichende Kriterien für Maxima und Minima). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gelten:*

Im Video:
Satz
12.14.

- (i) *Gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : \quad f'(x) > 0$$

und

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : \quad f'(x) < 0,$$

so hat f in x_0 ein lokales Maximum;

- (ii) *Gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : \quad f'(x) < 0$$

und

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : \quad f'(x) > 0,$$

so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Es sei im Folgenden sogar $f \in C^2(a, b)$. Dann gelten:

- (iii) *Ist $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle von f ;*

- (iv) *Ist $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle von f .*

Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2.$$

Es gilt $f'(x) = 2ax$ und $f''(x) = 2a$. Weiter ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2a$. Für $a > 0$ ist $f''(0) > 0$ und $x_0 = 0$ eine lokale Minimalstelle von f . Für $a < 0$ ist analog $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle von f .

Die obigen Kriterien sind nun hinreichend, aber *nicht notwendig*. Ist nämlich $a = 0$, so ist $f = 0$ auf $\mathbb{R}$, so dass alle $x \in \mathbb{R}$ Minimal- und Maximalstellen sind, obwohl $f' = 0$ und $f'' = 0$ auf $\mathbb{R}$ gilt.

Beweis von Satz 12.18.

- (i) Nach Satz 12.7 ist f streng isoton auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und streng antiton auf $(x_0, x_0 + \delta)$.
Damit gilt

$$f(x) < f(y) \quad \forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = \dot{B}_\delta(x_0).$$

- (ii) Der Beweis erfolgt analog zu Teil (i).
(iii) Es sei f'' stetig und $f''(x_0) < 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f'' < 0$ auf $B_\delta(x_0)$.
Nach Satz 12.7 ist dann f' streng antiton auf $B_\delta(x_0)$. Ist nun $f'(x_0) = 0$, so folgt aufgrund der strengen Antitonie

$$f' > 0 \quad \text{auf } (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{und} \quad f' < 0 \quad \text{auf } (x_0, x_0 + \delta).$$

Nach Teil (i) hat f dann ein lokales Maximum in x_0 .

- (iv) Der Beweis erfolgt analog zu Teil (iii). □

Definition 12.19. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $x_0 \in (a, b)$.

- (a) Ist $f \in C^1(a, b)$ und $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *stationärer Punkt von f* .
(b) Besitzt f in x_0 keine Ableitung oder besitzt f in x_0 eine Ableitung mit $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *kritischer Punkt von f* . Insbesondere gilt

$$x_0 \text{ ist ein stationärer Punkt von } f \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ ist ein kritischer Punkt von } f.$$

- (c) Ist f stetig auf (a, b) , so heißt x_0 *Wendepunkt von f* , falls f konvex auf (a, x_0) und konkav auf (x_0, b) ist oder f konkav auf (a, x_0) und konvex auf (x_0, b) ist.

Satz 12.20 (Kriterien für Konkavität bzw. Wendepunkte). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:*

- (a) f ist genau dann konvex auf I , wenn f' isoton auf I ist;
(b) f ist genau dann konkav auf I , wenn f' antiton auf I ist.

Sei im Folgenden f sogar zweimal differenzierbar auf I . Dann gelten:

- (c) f ist genau dann konvex auf I , wenn $f'' \geq 0$ auf I gilt;
(d) f ist genau dann konkav auf I , wenn $f'' \leq 0$ auf I gilt;
(e) Ist $x_0 \in (a, b) \subset I$ ein Wendepunkt von f , so gilt $f''(x_0) = 0$.
(f) Sei $f \in C^3(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann hat f einen Wendepunkt in x_0 .

Beweis. Teile (a), (b), (c) und (d) sind klar unter Betracht von Satz 12.18 und Vorzeichenwechsel.

Im Video:
Def.
12.15.

Im Video:
Satz
12.16.

(e) Es gilt:

$x_0 \in (a, b)$ ist ein Wendepunkt von f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. & f|_{(a, x_0)} \text{ ist konvex und } f|_{(x_0, b)} \text{ ist konkav;} \\ 2. & f|_{(a, x_0)} \text{ ist konkav und } f|_{(x_0, b)} \text{ ist konvex.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. & f'|_{(a, x_0)} \text{ ist isoton und } f'|_{(x_0, b)} \text{ ist antiton;} \\ 2. & f'|_{(a, x_0)} \text{ ist antiton und } f'|_{(x_0, b)} \text{ ist isoton.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. & f \text{ hat ein lokales Maximum in } x_0; \\ 2. & f \text{ hat ein lokales Minimum in } x_0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = 0.$$

(f) Es sei $f \in C^3$ und $f'''(x_0) > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f'''|_{B_\delta(x_0)} > 0$, weshalb $f''|_{B_\delta(x_0)}$ strikt isoton ist. Dann gilt

$$f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''|_{(x_0-\delta, x_0)} < 0 & \xRightarrow{12.16} \text{ strikt konkav} \\ f''|_{(x_0, x_0+\delta)} > 0 & \xRightarrow{12.16} \text{ strikt konvex} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \text{ hat einen Wendepunkt in } x_0.$$

Der Fall $f'''(x_0) < 0$ erfolgt analog. □

LINK: [TEIL 1 DER 21. VORLESUNG VOM 23.12.2021](#)

Beispiel 12.21.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \cdot x^{n-1}, \\ f''(x) &= n(n-1) \cdot x^{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

sowie

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) \cdot x^{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Für $n = 3$ gilt

$$f''(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(0) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \text{ ist eine Wendestelle.}$$

Im Video:
Beispiel
12.17.

Für $n = 4$ gilt

$$f''(0) = 0 = f'''(0).$$

In diesem Fall ist 0 keine Wendestelle, sondern ein eindeutiges globales Minimum. Außerdem ist x^4 auf ganz $\mathbb{R}$ konvex.

(ii) Für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Es gilt

$$f'(x) = 2a_2 x + a_1 \quad \text{und} \quad f''(x) = 2a_2.$$

Daraus folgt:

$$a_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' \geq 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist konvex auf } \mathbb{R};$$

$$a_2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' \leq 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist konkav auf } \mathbb{R}.$$

(iii) Wir betrachten die Potenzfunktion

$$p_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$p'_\alpha(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \text{und} \quad p''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}.$$

Ist $\alpha < 0$, so ist p_α strikt konvex und strikt antiton. Ist $\alpha \in (0, 1)$, so ist p_α strikt isoton und strikt konkav. Ist $\alpha > 1$, so ist p_α strikt isoton und strikt konvex. Außerdem gilt:

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha \text{ ist konstant} \quad \Rightarrow \quad p_\alpha \text{ ist isoton, antiton, konvex und konkav};$$

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha \text{ ist linear} \quad \Rightarrow \quad p_\alpha \text{ ist isoton, konkav und konvex}.$$

Beispiel 12.22. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Im Video:
Beispiel
12.18.

Es gilt

$$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $f'(0) = 1$ und $f'(x) \in (0, 1)$ für $x \neq 0$, da $1+x^2 > 1$ gilt. Daraus folgt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = 1 \quad \stackrel{\text{Übg.}}{\Rightarrow} \quad f \text{ ist Lipschitz-stetig mit } L = 1$$

$\stackrel{12.7}{\Rightarrow} f$ ist strikt isoton auf $\mathbb{R}$.

Weiter ist

$$f''(x) = -\frac{3}{2} (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \underbrace{\frac{3|x|}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}}_{\geq 0}.$$

Es folgt $f''(0) = 0$ und

$$f''|_{(-\infty, 0)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konvex auf } (-\infty, 0);$$

$$f''|_{(0, \infty)} < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konkav auf } (0, \infty).$$

Damit hat f in $x = 0$ einen Wendepunkt.

Betrachten wir nun die Grenzwerteigenschaften von f : Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Damit wird für $|x| \rightarrow \infty$ die Kurve immer flacher und ist asymptotisch konstant. (Sie ist jedoch streng isoton auf $\mathbb{R}$)

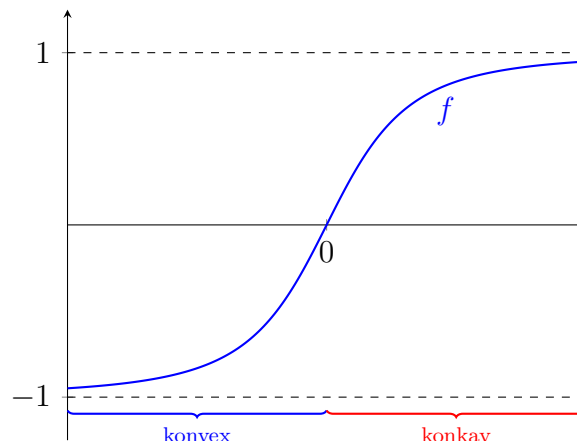


Abbildung 16: Der Graph von $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Definition 12.23. Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $I = (a, b)$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, dass der Graph von f eine

- (i) *senkrechte/vertikale Asymptote in b* besitzt, falls $b < \infty$ und

$$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| = \infty.$$

Dann heißt die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b\}$ *senkrechte Asymptote zu f* . Die Definition für a statt b erfolgt analog;

Im Video:
Defi-
nition
12.19.

(ii) *waagrechte/horizontale Asymptote*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = c\}$$

besitzt, falls

$$a = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

oder

$$b = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c;$$

(iii) *schiefe Asymptote*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a_0 + a_1 x, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

besitzt, falls

$$a = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - a_0 - a_1 x) = 0$$

oder

$$b = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b} (f(x) - a_0 - a_1 x) = 0.$$

┌ Man kann $a_1 \neq 0$ verlangen, um eine horizontale Asymptote auszuschließen oder aber eine horizontale Asymptote als Spezialfall einer schiefen Asymptote betrachten. ┐

(iv) Ist $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine andere (häufig einfachere Funktion), wird sie als *nicht-gerade Asymptote zu der Funktion f* (bzw. ihren Graphen) bezeichnet, falls

$$a = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = 0$$

oder

$$b = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b} (f - g)(x) = 0.$$

┌ Achtung: Man unterscheide dies zu $f \sim g$ für $x \rightarrow \infty$: Für

$$f(x) = e^x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = e^x$$

ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x}}{1} = 1.$$

Es gilt $f \sim g$, aber $\lim_{x \rightarrow \infty} (f - g)(x) = 1$. ┐

Häufig betrachtet man auch Asymptoten einer Funktion $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder mit mehreren fehlenden Punkten), z.B. bei rationalen Funktionen. Man betrachte dann alle Teilintervalle einzeln.

Beispiel 12.24. Es seien $x_0 = 1$, $I = \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5}{5x - 5} = \frac{x^3 - x^2}{5(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{x-1}.$$

Im Video:
Beispiel
12.20.

f besitzt

- eine vertikale Asymptote $\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ (sowohl für $x \searrow 1$ als auch für $x \nearrow 1$);

LINK: [TEIL 2 DER 21. VORLESUNG VOM 23.12.2021](#)

- die Parabelfunktion $x \mapsto \frac{1}{5}x^2$ als nicht-gerade Asymptote. Diese nennt man auch *Näherungsparabel*.

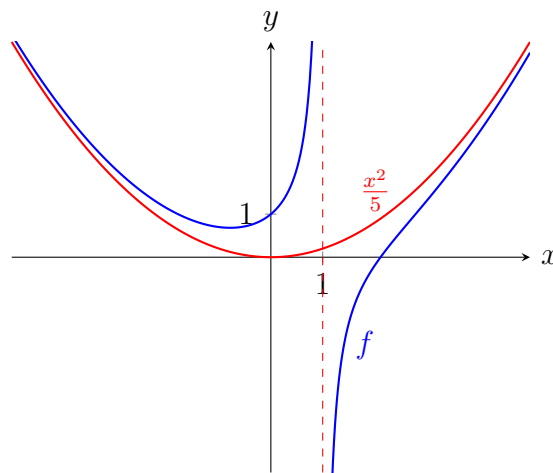


Abbildung 17: Die Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{x-1}$ (blau) und ihrer Asymptoten (rot).

Für

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{\operatorname{sgn}(x)}$$

ist dagegen

- $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ eine vertikale Asymptote nur für $x \nearrow 0$;
- $h(x) = 0$ eine horizontale Asymptote auf $(-\infty, 0)$;
- $i(x) = x$ eine schiefe Asymptote auf $(0, \infty)$.

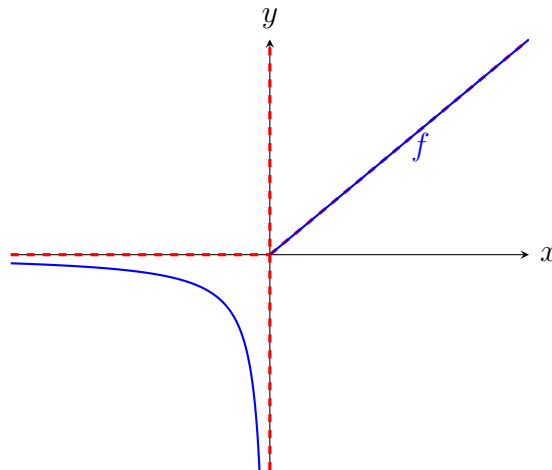


Abbildung 18: Die Graphen der Funktion $g(x) = x^{\text{sgn}(x)}$ (blau) sowie ihrer Asymptoten (rot).

Beispiel 12.25. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Im Video:
Beispiel
12.21.

Es gilt

$$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x),$$

f ist also eine ungerade Funktion. Damit reicht es aus, die Einschränkung

$$f|_{[0, \infty)}: [0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

zu untersuchen. Es gilt $f(0) = 0$, während $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ gilt. Weiter gilt

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty.$$

Damit enthält

$$\{(\pm 1, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

die senkrechten Asymptoten von f . Weiter gilt

$$h(x) := f(x) - x = \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x}{x^2 - 1} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0,$$

so dass

$$\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

eine schiefe Asymptote von f für $x \rightarrow \pm\infty$ ist.

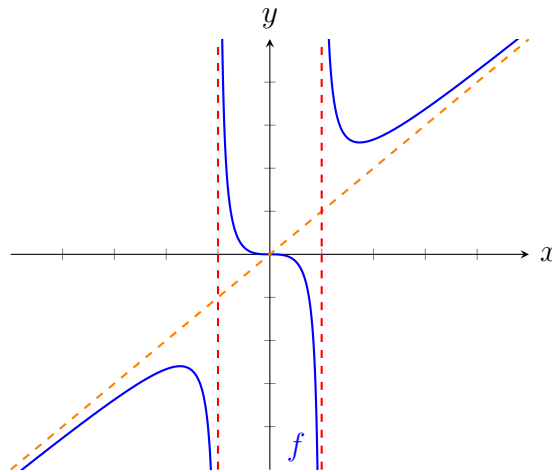


Abbildung 19: Die Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ (blau) sowie ihrer Asymptoten (rot und orange).

Die Asymptoten implizieren dabei, dass f auf $(-1, \infty)$ mindestens ein lokales Minimum und auf $(-\infty, -1)$ mindestens ein lokales Maximum besitzt: Es gilt

$$f'(x) = 3x^2(x^2-1)^{-1} - x^3(x^2-1)^{-2} \cdot 2x = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Daraus folgt dann

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

Damit ist $-\sqrt{3}$ ein Kandidat für eine lokale Maximalstelle in $(-\infty, -1)$; insbesondere ist es sogar die einzige lokale Maximalstelle, da es keine anderen Konkurrenten gibt. Analog zeigt man, dass $\sqrt{3}$ die einzige lokale Minimalstelle auf $(1, \infty)$ ist. $x = 0$ ist keine Extremstelle, da f in $x = 0$ das Vorzeichen wechselt. Außerdem gilt

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \quad \text{und} \quad f'''(x) = -6 \frac{x^4+6x^2+1}{(x^2-1)^4}.$$

Damit besitzt f die folgenden (in einer Tabelle zusammengefassten) Eigenschaften:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f	negativ		positiv	negativ	positiv	
	isoton		antiton		isoton	
	konkav		konvex	konkav	konvex	

Beispiel 12.26 (Nachtrag zu Satz 12.5 von L'Hospital).

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$, $x \neq 0$ und

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)} := \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Im Video:
Beispiel
12.22.

Offensichtlich gilt $f(0) = 0 = g(0)$ und

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a) - b^x \cdot \ln(b) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

sowie $g'(x) = 1 \neq 0$. Daraus folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \stackrel{12.5}{=} \lim_{x \rightarrow 0} h(x).$$

(ii) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta > 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \alpha$ und $x \geq 1$ gilt

$$0 < \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \leq \frac{x^k}{e^{\beta x}}.$$

Es reicht also aus, die Aussage für $\alpha = k \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dazu wenden wir den Satz 12.5 von L'Hospital k -mal an: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^{\beta x}} = \frac{k}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{k-1}}{e^{\beta x}} = \frac{k(k-1)}{\beta^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{k-2}}{e^{\beta x}} = \dots = \frac{k!}{\beta^k} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{e^{\beta x}}}_{=0} = 0. \quad \square$$

Die Substitution $y = e^x$ liefert nun

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(\ln(y))^\alpha}{y^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

Die Substitution $t = \frac{1}{y}$ liefert außerdem

$$\lim_{t \searrow 0} (t^\beta \cdot \ln(t)) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y^\beta} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right) = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(y)}{y^\beta} = 0.$$

13 Weitere trigonometrische Funktionen

Dieses Kapitel ist mit der früheren Diskussion der trigonometrischen Funktionen zusammenzufassen, indem man zum Beispiel alles nach dem Kapitel zur Differenzierbarkeit macht.

- ① Wir betrachten

$$f := \sin : I := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$f' = \cos$ ist dann positiv auf $\overset{\circ}{I} = I \setminus \left\{ \inf I, \sup I \right\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nach Satz 12.7 ist f dann streng isoton auf I . Aufgrund der Stetigkeit von f ist außerdem

$$f(I) = [\min f(I), \max f(I)] = [-1, 1] =: J$$

ein Intervall. Damit ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} := \arcsin : J \rightarrow I$$

definiert. Sie heißt *Arkussinus* und ist ebenfalls streng isoton und differenzierbar auf $\overset{\circ}{J} = (-1, 1)$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

wobei $y = f(x) = \sin(x)$.

- ② Wir betrachten nun

$$f := \cos : I := [0, \pi] \rightarrow J := [-1, 1].$$

f ist streng antiton und differenzierbar auf $\overset{\circ}{I} = (0, \pi)$ – und damit auch bijektiv. Damit ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} := \arccos : J \rightarrow I$$

definiert. Sie heißt *Arkuskosinus* und ist ebenfalls streng antiton, ist stetig auf J und differenzierbar in allen Punkten $y \in \overset{\circ}{J} = (-1, 1)$, $y = f(x) = \cos(x)$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

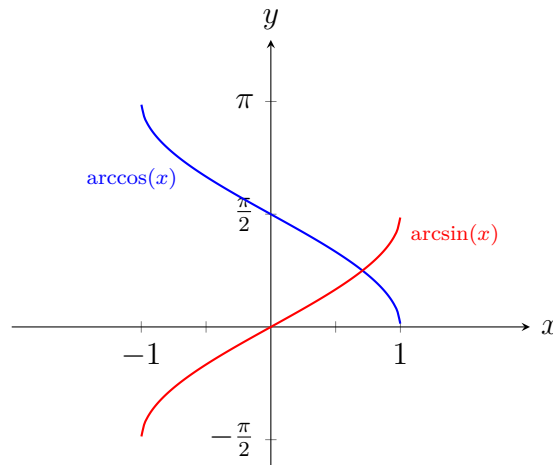


Abbildung 20: Die Graphen der Arkussinusfunktion (rot) und der Arkuskosinusfunktion (blau).

③ Wir betrachten

$$f := \tan: I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es gilt $f \in C^\infty(I)$; außerdem ist f bijektiv wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty.$$

Damit ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} := \arctan: \mathbb{R} \rightarrow I$$

definiert. Sie heißt *Arkustangens*, ist streng isoton und differenzierbar in allen Punkten $y = f(x) = \tan(x) \in \mathbb{R}$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2},$$

da

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

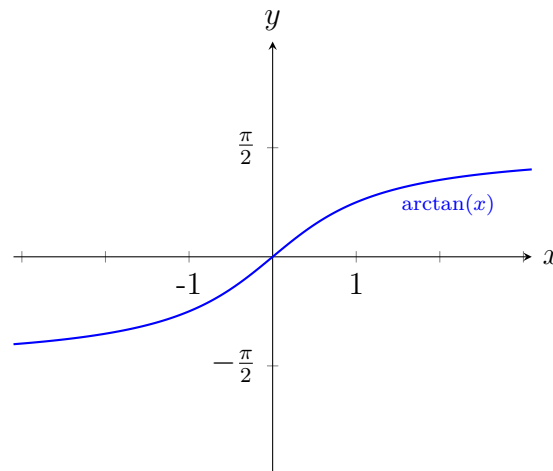


Abbildung 21: Der Graph der Arkustangensfunktion in blau.

LINK: [TEIL 1 DER 22. VORLESUNG VOM 10.01.2022](#)

④ Betrachte die Funktion

$$f := \cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Wir erhalten:

- $f': (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x);$
- Also ist $f' \leq 1$ auf $(0, \pi)$. Insbesondere ist f strikt antiton und injektiv;
- Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sin(x)} = -\infty;$$

- Aufgrund der Stetigkeit von f folgt damit $f((0, \pi)) = \mathbb{R}$.

Damit existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} := \operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi),$$

wird mit *Arkuscotangens* bezeichnet, ist streng antiton und differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{-1}{1 + f^2(x)} = -\frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y = f(x) \in \mathbb{R}.$$

┌ Übung: Zeigen Sie, dass

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot}(y) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{arccot}(y) = 0.$$

└

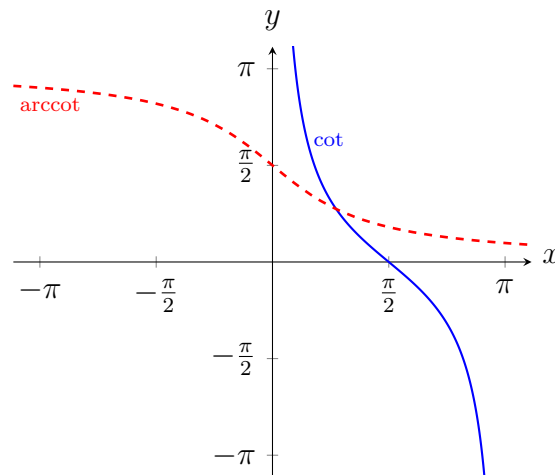


Abbildung 22: Der Graph von $\cot$ in blau und von arccot in rot.

⑤ Hyperbelfunktionen

Wir definieren die Funktionen

$$f_1 := \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}),$$

$$f_2 := \cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}),$$

$$f_3 := \tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

sowie

$$g := \coth: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Wir bezeichnen f_1 mit *Sinus hyperbolicus*, f_2 mit *Cosinus hyperbolicus*, f_3 mit *Tangens hyperbolicus* und g mit *Cotangens hyperbolicus*.

Offensichtlich ist $\cosh$ eine gerade Funktion und $\sinh$, $\tanh$ sowie $\coth$ jeweils ungerade Funktionen. Es ergeben sich, ähnlich wie bei den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen in Satz 9.31 ergeben sich die folgenden Rechenregeln:

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

und

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y).$$

Des Weiteren gilt:

$$1 = \cosh(0) \leq \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$0 = \sinh(0) < \sinh(x) < \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0;$$

$$\sinh' = \cosh > 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sinh \text{ ist strikt isoton auf } \mathbb{R};$$

$$\cosh' = \sinh \begin{cases} > 0 & \text{auf } (0, \infty) \\ < 0 & \text{auf } (-\infty, 0) \end{cases}, \quad \text{da } \sinh \text{ ungerade ist.}$$

Für $x \rightarrow \infty$ gilt weiter:

$$\cosh(x) \rightarrow \infty, \quad \sinh(x) \rightarrow \infty, \quad \tanh(x) \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \coth(x) \rightarrow 1.$$

Weiter stellt die Gleichung

$$1 = \cosh(0) = \cosh(x - x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

eine Beziehung zur Hyperbel dar, da die Abbildung

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$$

den Hyperbelast

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \quad x^2 - y^2 = 1\}$$

parametrisiert. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $h(t) \in H$.

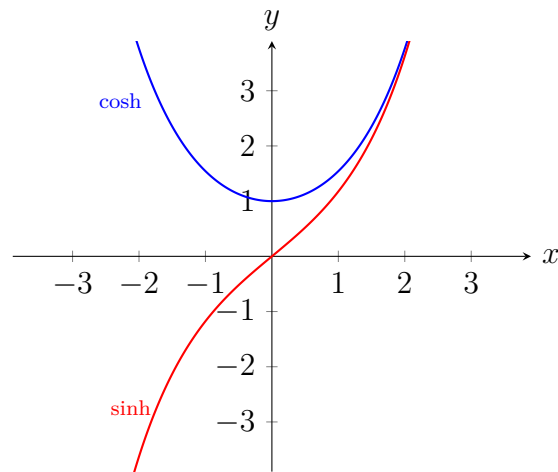


Abbildung 23: Der Graph von $\cosh$ in blau und von $\sinh$ in rot.

Die Funktion

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

ist ungerade, streng isoton und bijektiv und differenzierbar mit

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

Weiter ist

$$\coth|_{(0,\infty)}: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$$

streng antiton, bijektiv und differenzierbar mit

$$\coth'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x), \quad x \neq 0.$$

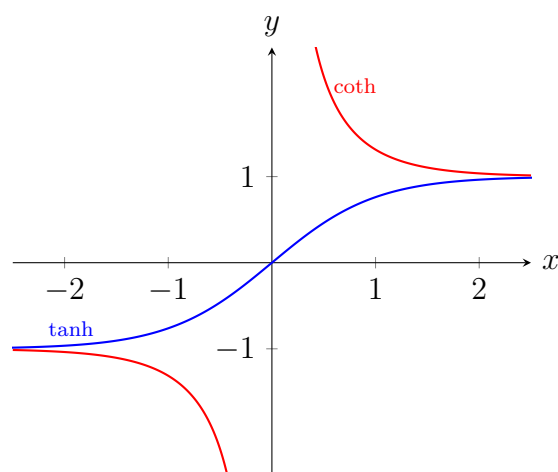


Abbildung 24: Der Graph von $\tanh$ in blau und von $\coth$ in rot.

LINK: [TEIL 2 DER 22. VORLESUNG VOM 10.01.2022](#)⑥ Areafunktionen

Da $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng isoton und bijektiv ist, existiert die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

diese wird *Areasinus hyperbolicus* genannt. Da $\cosh: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ streng isoton und bijektiv ist, existiert wieder die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arcosh} := (\cosh)^{-1} : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty);$$

diese wird *Areacosinus hyperbolicus*. Analog sind *Aretangens hyperbolicus* durch

$$\operatorname{artanh} := (\tanh)^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

und *Areacotangens hyperbolicus* durch

$$\operatorname{arcoth} := (\coth)^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert. Aus den expliziten Formeln für $\sinh$ und $\cosh$ ergeben sich ebenfalls explizite Darstellungen für die Areafunktionen: Es gilt

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad \operatorname{arsinh}(y) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right), \quad (*)$$

$$\forall y \geq 1 : \quad \operatorname{arcosh}(y) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right),$$

$$\forall y \in (-1, 1) : \quad \operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right),$$

$$\forall |y| > 1 : \quad \operatorname{arcoth}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y+1}{y-1} \right).$$

Beweis von ().* Setze $y = \sinh(x)$, also $x = \operatorname{arsinh}(y)$. Dies liefert

$$e^x = \sinh(x) + \cosh(x) = \sinh(x) + \sqrt{1 + \sinh^2(x)} = y + \sqrt{1 + y^2}.$$

Bildung des Logarithmus liefert dann die Behauptung. □

Die Ableitungen der Areafunktionen erhält man entweder aus den obigen expliziten Darstellungen oder über die Formel für die Ableitung von Umkehrfunktionen. Es gilt

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad \operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

$$\forall y > 1 : \quad \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

$$\forall |y| < 1 : \quad \operatorname{artanh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2},$$

$$\forall |y| > 1 : \quad \operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{1 - y^2}.$$

14 Das Konzept des riemannschen Integrals

Motivation. Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und

$$f: I \rightarrow [0, \infty)$$

eine „schöne“ Funktion, z.B. stetig. Sei weiter

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, \quad y = f(x)\}$$

der Graph von f und

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Menge zwischen dem Abschnitt I auf der x -Achse und dem Graphen von f :

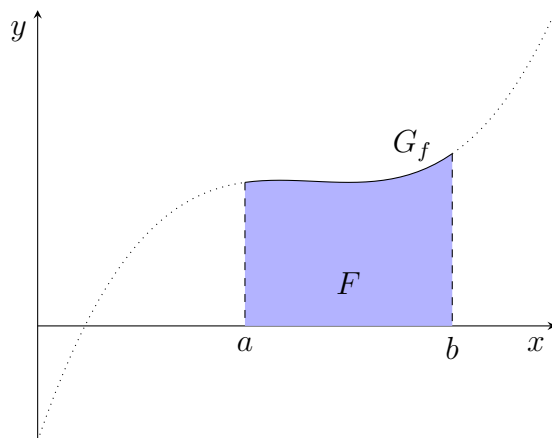


Abbildung 25: Der Graph einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und die Menge F in blau.

Damit stellen sich die folgenden Fragen:

- Kann man der Menge F einen Flächeninhalt zuordnen?
- Wie „schön“ muss f dazu sein? Reicht Stetigkeit aus?

Beispiel 14.1. Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

(a) Für $c > 0$ betrachten wir

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := c.$$

Dann besitzt F die Fläche

$$\text{vol}(F) = (b - a) \cdot c.$$

(b) Für $a \geq 0$ sei

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x.$$

Dann gilt

$$\text{vol}(F) = \text{vol}(F_g) = a \cdot (b - a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(c) Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $d \in (a, b)$ sei

$$h: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} c_1, & \text{falls } x \in [a, d], \\ c_2, & \text{falls } x \in (d, b]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\text{vol}(F_h) = c_1 \cdot (d - a) + c_2(b - d).$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 14.2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Menge

$$Z = (x_0, x_1, \dots, x_n) \subset [a, b] =: I$$

heißt *Zerlegung von I* , falls

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Wir setzen

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

und

$$\|Z\| := \max_{k=1, \dots, n} \{x_k - x_{k-1}\}.$$

$\|Z\|$ nennen wir *Feinheit*, *Feinheitsgrad* oder *-maß der Zerlegung Z* . Eine weitere Zerlegung $Z' \subset I$ von I heißt *feiner als Z* , falls $Z \subset Z'$.

Definition 14.3. Es sei $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von I . Für $k = 1, \dots, n$ setze

$$m_k = m_k(f) := \inf_{x \in I_k} f(x), \quad s_k = s_k(f) := \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Dann bezeichnen wir

$$U_z = U_z(f) := \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

als *Untersumme* von f über Z und

$$O_z = O_z(f) := \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

als *Obersumme* von f über Z .

Für zwei Zerlegungen $Z_{gr} \subset Z_{fn} \subset I$ gilt

$$U_{Z_{gr}} \leq U_{Z_{fn}} \quad \text{und} \quad O_{Z_{gr}} \geq O_{Z_{fn}}.$$

Daraus folgt (Übung!): Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 von I gilt

$$U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f).$$

Wegen der Monotonie und Beschränktheit der obigen Summen macht die folgende Definition Sinn:

Definition 14.4 (Darbouxintegral). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir bezeichnen

$$\underline{I} := \int_a^b f(x) \, dx = \sup \{ U_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b] \}$$

als *Unterintegral* oder *unteres Darbouxintegral* von f (über $[a, b]$) und

$$\bar{I} := \int_a^b f(x) \, dx = \inf \{ O_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b] \}$$

als *Oberintegral* oder *oberes Darbouxintegral* von f (über $[a, b]$).

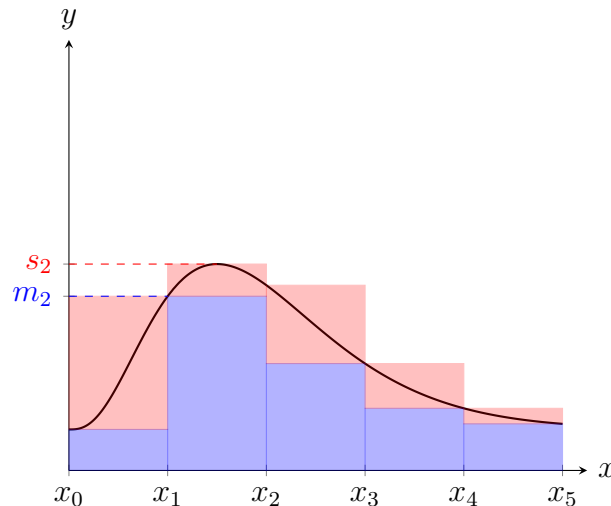


Abbildung 26: Illustration der Darboux-Untersumme (in blau) und der Darboux-Obersumme (in rot) gemäß Definition 14.3 für $n = 5$.

LINK: TEIL 1 DER 23. VORLESUNG VOM 13.01.2022

Im gesamten Abschnitt gelten die folgenden Annahmen:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist $I := [a, b]$;
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine beschränkte Funktion.

Definition 14.5 (Riemann-Summe). Ist $Z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von I und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so definieren wir die *Riemann-Summe von f bezüglich der Zerlegung Z und der Stützstelle $\xi = \xi(Z)$* als

$$S_{Z,\xi}(f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Für $f \in C([a, b])$ sind O_Z und U_Z Spezialfälle davon, denn dann existieren Tupel $\xi^\pm = (\xi_1^\pm, \dots, \xi_n^\pm)$ mit

$$f(\xi_k^+) = s_k \quad \text{und} \quad f(\xi_k^-) = m_k,$$

da f nämlich auf jedem I_k sein Minimum und Maximum annimmt. Insbesondere gilt

$$S_{Z,\xi}(f) = \begin{cases} O_Z(f) & \text{für } \xi = \xi^+, \\ U_Z(f) & \text{für } \xi = \xi^-. \end{cases} \quad (\pm)$$

Ist f nicht stetig, so können wir nur approximieren:

$$s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} f(\xi_k^{(N),+}), \quad m_k = \lim_{N \rightarrow \infty} f(\xi_k^{(N),-}).$$

Dann gilt $(\pm)$ (bloß) approximativ: Für jede Zerlegung Z existieren Folgen von Tupeln $\xi^{(N),+}, \xi^{(N),-}$, $N \in \mathbb{N}$ mit

$$O_Z(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{Z,\xi^{(N),+}}(f) \quad \text{und} \quad U_Z(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{Z,\xi^{(N),-}}(f).$$

Lemma 14.6 (Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Es gilt

$$\underline{I}(f) := \sup_{\substack{Z \subset I \\ \text{Zerlegung}}} U_Z(f) = \inf_{\substack{Z \subset I \\ \text{Zerlegung}}} O_Z(f) =: \bar{I}(f).$$

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z von I mit

$$0 \leq O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon.$$

(iii) Es existiert ein $I(f) \in \mathbb{R}$ mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |S_{Z,\xi}(f) - I(f)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle Zerlegungen } Z \text{ mit } \|Z\| \leq \delta.$$

Ist eine Bedingung (und damit alle) erfüllt, so gilt

$$I(f) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f). \quad (\text{RI})$$

Beweis.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt bekannterweise

$$U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f),$$

also auch

$$\sup_{Z_1} U_{Z_1}(f) \leq \inf_{Z_2} O_{Z_2}(f).$$

Für die komplementäre Ungleichung sei nun Z die Zerlegung zu $\varepsilon > 0$ gemäß (ii) und setze $Z_1 = Z_2 =: Z$. Daraus folgt

$$= \leq O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ in (ii) beliebig gewählt wurde, folgt die Eigenschaft (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wegen (i) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen $Z_1, Z_2 \subset I$, so dass

$$0 \leq O_{Z_2}(f) - U_{Z_1}(f) \leq \varepsilon. \quad (\times)$$

Wähle nun eine Verfeinerung $Z := Z_1 \cup Z_2$. Insbesondere gilt dann $Z_1 \subset Z$ und $Z_2 \subset Z$ und es folgt

$$O_Z(f) \leq O_{Z_2}(f) \quad \text{und} \quad U_Z(f) \geq U_{Z_1}(f).$$

Somit gilt

$$O_Z(f) - U_Z(f) \stackrel{(\times)}{\leq} \varepsilon,$$

also die Eigenschaft (ii).

(i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii) Zunächst setzen wir

$$C := \max_{x \in I} \{|f(x)|\} \quad \text{und} \quad I(f) := \underline{I}(f) \stackrel{(i)}{=} \bar{I}(f).$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert weiter nach (i) und (ii) eine Zerlegung $\tilde{Z} = (x_0, \dots, x_n)$ mit

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq U_{\tilde{Z}}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) \leq I(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.1)$$

Sei nun $Z \subset I$ eine Zerlegung mit $\|Z\| \leq \delta$. Für beliebige Stützstellen ξ gilt dann

$$U_{\tilde{Z}}(f) - \delta \cdot n \cdot C \leq S_{Z,\xi}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) + \delta \cdot n \cdot C. \quad (14.2)$$

In den „anderen Intervallen“ sind die Summanden von $S_{Z,\xi}(f)$ gesandwicht zwischen den entsprechenden Summanden von $U_{\tilde{Z}}(f)$ bzw. $O_{\tilde{Z}}(f)$.

LINK: TEIL 2 DER 23. VORLESUNG VOM 13.01.2022

Mit (14.1) und (14.2) folgt dann

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \delta n C \leq S_{Z,\xi}(f) \leq I(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \delta n C.$$

Erfüllt nun die Feinheit von Z die Ungleichung $\delta n C \leq \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt

$$|S_{Z,\xi}(f) - I(f)| \leq \varepsilon$$

und damit die Eigenschaft (iii).

┌ Beachte: ε beeinflusst $n = n(\varepsilon)$. Dies ist jedoch kein Problem, da man $\delta \leq \varepsilon \cdot (2 \cdot n(\varepsilon) \cdot C)^{-1}$ gewählt hat. ┐

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ gemäß (iii) gewählt. Für jede Zerlegung mit $\|Z\| < \delta$ und beliebige Stützstelle ξ gilt dann

$$I(f) - \varepsilon \leq S_{Z,\xi}(f) \leq I(f) + \varepsilon.$$

Für stetige f sind O_Z und U_Z Spezialfälle von $S_{Z,\xi}$. Damit erhält man

$$I(f) - \varepsilon \leq U_Z(f) \leq O_Z(f) \leq I(f) + \varepsilon.$$

Für nicht-stetige f sind O_Z und U_Z hingegen „fast Spezialfälle“ von $S_{Z,\xi}$, was jedoch durch das Hinzufügen von einem weiteren ε bei der Abschätzung kompensiert werden kann:

$$I(f) - 2\varepsilon \leq U_Z(f) \leq O_Z(f) \leq I(f) + 2\varepsilon.$$

Damit erhalten wir

$$0 \leq O_Z(f) - U_Z(f) \leq 4\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt dann (ii). □

Bemerkung 14.7.

- Hinter der Aussage (iii) verbirgt sich die Konvergenz eines Netzes. Wir schreiben dann auch

$$\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} S_{Z,\xi}(f) = I(f)$$

für den Grenzwert. Die Konvergenz gilt dann für jede Wahl von Stützstellen $\xi = \xi(Z)$.

- Mit einer leichten Modifikation des obigen Arguments und einer entsprechenden Definition des Grenzwerts, lässt sich zeigen:

$$\bar{I}(f) = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} O_Z(f) \quad \text{und} \quad \underline{I}(f) = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} U_Z(f).$$

Definition 14.8 (Riemann-Integrierbarkeit). Erfüllt f eine der Bedingungen in Lemma 14.6, so heißt f (Riemann-)integrierbar über das Intervall I und das (bestimmte) (Riemann-)Integral von f über I ist definiert durch

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b f(x) \, dx := I(f) = \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f) = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} S_{Z,\xi}(f).$$

Man setzt weiter

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

Die Menge der über I Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{R}([a, b])$.

Also ist $f \mapsto I(f)$ eine Abbildung $I: \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei werden wir die folgenden Fragenkomplexe untersuchen:

(1) Welche Funktionen sind Riemann-integrierbar?

Dies trifft insbesondere für folgende drei Typen und deren Kombinationen zu:

- Treppenfunktionen
- monotone Funktionen
- stetige Funktionen

(2) Welche Eigenschaften besitzt $I: \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$?

- Linearität
- Monotonie
- Dreiecksungleichung
- Additivität bezüglich der Definitionsintervalle

(3) Welche Methoden gibt es, um $I(f)$ für ein $f \in \mathcal{R}([a, b])$ auszurechnen?

Beobachtung. Nimmt f sowohl positive als auch negative Werte an, treten in den Summen $O_Z, U_Z, S_{Z,\xi}$ entsprechend positive bzw. negative Summanden auf, die sich gegenseitig aufheben können. Wählen wir beispielsweise $a = 0, b = 2\pi$ und $f = \sin: I \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx = 0.$$

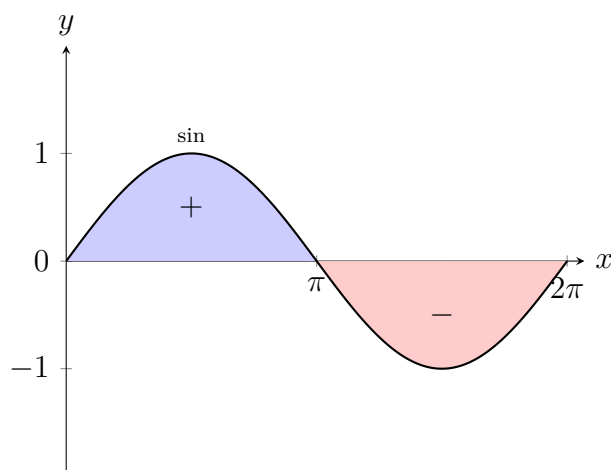


Abbildung 27: Der Graph von $f = \sin$ über $[0, 2\pi]$. Man bemerke, dass $f \geq 0$ auf $[0, \pi]$ und $f \leq 0$ auf $[\pi, 2\pi]$ gilt.

Definition 14.9 (Treppenfunktionen). Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls eine Zerlegung $Z = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ von $[a, b]$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f = c_k \quad \text{auf} \quad (x_{k-1}, x_k) = I_k.$$

Wegen

$$\min \{c_1, \dots, c_n\} \leq f(x) \leq \max \{c_1, \dots, c_n\}$$

ist f beschränkt. Außerdem ist in $x_0, \dots, x_n$ der Wert von f nicht spezifiziert – im Rahmen der Integrationstheorie ist dieser aber auch irrelevant.

Lemma 14.10 (Riemann-Integrierbarkeit von Treppenfunktionen). *Jede Treppenfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß Definition 14.9 ist Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Beweis. Übung!

Lemma 14.11 (Riemann-Integrierbarkeit von monotonen Funktionen). *Jede monotone Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. O.B.d.A. sei f isoton. Sei weiter

$$Z = \left(a, a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a), \dots, a + \frac{n-1}{n}(b-a), b \right)$$

eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ mit der Feinheit $\frac{b-a}{n}$. Wegen der Isotonie von f gilt

$$\sup_{x \in I_k} f(x) = f(x_k) \quad \text{und} \quad \inf_{x \in I_k} f(x) = f(x_{k-1}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{= \frac{b-a}{n}} \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) \\
 &= \frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Mit Lemma 14.6 folgt dann die Riemann-Integrierbarkeit von f . $\square$

Definition 14.12 (Gleichmäßige Stetigkeit). Es sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt g *gleichmäßig stetig (auf M)*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$\forall x, y \in M: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

┌ Beachte: Hier hängt δ nur von ε ab und nicht von der Position von x und y , so lange $|x - y| < \delta$ gilt. ┐

So ist beispielsweise

$$g: M := (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig: Bei der Betrachtung der Ableitung sieht man, dass

$$g'(x) = -x^{-2}$$

gilt. Zu jedem $y < x \in (0, 1)$ existiert dann nach dem Zwischenwertsatz 9.17 ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y) = -\xi^{-2}(x - y).$$

Für $\varepsilon > |f(x) - f(y)|$ gilt jedoch

$$|x - y| < \varepsilon \xi^2 < \varepsilon x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

weshalb g nicht gleichmäßig stetig sein kann.

LINK: [TEIL 1 DER 24. VORLESUNG VOM 17.01.2022](#)

Bemerkung 14.13 (Wiederholung/Erläuterung).

Im Video:
Bem.
14.12a.

- (i) Bekannterweise ist für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn für alle $x \in I$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\forall y \in I, \quad |x - y| < \delta : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nehmen wir nun zusätzlich an, dass

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \delta_0(\varepsilon) := \inf_{x \in I} \delta(\varepsilon, x) > 0,$$

so folgt

$$\forall x, y \in I, \quad |x - y| < \delta_0(\varepsilon) \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \delta(\varepsilon, x) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

da f stetig in x ist. Also ist f unter der zusätzlichen Annahme sogar gleichmäßig stetig.

- (ii) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gelten die folgenden Implikationen:

$$g \text{ erfüllt } \sup_{x \in I} |g'(x)| \leq L$$

$$\Rightarrow g \text{ ist Lipschitz-stetig mit Konstante } L$$

$$\Rightarrow g \text{ ist gleichmäßig stetig mit } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\Rightarrow g \text{ ist stetig mit } \delta(\varepsilon, x) = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Lemma 14.14. Jedes $f \in C([a, b])$ ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

Beweis. Wir nehmen an, dass die Aussage nicht wahr ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ „ohne uniformes $\delta(\varepsilon) > 0$ “, d.h. mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren Punkte $x_n, y_n \in [a, b]$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Nach dem Satz 7.5 von Bolzano-Weierstraß existiert nun eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit dem Limes

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b].$$

Damit erhält man

$$|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x.$$

Daraus folgt jedoch

$$0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(x) + f(x) - f(y_{n_k})|$$

Im Video:
Lemma
14.13.

$$\leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{f \text{ stetig}} 0 + 0 = 0,$$

was ein Widerspruch ist. Also muss f gleichmäßig stetig sein. $\square$

Lemma 14.15 ($C([a, b] \subset \mathcal{R}([a, b])$). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Im Video:
Lemma
14.14.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen nun zeigen, dass eine Zerlegung $Z \subset [a, b]$ existiert mit

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon.$$

Da f nach Voraussetzung stetig ist, ist f nach Lemma 14.14 sogar gleichmäßig stetig, es existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (*)$$

Für eine beliebige Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sup_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x) - \inf_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x) \right)}_{\stackrel{(*)}{< \frac{\varepsilon}{b-a}}} (x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a} \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})}_{=x_n - x_0} = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lemma 14.6 liefert dann die Riemann-Integrierbarkeit von f . $\square$

Satz 14.16 (Eigenschaften von $f \mapsto \int f \, dx$).

Im Video:
Satz
14.15.

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ gilt $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a, b])$ mit

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

(b) Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$, so gelten:

(i) Ist $f \in \mathcal{R}([a, c])$, so sind $f|_{[a, b]} \in \mathcal{R}([a, b])$ und $f|_{[b, c]} \in \mathcal{R}([b, c])$ und es gilt

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.$$

(ii) Sind $g \in \mathcal{R}([a, b])$ und $h \in \mathcal{R}([b, c])$, so ist

$$f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{für } x = b, \\ h(x) & \text{für } x \in (b, c], \end{cases}$$

Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx + \int_b^c h(x) \, dx.$$

(c) Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ mit $f \leq g$ auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Gilt zusätzlich $f(x_0) < g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$ und sind f und g stetig in x_0 , so folgt

$$\int_a^b f(x) \, dx < \int_a^b g(x) \, dx.$$

(d) Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, so gilt

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq s \cdot (b - a).$$

(e) Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, so auch $|f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \mathcal{R}([a, b])$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx,$$

$$\max \left\{ \int_a^b f(x) \, dx, \int_a^b g(x) \, dx \right\} \leq \int_a^b \max\{f, g\}(x) \, dx$$

sowie

$$\min \left\{ \int_a^b f(x) \, dx, \int_a^b g(x) \, dx \right\} \geq \int_a^b \min\{f, g\}(x) \, dx.$$

(f) Für $f \in C([a, b])$ gilt:

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{auf } [a, b].$$

LINK: [TEIL 2 DER 24. VORLESUNG VOM 17.01.2022](#)

Beweistipps.

(a) *Linearität:*

Es gilt

$$\begin{aligned} S_{Z,\xi}(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f + \beta g)(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha S_{Z,\xi}(f) + \beta S_{Z,\xi}(g). \end{aligned}$$

Verfeinere nun, schicke also $\|Z\| \rightarrow 0$.

(b) *Additivität bezüglich Intervallen:*

Es sei Z_1 eine Zerlegung von $[a, b]$ und Z_2 eine Zerlegung von $[b, c]$. Dann ist $Z := Z_1 \cup Z_2$ eine Zerlegung von $[a, c]$. Daraus folgt

$$S_{Z,\xi}(f) = S_{Z_1,\xi_1}(f|_{[a,b]}) + S_{Z_2,\xi_2}(f|_{[b,c]}),$$

wobei $\xi_1 = \xi \cap Z_1$ und $\xi_2 = \xi \cap Z_2$. Schicke nun $\|Z\| \rightarrow 0$.

(c) *Monotonie:*

Es sei $f \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann gilt $U_Z(f) \geq 0$ für jede Zerlegung $Z \subset [a, b]$. Insbesondere ist dann auch $\sup_Z U_Z(f) \geq 0$. Ist nun $2\delta := f(x_0) > 0$ und f stetig in x_0 , so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f|_{B_\varepsilon(x_0)} \geq \delta$$

und in $B_\varepsilon(x_0) \cap [a, b]$ folgt dann

$$\int_a^b f \, dx \stackrel{(b)}{\geq} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f \, dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta \, dx \geq \delta \cdot 2\varepsilon > 0.$$

(d) Vergleich mit konstanten Funktionen:

Nach Definition gilt

$$m \leq f(x) \leq s \quad \forall x \in [a, b].$$

Damit erhält man

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b s \, dx = s(b-a).$$

(e) *Dreiecksungleichung:*

Es gilt

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| = \pm \int_a^b f \, dx \stackrel{(a)}{=} \int_a^b \underbrace{(\pm f)}_{\leq |f|} \, dx \stackrel{(c)}{\leq} \int_a^b |f| \, dx.$$

(f) *Kriterium für die Nullfunktion:*

($\Leftarrow$) Klar

($\Rightarrow$) Angenommen, f ist nicht die Nullfunktion. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $2\delta := |f(x_0)| > 0$ und es folgt (siehe oben)

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)| \, dx > \delta \cdot 2\varepsilon > 0,$$

im Widerspruch zu der Annahme, dass $\int_a^b |f| \, dx = 0$.

Bemerkung 14.17. Es folgt

(1) $\mathcal{R}([a, b])$ ist ein (unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$ -Vektorraum: Die Abbildung

$$I: \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto I(f)$$

ist linear.

(2) Es gilt $C([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$.

(3) Die Abbildung

$$\|\cdot\|: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b |f| \, dx$$

ist eine Norm.

Beispiel 14.18.

(a) Wir betrachten die Dirichlet-Funktion

$$f = D: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und eine Zerlegung $Z \subset [0, 1]$. Dann ist

$$U_Z(f) = 0 \neq 1 = O_Z(f).$$

Auch Supremum und Infimum helfen hier nicht weiter und es folgt, dass D nicht Riemann-integrierbar ist.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

Wir sehen, dass f stetig und damit Riemann-integrierbar ist. Intuitiv lässt sich das Integral der Funktion elementargeometrisch durch Dreiecksflächen bestimmen. Wir berechnen dieses nun mithilfe der Riemann-Summe: Es gilt

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} S_{Z, \xi}(f).$$

Wähle nun

$$Z^{(n)} = \left(a, a + \frac{1}{n}(b-a), \dots, a + \frac{n-1}{n}(b-a), b\right) \quad \text{und} \quad \xi^{(n)} = \left(a + \frac{1}{n}(b-a), \dots, b\right).$$

Daraus folgt

$$S_{Z^{(n)}, \xi^{(n)}}(f) = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

Im Video:
Beispiel
14.17.

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n k \\
&= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= ba - a^2 + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).
\end{aligned}$$

LINK: [TEIL 1 DER 25. VORLESUNG VOM 20.01.2022](#)

Definition 14.19 (Stammfunktion). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt die Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ *Stammfunktion von f* , falls F differenzierbar ist und

$$F' = f \quad \text{auf } I.$$

Im Video:
Def.
14.16.

Satz 14.20. Es seien $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Dann gibt es ein $\mu \in [m, s]$ mit

$$m(b-a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx = \mu \leq s(b-a)$$

Im Video:
Satz
14.17.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 14.16 (d). □

Satz 14.21 (Mittelwertsätze der Integralrechnung). Es seien $f, g \in C([a, b])$ und $g > 0$. Dann gelten:

Im Video:
Satz
14.18.

(i) Es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f \, dx = f(\xi) \cdot (b-a);$$

(ii) Es gibt ein $\zeta \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b (f \cdot g) \, dx = f(\zeta) \cdot \int_a^b g \, dx.$$

Beweis.

(i) Folgt direkt aus (i) für $g \equiv 1$.

(ii) Da g stetig und positiv auf $[a, b]$ ist, gilt nach Satz 14.16 insbesondere

$$\int_a^b g \, dx > 0.$$

Setze nun $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ und es folgt

$$m \cdot \int_a^b g \, dx \leq \int_a^b f \cdot g \, dx \leq s \cdot \int_a^b g \, dx \quad \Leftrightarrow \quad m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f \cdot g \, dx}{\int_a^b g \, dx}}_{=: D} \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es nun ein $\zeta \in [a, b]$ mit $f(\zeta) = D$ und es folgt die Behauptung. $\square$

Satz 14.22 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in I$, $a < b$ und $f \in C(I)$. Dann gilt*

Im Video:
Satz
14.19.

(i) *Es sei $F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, $x \in I$. Dann ist F_a eine Stammfunktion von f .*

(ii) *Ist F eine beliebige Stammfunktion von f , so gilt*

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (*)$$

Beweis.

(i) Mit Satz 14.21 gilt

$$F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \stackrel{14.16}{=} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \stackrel{14.21}{=} f(\zeta_h) \cdot h \quad (**)$$

für $\zeta_h \in [x, x+h]$. Da f stetig ist, folgt dann

$$F'_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\zeta_h) = \lim_{\zeta_h \rightarrow x} f(\zeta_h) = f(x).$$

Also ist F_a eine Stammfunktion von f .

(ii) Wegen Teil (i) und dem Mittelwertsatz 12.4 gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nun gilt zusätzlich $F(a) = C$. Damit folgt

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a).$$

Für $x = b$ folgt dann die Behauptung. $\square$

An dieser Stelle sei anzumerken, dass die Stetigkeit von f nicht notwendig die obige Darstellung des Integrals ist!

Satz 14.23. Es sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Im Video:
Satz
14.20.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Lemma 14.6 eine Zerlegung

$$Z = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$$

von $[a, b]$ mit

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - S_{Z, \xi}(f) \right| \leq \varepsilon.$$

Wir schreiben

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(F(x_k) - F(x_{k-1}))}_{\stackrel{(**)}{=} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})} \stackrel{\xi = (f(\zeta_k))_{k=1}^n}{=} S_{Z, \xi}(f).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 14.24. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt. Dann wird mit

$$\int f(x) \, dx = \int f \, dx$$

Im Video:
Def.
14.21.

ein beliebiges Element der Menge aller Stammfunktionen bezeichnet und heißt *unbestimmtes Integral von f über I* .

Beispiel 14.25 (Grundintegrale). Im Folgenden ist $C \in \mathbb{R}$ und stets $x \in \mathbb{R}$ außer anderweitig eingeschränkt.

Im Video:
Beispiel
14.22.

- Für $x \in (0, \infty)$ und $\alpha \neq -1$ ist

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C;$$

- Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C;$$

- Es gilt

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C \quad \text{und} \quad \int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C;$$

- Es gilt

$$\int e^x \, dx = e^x + C;$$

- Für $x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + C;$$

- Für $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C;$$

- Es gilt

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C \quad \text{und} \quad \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C;$$

- Für $x \in (-1, 1)$ ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C;$$

- Für $x \in (-1, 1)$ ist

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C;$$

- Es gilt

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C;$$

- Es gilt

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh}(x) + C;$$

- Für $|x| > 1$ ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh}(x) + C.$$

LINK: TEIL 2 DER 25. VORLESUNG VOM 20.01.2022

Beispiel 14.26.

- (i) Es gilt

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}.$$

- (ii) Es gilt

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x \Big|_0^1 = e^x(x-1) \Big|_0^1 = 0 - e^0 \cdot (-1) = 1.$$

- (iii) Es gilt

$$\int_0^3 e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \cdot e^9 - \frac{1}{2} \cdot e^3.$$

Im Video:

Beispiel

14.23.

Teil (ii) und (iii) zeigen, wie man auch Produkte bzw. Verkettungen von Funktionen integrieren kann. Für kompliziertere Funktionen fällt dies jedoch relativ schwer (besonders im Kopf). Dafür helfen uns nun die folgenden Integrationsregeln, die man als „Umkehrung“ der Produkt- bzw. Kettenregel aus der Differentialrechnung betrachten kann.

Satz 14.27 (Partielle Integration). *Es seien $f, g \in C^1([a, b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

Im Video:

Satz

14.24.

Beweis. Bekannterweise gilt

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{auf } [a, b].$$

Also ist fg eine Stammfunktion von $f'g + fg'$ auf $[a, b]$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 14.22 (ii) folgt dann die Behauptung. $\square$

Beispiel 14.28.

(i) Es gilt

$$\int_0^1 \underbrace{e^x}_{=:f'} \cdot \underbrace{x}_{=:g} \, dx = e^x \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx = e^x \cdot x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e^x (x - 1) \Big|_0^1 = 1.$$

Im Video:

Beispiel

14.25.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \cdot x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 2x \, dx \\ &= \frac{1}{3} e^3 \cdot 1^2 - \frac{2}{3} \int_0^1 e^{3x} \cdot x \, dx \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 1 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^3 - \left[\frac{1}{9} e^{3x} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} e^3 + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{27} (2e^3 + 1) \\ &= \frac{1}{27} (5e^3 - 2). \end{aligned}$$

(iii) Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int \log(x) \, dx &= \int 1 \cdot \log(x) \, dx = x \cdot \log(x) + c_1 - \underbrace{\int x \cdot \frac{1}{x} \, dx}_{=1} \\ &= x \log(x) + c_1 - x - c_2 = x \log(x) - x + c, \end{aligned}$$

wobei $c := c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Die partielle Integration ist auch anwendbar für unbestimmte Integrale.

Satz 14.29 (Integration durch Substitution). *Es seien $\varphi \in C^1([a, b])$ und $f \in C(\varphi([a, b]))$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt. \quad (\text{S})$$

Im Video:
Satz
14.26.

Beweis. Es sei F eine (nach Satz 14.22 (i)) existierende Stammfunktion von f und

$$\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Phi(x) := (F \circ \varphi)(x).$$

Nach der Kettenregel 11.6 gilt dann

$$\Phi'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Also ist Φ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ auf $[a, b]$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 14.22 folgt dann

$$\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \, dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \Phi(b) - \Phi(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, dx. \quad \square$$

Bemerkung 14.30 (Anwendung der Substitution). Es gibt zwei Versionen der Anwendung von Satz 14.29:

Im Video:
Bem.
14.27.

1. Berechnung von $\int (f \circ \varphi) \varphi' \, dt$:
Bestimme eine Stammfunktion F von f und berechne die rechte Seite der Gleichung (S).
2. Berechnung von $\int f \, dx$:
Bestimme eine Stammfunktion Φ von $(f \circ \varphi) \varphi'$ und berechne dann

$$\int_a^b f \, dx = \Phi(\varphi^{-1}(b)) - \Phi(\varphi^{-1}(a)).$$

Beispiel 14.31.

Im Video:
Beispiel
14.28.

(i) Es gilt

$$\int_a^b x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int_a^b \varphi'(x) e^{\varphi(x)} dx$$

mit $\varphi(x) = x^3 + 1$, $\varphi'(x) = 3x^2$. Wir arbeiten also in der 1. Version gemäß Bemerkung 14.30. Da $f = \exp$ auf $[a, b]$, gilt auch $F = \exp$ auf $[a, b]$ und es folgt

$$\int_a^b x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \frac{1}{3} (e^{b^3+1} - e^{a^3+1}).$$

(ii) Es gilt

$$\int x \sqrt{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int \varphi'(x) \sqrt{\varphi(x)^3} dx$$

mit $\varphi(x) = 1 + x^2$. Auch hier arbeiten wir hier in der 1. Version gemäß Bemerkung 14.30. Da $F(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2c$, $c \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ ist, folgt

$$\int x \sqrt{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} (\varphi(x))^{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5} \sqrt{(1+x^2)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

LINK: [TEIL 1 DER 26. VORLESUNG VOM 24.01.2022](#)

Lemma 14.32. Es sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Im Video:
Lemma
14.29.

Dann gelten:

(a) F ist Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante

$$L := \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|;$$

(b) Ist f stetig in $x_0 \in [a, b]$, so ist F differenzierbar in x_0 mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis.

(a) Da $f \in \mathcal{R}([a, b])$ gilt, ist f beschränkt – insbesondere gilt $\|f\|_\infty < \infty$. Seien nun $x, y \in [a, b]$ beliebig. Nach Satz 14.16 (d) gilt dann

$$m(y-x) \leq F(y) - F(x) \stackrel{14.23}{=} \int_x^y f dt \leq s(y-x)$$

mit $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Wegen $f \leq |f|$ auf $[a, b]$ folgt $-L \leq m \leq s \leq L$ und damit

$$-L(y-x) \leq F(y) - F(x) \leq L(y-x).$$

Es gilt also $|F(y) - F(x)| \leq \underbrace{|L|}_{\geq 0} (y-x) = L|y-x|$, so dass die Lipschitz-Stetigkeit von F gezeigt ist.

(b) Ohne Beweis. □

Bemerkung 14.33. Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. Ist g monoton oder Lipschitz-stetig, so folgt: Es existiert eine abzählbare Menge $Q \subset J$, so dass g in x_0 differenzierbar ist für alle $x_0 \in J \setminus Q$.

Im Video:
Bem.
14.30.

Bemerkung 14.34.

- (i) *Das bestimmte Integral über $[a, b]$:*
Es handelt sich um eine lineare Abbildung

Im Video:
Bem.
14.31.

$$I: \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto I(f) = \int_a^b f(t) \, dt,$$

die eine Funktion f auf eine Zahl $I(f) \in \mathbb{R}$ abbildet;

- (ii) *Die Bildung einer Stammfunktion:*
Die Zuordnung $\mathcal{R}([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ mit

$$f \mapsto \left(x \mapsto F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt \right)$$

ist eine lineare Abbildung, die einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine andere Funktion $F_a: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet;

- (iii) Auf $C([a, b])$ führen wir mit

$$F \sim G \quad :\Leftrightarrow \quad (F - G) \text{ ist eine konstante Funktion auf } [a, b]$$

eine Äquivalenzrelation ein. Sei nun $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $G \in C([a, b])$. Dann gilt:

$$G \text{ ist ebenfalls eine Stammfunktion von } f \quad \Leftrightarrow \quad G \sim F;$$

- (iv) *Unbestimmtes Integral:* Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt. Dann schreiben wir

$$\int f \, dx = \int f(x) \, dx$$

für einen beliebigen Repräsentanten der Äquivalenzklasse der Stammfunktion von f .

Beispiel 14.35. [Beispielklassen zur partiellen Integration]

Im Video:
Beispiel
14.32.

┌ Memo (Partielle Integration):

$$f, g \in C^1([a, b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f'g \, dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \, dx.$$

└

(A) Sei $f(x) = x$, also $f'(x) = 1$ für $x \in [a, b]$. Dann folgt

$$\int_a^b g \, dx = \int_a^b 1 \cdot g \, dx = xg(x) \Big|_a^b - \int_a^b xg'(x) \, dx.$$

LINK: TEIL 2 DER 26. VORLESUNG VOM 24.01.2022

(B) Integranden der Form $\sqrt{\pm 1 \pm x^2}$:

Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\int \textcolor{red}{1} \cdot \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \sqrt{1 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arsinh}(x) \right).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ gilt

$$\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(x) \right).$$

Beweis. Wie in Teil (A) setzen wir $f(x) = x$, also $f'(x) = 1$. Für $x \in (-1, 1)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int \textcolor{red}{1} \cdot \sqrt{1 - x^2} \, dx &= x\sqrt{1 - x^2} - \int x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1 - x^2} - \int \frac{\textcolor{red}{-1} + \textcolor{red}{1} - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\ &= - \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx}_{\stackrel{14.25}{=} \arcsin(x)} + \underbrace{\int \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx}_{= \sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} \, dx &= x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) - \int \sqrt{1 - x^2} \, dx \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \int \sqrt{1 - x^2} \, dx &= x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \\ \Leftrightarrow \int \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right). \end{aligned}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Da beide Seiten der Gleichung auf $[-1, 1]$ stetig sind, gilt sie sogar auf ganz $[-1, 1]$.

Die beiden anderen Formeln beweist man auf ähnliche Weise. □

(C) Seien $\alpha \neq 1$, $f'(x) = x^\alpha$ und $g(x) = \ln(x)$ für $x \in (0, \infty)$. Wegen $g'(x) = x^{-1}$ gilt dann

$$\int x^\alpha \cdot \ln(x) \, dx = \underbrace{\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}}_{=f(x)} \cdot \ln(x) - \frac{1}{\alpha+1} \int x^{\alpha+1-1} \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{\alpha+1} \right).$$

Betrachten wir nun die folgenden Spezialfälle:

- $\alpha = -1$: Dann ist

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\ln(x) \right)^2$$

eine Stammfunktion von $\frac{\ln(x)}{x}$.

- $\alpha = 0$: Dann gilt

$$\int x^0 \ln(x) \, dx = \int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x.$$

Anzumerken sei dabei der „Notationsmissbrauch“ bei unbestimmten Integralen: Hier schreiben wir auch

$$- \int x \frac{1}{x} \, dx = -x.$$

Dabei meinen wir eigentlich

$$- \int_c^x t \cdot \frac{1}{t} \, dt = - \int_c^x 1 \, dt = -(x - c) = -x + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ einen frei wählbaren Startpunkt bzw. die freie Konstante beim unbestimmten Integrieren bezeichnet. In der Regel wird dabei c unterdrückt, da wir mit dem unbestimmten Integral eine ganze Äquivalenzklasse betrachten.

(D) Wir betrachten nun Integranden mit der folgenden Gestalt:

$$f(x)g'(x) = x^n e^{cx}, \quad n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der Exponent im Ausdruck x^n kann durch partielle Integration um Eins reduziert werden (vgl. Beispiel 14.28 (ii)). Wir definieren

$$I_n := \int x^n e^{cx} \, dx = x^n \frac{e^{cx}}{c} - \int x^{n-1} e^{cx} \frac{n}{c} \, dx = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} I_{n-1}.$$

Da $I_0 = \int e^{cx} \, dx = \frac{1}{c} e^{cx}$ gilt, lässt sich damit jedes I_n in endlich vielen Schritten berechnen (oder mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$).

Vorgriff. Wir werden sehen, dass für $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a, b])$ auch

$$f := f_1 + i \cdot f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

Riemann-integrierbar ist. Insbesondere gelten

$$I_n := \int x^n e^{cx} dx = \frac{x^n e^{cx}}{c} - \frac{n}{c} I_{n-1}$$

und $I_0 = \frac{1}{c} e^{cx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit können wir für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch Stammfunktionen zu

$$x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{und} \quad x^n e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

berechnen. Setze dazu $c := \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Ist $c = 0$, so ist der Integrand x^n und elementar integrierbar. Ansonsten gilt

$$\operatorname{Re}(x^n e^{cx}) = \operatorname{Re}(x^n \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}) = x^n e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Re}(e^{i\beta x}) = x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Daraus folgt

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx = \operatorname{Re} \left(\int x^n e^{cx} dx \right) = \operatorname{Re}(I_n).$$

Analog erhalten wir

$$\int x^n e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx = \int x^n \operatorname{Im}(e^{cx}) dx = \operatorname{Im} \left(\int x^n e^{cx} dx \right) = \operatorname{Im}(I_n).$$

(E) *Integranden der Form $\cos^k(x)$ und $\sin^k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:*

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \cos^k(x) dx &= \int \underbrace{\cos^{k-1}(x)}_{=:g(x)} \underbrace{\cos(x)}_{=:f'(x)} dx \\ &= \cos^{k-1}(x) \sin(x) + \int (k-1) \cos^{k-2}(x) \sin(x) \sin(x) dx \\ &= \cos^{k-1}(x) \sin(x) + (k-1) \int \cos^{k-2}(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) dx \\ &= \cos^{k-1}(x) \sin(x) + (k-1) \int \cos^{k-2}(x) - \cos^k(x) dx \\ &= \cos^{k-1}(x) \sin(x) + (k-1) \int \cos^{k-2}(x) dx - (k-1) \int \cos^k(x) dx. \end{aligned}$$

Umstellen liefert dann

$$k \int \cos^k(x) dx = \cos^{k-1}(x) \sin(x) + (k-1) \int \cos^{k-2}(x) dx.$$

Analog erhalten wir auch

$$\int \sin^k(x) dx = -\frac{1}{k} \sin^{k-1}(x) \cos(x) + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2}(x) dx.$$

Wie bei den Exponentialfunktionen in (D) kann man diesen Vorgang iterieren und erhält z.B. für das bestimmte Integral über $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$c_{2n} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) \, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$c_{2n+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) \, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

LINK: TEIL 1 DER 27. VORLESUNG VOM 27.01.2022

(F) Mithilfe partieller Integration kann man zeigen, dass

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

die Rekursionsgleichung

$$2n \cdot I_{n+1} = (2n-1) \cdot I_n + \frac{x}{(1+x^2)^n} \quad (\text{RG})$$

erfüllt. Wegen

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x)$$

folgt dann mit $n = 1$ in (RG)

$$2 \cdot I_2 = I_1 + \frac{x}{1+x^2},$$

also

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} \right).$$

┌ Man verifiziere die Gleichung durch Ableiten der rechten Seite! ┐

Ergänzung (zu Teil (B)). Für die dritte Formel haben wir vorausgesetzt, dass sie dann erfüllt ist, wenn $x \in [1, \infty)$. Tatsächlich kann man aber auf $(-\infty, -1]$ immer noch rechnen: Es gilt

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \sqrt{x^2-1} \, dx &= x\sqrt{x^2-1} - \int x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx \\ &= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx \end{aligned}$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1} \, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx,$$

also

$$\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx \right).$$

Da jedoch $\cosh$ von $\mathbb{R}$ auf $[1, \infty)$ abbildet – und dementsprechend ihre Umkehrabbildung durch $\operatorname{arcosh}: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist –, können wir den letzten Term auf $(-\infty, -1]$ nicht direkt durch diese Funktion darstellen. Zupass kommt uns hier jedoch die *Substitutionsregel* (siehe Satz 14.29): Für $\varphi \in C^1([a, b])$ und $f \in C(\varphi([a, b]))$ gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt.$$

Beispiel 14.36 (Beispielklassen zur Integration durch Substitution). Zuerst für die erste Version (vgl. Bemerkung 14.30):

Im Video:
Beispiel
14.33.

(G) Für $c \neq 0$ und $\varphi(x) = c \cdot x$ gilt

$$c \cdot \int_a^b f(c \cdot x) \, dx = \int_{c \cdot a}^{c \cdot b} f(t) \, dt.$$

Für $\varphi(x) = -x$ gilt insbesondere

$$-\int_a^b f(-x) \, dx = \int_{-a}^{-b} f(t) \, dt.$$

Anwendung auf (B) für

$$-b < -a < -1 \quad (\Leftrightarrow \quad b > a > 1)$$

liefert dann

$$\int_{-b}^{-a} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = -\int_b^a \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \, dt = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \, dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh}(t) \right) \Big|_a^b.$$

(H) Für $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi(x) = x + c$ gilt

$$\int_a^b f(c+x) \, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t) \, dt.$$

So gilt beispielsweise

$$\int_{-\frac{1}{7}}^{\frac{\pi}{6}-\frac{1}{7}} \sin\left(x + \frac{1}{7}\right) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(t) \, dt = -\cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1.$$

- (I) Für $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$, also $F(x) = \ln|x|$, ergibt sich für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sofern $0 \notin \varphi([a, b])$ gilt:

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{t} dt = \ln|t| \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln|\varphi(b)| - \ln|\varphi(a)| = \ln|\varphi(x)| \Big|_a^b.$$

Wir betrachten nun folgende Spezialfälle: Es gelten

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = - \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx = - \ln|\cos(x)|$$

und

$$\frac{1}{7} \int \frac{7x^6}{x^7+1} = \ln|x^7+1|.$$

- (J) Für $t = \varphi(x) = x^2$, also $\frac{d}{dx}\varphi(x) = 2x$, gilt

$$\frac{1}{2} \int_a^b f(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(t) dt.$$

- (K) Für $t = \varphi(x) = x^2$, also $\frac{d}{dx}\varphi(x) = 2x = \frac{dt}{dx}$, gilt (vgl. (D))

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int t e^t dt \stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{2} \left(t e^t - \int e^t dt \right).$$

┌

Allgemeiner: Für $n, k, l \in \mathbb{N}$ mit $n+1 = l \cdot k$ gilt

$$\frac{1}{k} \int x^{n+1-k} e^{x^k} \cdot k x^{k-1} dx = \frac{1}{k} \int t^{l-1} \cdot e^t dt$$

für

$$t = \varphi(x) = x^k \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = k \cdot x^{k-1} \quad \text{und} \quad x^{n+1-k} = t^{\frac{n+1}{k}-1}.$$

Hier kann man dann wie in Teil (D) weiter rechnen.

└

Beispiel 14.37 (Beispielklassen zur Integration durch Substitution 2). Nun zur zweiten Version (vgl. Bemerkung 14.30):

- (L) Für $t \in J \subset [-1, 1]$ gilt mit

$$t = \varphi(x) = \sin(x), \quad \frac{d}{dt} = \cos(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

das Folgende (vgl. (B)):

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \int \sqrt{1-\sin^2(x)} \cos(x) dx$$

Im Video: Beispiel 14.34.

$$[\text{trig. Pythagoras}] = \int \cos^2(x) \, dx$$

$$[\text{Additionsth.}] = \frac{1}{2} \int (\cos(2x) + 1) \, dx$$

$$\begin{aligned} [\cos(2x) &= \underbrace{2 \cdot \cos^2(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x)}_{=-1}] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\sin(2x)}_{=2 \sin(x) \cos(x)} + x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \sin(x) \sqrt{1 - \sin^2(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin(t) + t \sqrt{1 - t^2} \right). \end{aligned}$$

LINK: [TEIL 2 DER 27. VORLESUNG VOM 27.01.2022](#)

Als Beispiel berechnen wir ein bestimmtes Integral: Es gilt

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{da } \sin(2 \cdot 0) = 0 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Manche Integrale kann man also auch mit partieller Integration sowie durch Substitution ausrechnen. Ebenso auch im folgenden Beispiel:

(M) Für $t = \varphi(x) = \tan(x)$, also $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 1 + \tan^2(x)$ ist

$$0 = \tan(0) \quad \text{und} \quad 1 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(x))^2} \cdot (1 + \tan^2(x)) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2(x)} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{(E)}}{=} \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left[\cos(x) \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{=\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

(N) Für $x = \sqrt{t}$, also $t = x^2 = \varphi(x)$ und damit $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 2x$, gilt

$$\int e^{\sqrt{t}} \, dt = 2 \int x \cdot e^x \, dx \stackrel{\text{(D)}}{=} 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right) = 2(x-1)e^x = 2(\sqrt{t}-1)e^{\sqrt{t}}.$$

Allgemein für $k \in \mathbb{N}$ können wir Folgendes betrachten: Für $x := \sqrt[k]{t}$, also $t = x^k = \varphi(x)$ und damit $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = k \cdot x^{k-1}$, gilt

$$\int e^{\sqrt[k]{t}} \, dt = k \cdot \int x^{k-1} \cdot e^x \, dx.$$

An dieser Stelle kann dann man wie in (D) weiter rechnen.

(O) Auf $\vartheta \in (0, \infty)$ betrachten wir das folgende Integral

$$\int \frac{1}{\sin(\vartheta)} \, d\vartheta.$$

Setzen wir $\vartheta = 2 \arctan(t)$, also $t = \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) > 0$, so erhalten wir:

$$\sin(\vartheta) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(\vartheta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(\vartheta) = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Dies liefert

$$\int \frac{1}{\sin(\vartheta)} \, d\vartheta = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt \stackrel{t>0}{=} \ln(t) = \ln\left(\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right).$$

Allgemein für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^n(\vartheta)} \, d\vartheta &= \int \left(\frac{1+t^2}{2t} \right)^n \cdot \frac{2}{t+t^2} \, dt \\ &= 2^{-n+1} \int \frac{(1+t^2)^{n-1}}{t^n} \, dt \\ &= 2^{1-n} \cdot \int \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \frac{t^{2k}}{t^n} \, dt \end{aligned}$$

$$= 2^{1-n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \int t^{2k-n} dt.$$

Das resultierende Integral lässt sich dann elementar berechnen.

Nun kann man verständlicherweise einwerfen, dass die Substitution $\vartheta = 2 \arctan(t)$ nicht sehr intuitiv ist. Tatsächlich kommt sie nicht bloß aus heiterem Himmel; die Herleitung lässt sich geometrisch erschließen. Dazu kann man den Einheitskreis betrachten, der bekannterweise durch $e^{i\vartheta}$ bzw. durch $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ parametrisiert werden kann. Allerdings lässt sich der Einheitskreis auch durch *stereografische Projektion* parametrisieren: Ausgehend von einem Startpunkt $Q \in$, beispielsweise $Q = (-1, 0)$, kann man eine Gerade durch einen anderen Punkt S auf dem Einheitskreis ziehen. Diese Gerade wird einen weiteren Punkt treffen, der auf einer sogenannten *Projektionsebene* E liegt, den man wählen kann. Hier setzen wir

$$E := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\},$$

so dass E die imaginäre Achse umfasst. Die Gerade wird dann einen Punkt $(0, t) \in E$ schneiden, wobei ϑ mithilfe von t (und umgekehrt) parametrisiert werden kann. Auf diese Weise lassen sich (bis auf den Startpunkt Q) alle Punkte des Einheitskreises parametrisieren und sich die obige Substitution erschließen.

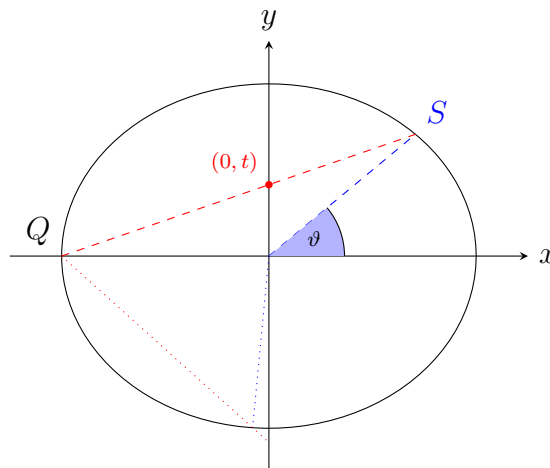


Abbildung 28: Illustration der stereografischen Projektion des Einheitskreises ausgehend vom Startpunkt $Q = (-1, 0)$ und der Projektionsebene $E = \{(0, y)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Im Folgenden betrachten wir Beispiele, bei denen sich trigonometrische Additionstheoreme als hilfreicher erweisen als partielle Substitution:

Beispiel 14.38.

(P) Wir betrachten das Integral

$$\int \sin^2(x) \, dx.$$

Bekannterweise gilt

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \underbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}_{=1} - 2 \cdot \sin^2(x).$$

Es gilt also $2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$. Einsetzen liefert dann (vgl. auch (L))

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right).$$

(Q) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \cos(nx) \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(nx) \, dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } k = n = 0, \\ 0, & \text{falls } k \neq n, \\ \pi, & \text{falls } k = n \neq 0, \end{cases}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(nx) \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = n = 0, \\ 0, & \text{falls } k \neq n, \\ \pi, & \text{falls } k = n \neq 0, \end{cases}$$

Beweis. Wir beweisen nur die letzte Formel. Betrachten wir dazu die folgende Fallunterscheidung

- $n = 0$:
Dann gilt $\sin(nx) = 0$ und damit die Behauptung für $k = n = 0$ und $k \neq n = 0$.
- $k = n \neq 0$:
Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) \, dx \\ &\stackrel{(P)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nx)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin(2nx) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi - 0) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

- $k \neq n$: Bekannterweise gilt nach den Additionstheoremen

$$\sin(r) \sin(t) = \frac{1}{2} (\cos(r-t) - \cos(r+t)).$$

Für das Integral folgt dann

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx &\stackrel{\text{Add.-Th.}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos((k-n)x) - \cos((k+n)x) \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-n} \sin((k-n)x) - \frac{1}{k+n} \sin((k+n)x) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 14.39. [Integration rationaler Funktionen] Wir wollen Funktionen der Form $R = \frac{P}{Q}$ integrieren, wobei P und Q Polynome sind. Der Integrationsbereich darf dementsprechend keine Nullstellen von Q enthalten. Dabei reicht es aus, den Fall

Im Video:
Bem.
14.36.

$$\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$$

zu betrachten. Andernfalls erhält man durch Polynomdivision (Euklidischer Algorithmus) die folgende Darstellung

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q},$$

wobei S und R Polynome sind mit $\text{Grad}(R) < \text{Grad}(Q)$.

┌ Beispielsweise gilt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + 5x^2 - 7x + 4}{2x - 8} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{29}{2} + \frac{120}{2x - 8}.$$

└

Ein komplexes Polynom P mit $\text{Grad}(P) = n$ hat genau n Nullstellen über $\mathbb{C}$: Sei P gegeben durch

$$P(w) = a \cdot \prod_{j=1}^n (w - z_j), \quad a, z_j \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

Sind alle Koeffizienten von P reell, so gilt wegen

$$\overline{P(w)} = \sum_{k=1}^n b_k \overline{z^k} = P(\overline{w})$$

die folgende Äquivalenz:

$$w \text{ ist eine Nullstelle von } P \quad \Leftrightarrow \quad \overline{w} \text{ ist eine Nullstelle von } P.$$

Mit $z = \xi + i\mu$, $\mu \neq 0$, folgt dann

$$(w - z)(w - \bar{z}) = (w - \xi - i\mu)(w - \xi + i\mu) = \underbrace{(w - \xi)^2 + \mu^2}_{\text{reelles Polynom}}.$$

Dividiert man also aus P das quadratische Polynom $(w - z)(w - \bar{z})$, erhält man wieder ein reelles Polynom. Ist l die Vielfachheit der Nullstelle Z – d.h. es gilt

$$P(w) = (w - z)^l \cdot Q(w)$$

mit einem anderen Polynom Q –, folgt induktiv, dass auch $\bar{z}$ die Vielfachheit l besitzt und es gilt

$$(w - z)^l (w - \bar{z})^l = ((w - \xi)^2 + \mu^2)^l.$$

LINK: TEIL 1 DER 28. VORLESUNG VOM 31.01.2022

Damit hat jedes Polynom P mit reellen Koeffizienten die Darstellung

$$P(x) = a \prod_{k=1}^r (x - x_k)^{m_k} \cdot \prod_{j=1}^s ((x - \xi_j)^2 + \mu_j^2)^{l_j}$$

mit reellen Nullstellen x_k der Vielfachheiten m_k für $k \in \{1, \dots, r\}$ sowie komplexe Nullstellen $\xi_j \pm i\mu_j$ mit Vielfachheiten l_j für $j \in \{1, \dots, s\}$. Also ist der Grad von P gegeben durch

$$\text{Grad}(P) = \sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s l_j.$$

Dabei gilt folgender Sachverhalt:

Satz 14.40. [Partialbruchzerlegung] Sind R und P reelle Polynome mit $\text{Grad}(R) < \text{Grad}(P)$ und

$$P(x) = \prod_{k=1}^r (x - x_k)^{m_k} \cdot \prod_{j=1}^s ((x - \xi_j)^2 + \mu_j^2)^{l_j},$$

Im Video:
Satz
14.37.

so existieren Koeffizienten $a_{k_i}, b_{j_v}, c_{j_v} \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{k_i}}{(x - x_k)^i} + \sum_{j=1}^s \sum_{v=1}^{l_j} \frac{b_{j_v}x + c_{j_v}}{((x - \xi_j)^2 + \mu_j^2)^v}.$$

Die konkreten Werte für a_{k_i}, b_{j_v} und c_{j_v} entweder durch Einsetzen geschickt gewählter Werte von x oder durch Koeffizientenvergleich.

(Ohne Beweis)

┌ Hintergrund: Die Monome

$$M_v: x \mapsto x^v, \quad x \in [a, b],$$

sind lineare unabhängige Vektoren. Gilt also

$$\sum_{i=0}^N N\alpha_i \cdot M_i = \sum_{i=0}^N N\beta_i \cdot M_i \quad \text{auf } [a, b]$$

mit Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, so folgt

$$\sum_{i=0}^N (\alpha_i - \beta_i) \cdot M_i = 0 \quad \text{als Funktion auf } [a, b].$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von M_i folgt dann

$$0 = \alpha_i - \beta_i \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

jedes Koeffizientenpaar muss also gleich sein. ┐

Beispiel 14.41. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Wir wollen das folgende Integral berechnen:

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx.$$

Im Video:
Beispiel
14.38.

Bekannterweise gilt

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x).$$

Damit wählen wir den Ansatz

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a_{1_1}}{1-x} + \frac{a_{2_1}}{1+x} = \frac{a_{1_1} + a_{2_1} + (a_{1_1} - a_{2_1})x}{1-x^2}, \quad a_{1_1}, a_{2_1} \in \mathbb{R}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann

$$1 = a_{1_1} + a_{2_1} + (a_{1_1} - a_{2_1})x \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{1 - (a_{1_1} - a_{2_1})}_{\text{konstant}} = (a_{1_1} - a_{2_1})x, \quad x \in [a, b].$$

Für alle $x \in [a, b]$ muss also $a_{1_1} - a_{2_1} = 0$ gelten und damit

$$a_{1_1} + a_{2_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{1_1} = a_{2_1} = \frac{1}{2}.$$

Es gilt also

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{1}{1-x} dx + \int_a^b \frac{1}{1+x} dx \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{1}{1+x} dx - \int_a^b \frac{1}{x-1} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln |x+1| - \ln |x-1| \right) \Big|_a^b \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \Big|_a^b.
\end{aligned}$$

Beispiel 14.42 (für Partialbruchzerlegung). Wir betrachten den Ausdruck

$$P(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{-x^2 - 6x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{a_{1_1}}{x-1} + \frac{a_{1_2}}{(x-1)^2} + \frac{b_{1_1}x + c_{1_1}}{x^2+1} + \frac{b_{1_2}x + c_{1_2}}{(x^2+1)^2}.$$

Im Video:
Beispiel
14.38a.

Hier hat P nur eine reelle Nullstelle der Vielfachheit 2, weshalb nur a_{1_1} und a_{1_2} auftreten. P hat außerdem ein konjugiertes Nullstellenpaar der Vielfachheit $l=2$, weshalb nur die Koeffizienten b_{1_1}, c_{1_1} sowie b_{1_2}, c_{1_2} auftreten. Zurückführung der rechten Seite auf den Hauptnenner liefert dann

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{1}{P(x)} \cdot \left(a_{1_1}(x-1)(x^2+1)^2 + a_{1_2}(x^2+1)^2 + (b_{1_1}x + c_{1_1})(x-1)^2(x^2+1) + (b_{1_2}x + c_{1_2})(x-1)^2 \right).$$

Multipliziert man nun den Zähler aus und sortiert, liefert ein Koeffizientenvergleich:

$$x^5 : \quad 0 = a_{1_1} + b_{1_1},$$

$$x^4 : \quad 0 = -a_{1_1} + a_{1_2} - 2b_{1_1} + c_{1_1},$$

$$x^3 : \quad 0 = 2a_{1_1} + 2b_{1_1} - 2c_{1_1} + b_{1_2},$$

$$x^2 : \quad -1 = -2a_{1_1} + 2a_{1_2} - 2b_{1_1} + 2c_{1_1} - 2b_{1_2} + c_{1_2},$$

$$x^1 : \quad -6 = a_{1_1} + b_{1_1} - 2c_{1_1} + b_{1_2} - 2c_{1_2},$$

$$x^0 : \quad 3 = -a_{1_1} + a_{1_2} + c_{1_1} + c_{1_2}.$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert dann

$$a_{1_1} = 0, \quad a_{1_2} = -1, \quad b_{1_1} = 0, \quad b_{1_2} = 2, \quad c_{1_1} = 1, \quad c_{1_2} = 3.$$

Manchmal kann man die Koeffizienten schneller bestimmen, wenn man geschickt gewählte Werte von x einsetzt. Insbesondere: Ist x_{k_0} eine i -fache Nullstelle von P – es gilt also

$P(x) = (x - x_{k_0})^i \cdot Q(x)$ für ein Polynom Q ohne Nullstelle in x_{k_0} , so erhält man Koeffizienten $a_{k_0 i}$ durch

$$a_{k_0 i} = \frac{R(x)}{P(x)} \cdot (x - y)^i \Big|_{y=x_{k_0}} = \frac{R(x_{k_0})}{Q(x_{k_0})}.$$

LINK: TEIL 2 DER 28. VORLESUNG VOM 31.01.2022

In unserem Beispiel gilt

$$a_{1_2} = \frac{-x^2 - 6x + 3}{(x^2 + 1)^2} \Big|_{x=x_1=1} = -1,$$

da ja $P(x) = (x - 1)^2 \cdot Q(x)$ gilt für $Q(x) = (x^2 + 1)^2$.

Nachdem man eine rationale Funktion $\frac{R}{P}$ in ihre Partialbrüche zerlegt hat, treten Summanden der folgenden Form auf, die man (außerhalb der Nullstellen von P) mit schon bekannten Regeln integrieren kann:

(α) Für $p \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \frac{a}{x - p} dx = a \cdot \ln |x - p| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(β) Für $p \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \frac{a}{(x - p)^n} dx = \frac{1}{1 - n} \cdot \frac{a}{(x - p)^{n-1}} + C, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1, C \in \mathbb{R}.$$

(γ) Es gilt

$$\int \frac{b \cdot x + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx = \frac{b}{2} \int \frac{2x - 2\xi}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx + \frac{b \cdot \xi + c}{\mu} \int \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(\frac{x - \xi}{\mu}\right)^2 + 1} dx.$$

Test. Es gilt

$$\frac{bx - b\xi}{(x - \xi)^2 + \mu^2} + \frac{b\xi + c}{\mu} \cdot \frac{\mu}{(x - \xi)^2 + \mu^2} = \frac{bx + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2}.$$

Nun ist im ersten Term der Zähler die erste Ableitung des Nenners. Beispiel (I) liefert dann

$$\int \frac{bx + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx = \frac{b}{2} \ln \left((x - \xi)^2 + \mu^2 \right) + \frac{b\xi + c}{\mu} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Rücksubstitution von $t = \varphi(x) = \frac{x - \xi}{\mu}$ ergibt dann

$$\int \frac{bx + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx = \frac{b}{2} \ln \left((x - \xi)^2 + \mu^2 \right) + \frac{b\xi + c}{\mu} \cdot \arctan \left(\frac{x - \xi}{\mu} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(δ) Wir betrachten das Integral

$$\int \frac{bx + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx.$$

Auch hier zerlegen wir den Integranden zunächst:

$$\int \frac{bx + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx = \frac{b}{2} \int \frac{2x - 2\xi}{((x - \xi)^2 + \mu^2)^n} dx + \underbrace{\int \frac{b\xi + c}{((x - \xi)^2 + \mu^2)^n} \cdot \frac{\frac{1}{\mu^{2n}}}}_{= \frac{b\xi + c}{\mu^{2n-1}} \cdot \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(\left(\frac{x - \xi}{\mu}\right)^2 + 1\right)^n}} dx.$$

Nun führen wir zwei Substitutionen durch:

$$t = \varphi(x) = \frac{x - \xi}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\mu}$$

und

$$s = \psi(x) = (x - \xi)^2 + \mu^2 \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) = \frac{ds}{dx} = 2x - 2\xi.$$

Dies liefert die Darstellung

$$\frac{b}{2} \int \frac{1}{s^n} ds + \frac{b\xi + c}{\mu^{2n-1}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt.$$

Ausrechnen und Rücksubstituieren liefert dann insgesamt:

$$\int \frac{bx + c}{(x - \xi)^2 + \mu^2} dx = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{((x - \xi)^2 + \mu^2)^{n-1}} + C + \frac{b\xi + c}{\mu^{2n-1}} \cdot I_n, \quad C \in \mathbb{R},$$

wobei I_n wie in Beispiel (F) definiert ist. Nun muss man I_n mit der Rekursionsformel berechnen und $t = \frac{1}{\mu}(x - \xi)$ rücksubstituieren.

Bemerkung 14.43. [Integration $\mathbb{C}$ -wertiger Funktionen] Es sei $J \subset \mathbb{R}$ und $f: J \rightarrow \mathbb{C}$. Definiere außerdem $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f): J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(\operatorname{Re}(f))(x) := \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im}(f))(x) := \operatorname{Im}(f(x)).$$

Im Video:
Bem.
14.39a.

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a, b])$ und

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := f_1(x) + i f_2(x).$$

Wir setzen dann

$$I(f) := \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{C}} dx := \int_a^b \underbrace{f_1(x)}_{\in \mathbb{R}} dx + i \int_a^b \underbrace{f_2(x)}_{\in \mathbb{R}} dx.$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{Re}(I(f)) = \int_a^b f_1(x) dx \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(I(f)) = \int_a^b f_2(x) dx,$$

also $I(f) = \operatorname{Re}(I(f)) + i \cdot \operatorname{Im}(I(f))$.

15 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir Funktionen $f \in \mathcal{R}([a, b])$ betrachtet, wo

- $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist oder
- f beschränkt ist.

Diese Bedingungen wollen wir nun etwas abschwächen.

Definition 15.1 (Uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit).

- (1) Es sei $-\infty \leq a < b < \infty$. Eine Funktion $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar bei a*, falls für alle $c \in (a, b)$ die Einschränkung $f|_{[c, b]}$ Riemann-integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x) \, dx$$

existiert. In diesem Fall bezeichnen wir diesen Limes mit $\int_a^b f(x) \, dx$.

┌ **Beispiel.** Setze $(a, b] = (0, 1]$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dann kann man sich fragen, ob der folgende Ausdruck für $c \rightarrow 0$ konvergiert:

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \xrightarrow{c \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

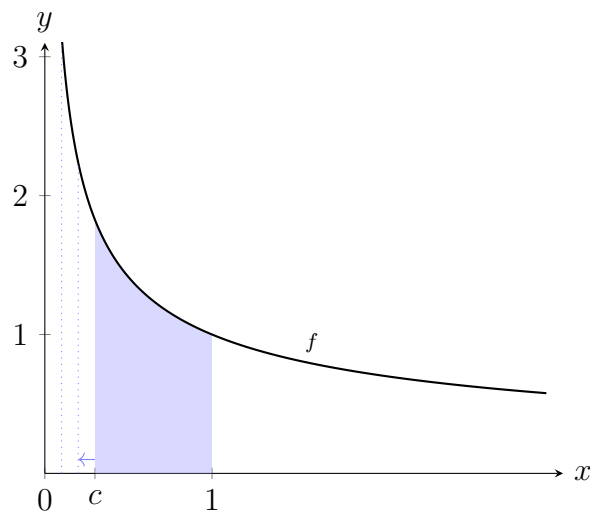


Abbildung 29: Der Graph von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und das Integral $\int_c^1 f(x) \, dx$ in blau.

└

- (2) Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Eine Funktion $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar bei b*, falls für jedes $c \in (a, b)$ die Einschränkung $f|_{[a, c]}$ Riemann-integrierbar ist und der Grenzwert

$$L = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) \, dx$$

existiert. In diesem Fall setzen wir $\int_a^b f(x) \, dx =: L$.

┌

Beispiel. Setze $[a, b) = [0, \infty)$. Dann kann man sich fragen, ob der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x} \, dx.$$

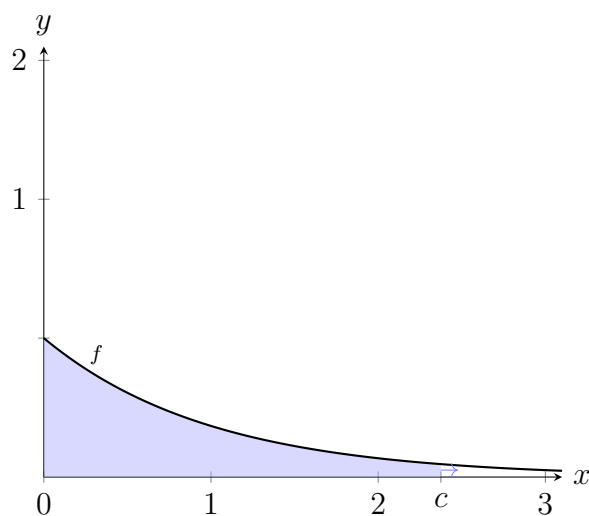


Abbildung 30: Der Graph von $f(x) = e^{-x}$ und das Integral $\int_0^c f(x) \, dx$ in blau.

└

- (3) Es sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass ein $c \in (a, b)$ existiert, so dass $f|_{(a, c]}$ und $f|_{[c, b)}$ Riemann-integrierbar sind, so nennen wir f *uneigentlich Riemann-integrierbar bei a und b* und setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Gilt dies für ein $c \in (a, b)$, dann auch für jedes $c \in (a, b)$ und die Summe bleibt gleich.

LINK: [TEIL 1 DER 29. VORLESUNG VOM 03.02.2022](#)

┌ **Beispiel.** Setze $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $c \in (a, b)$ und $f(x) := e^{-x^2}$. Das zu betrachtende Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ wird in der folgenden Abbildung illustriert:

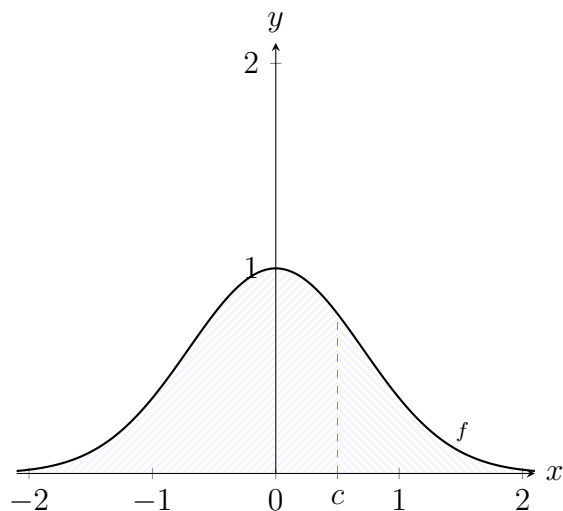


Abbildung 31: Der Graph von $f(x) = e^{-x^2}$ und das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ in blau.

└

Bemerkung 15.2 (Klassen von Situationen).

(α) *a bzw. b ist endlich:*

Dann besitzt f eine sogenannte *lokale Singularität* – insbesondere ist f unbeschränkt.

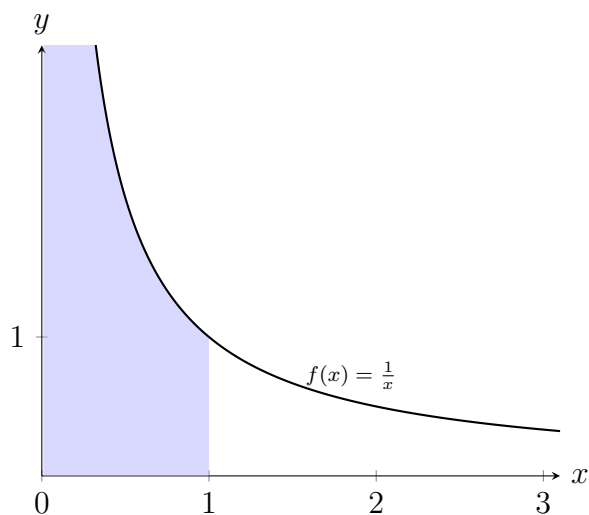


Abbildung 32: Frage: Ist der blau markierte Flächeninhalt endlich groß?

(β) $|a|$ oder $|b|$ ist unendlich:

Dann besitzt f eine Singularität im Unendlichen:

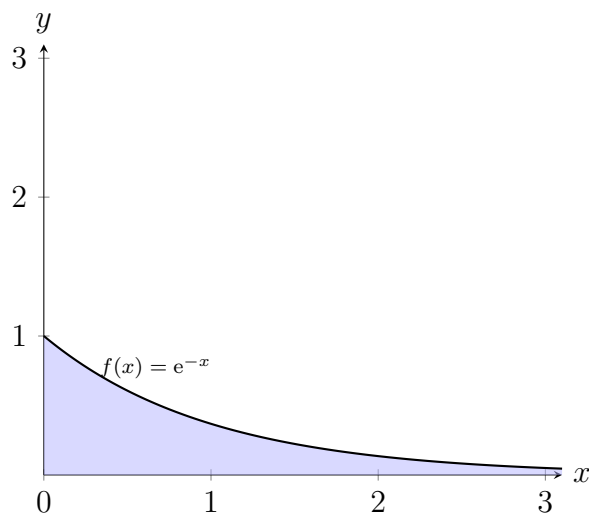


Abbildung 33: Wie sieht es mit diesem Flächeninhalt aus?

(γ) Oszillationen bei Unendlich führen zu Auslöschungen:

Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f(x) = e^{-x} \cdot \sin(2\pi x)$.

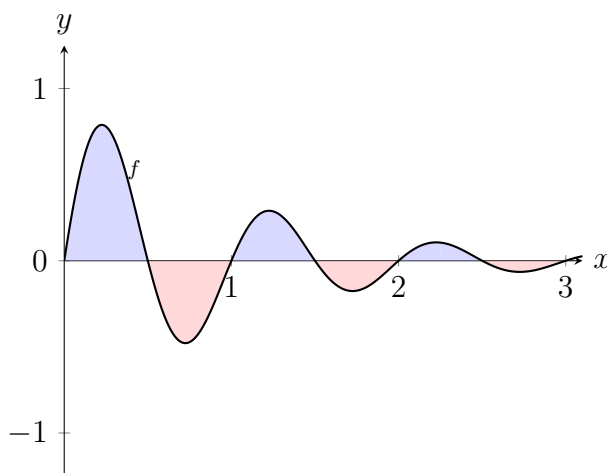


Abbildung 34: Eine gedämpfte Sinusschwingung. Man bemerke die positiven Flächenanteile (in blau) und die negativen Flächenanteile (in rot).

Hier ist es dann so, dass hier die Gesamtfläche im Betrag – also für $|f(x)|$ – unendlich ist. Zieht man jedoch die Vorzeichen der jeweiligen Flächen (gemäß der Bestimmung des Integrals) in Betracht, so kann man sich fragen, ob die Differenz zwischen den Flächenanteile oberhalb der x -Achse und denen unterhalb der x -Achse einen

endlichen Wert annimmt.

(δ) *Oszillationen bei lokaler Singularität bei $b \in \mathbb{R}$ führen zu Auslöschungen und Konvergenz:*

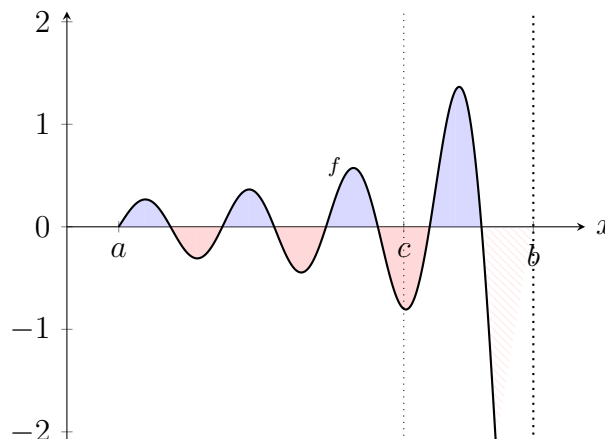


Abbildung 35: Eine Oszillation mit lokaler Singularität. Man bemerke die (steigenden) positiven bzw. negativen Flächenanteile (in blau bzw. rot) in Richtung der Singularität b .

Beachte:

- Wir haben hier eine Rückführung auf den Grenzwertbegriff einer Funktion;
- Auf die approximierenden Integrale

$$\int_a^c f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x) \, dx$$

wenden wir die bisher bekannten Integrationsregeln oder -Methoden an.

Beispiel 15.3 (Zu den Klassen $(\alpha), (\beta), (\gamma)$).

(α) Sei $s > 0$ und

$$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-s}.$$

Also besitzt f eine lokale Singularität bei $a = 0$. Wir betrachten nun das Integral

$$\int_0^1 f(x) \, dx.$$

Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} \, dx = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x^s} \, dx$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{s \neq 1}{=} \lim_{c \searrow 0} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_c^1 \\
&= \lim_{c \searrow 0} \left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s} \cdot \underbrace{c^{1-s}}_{\text{Limes für } c \rightarrow 0?} \right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & \text{falls } 0 < s < 1, \text{ da } c^{1-s} \xrightarrow{c \searrow 0} 0, \\ \infty, & \text{falls } s > 1, \text{ da } c^{1-s} \xrightarrow{c \searrow 0} \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $s = 1$ gilt außerdem

$$\int_c^1 \frac{1}{x} dx = \ln(1) - \ln(c) = |\ln(x)| \xrightarrow{c \searrow 0} \infty.$$

Damit gilt insgesamt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & \text{falls } 0 < s < 1, \\ \infty, & \text{falls } s \geq 1. \end{cases}$$

(β) Wir betrachten hier zwei Beispiele:

- Sei $s > 0$ und

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-s} = \frac{1}{x^s}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x) dx &= \lim_{c \nearrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^s} dx \\
&= \stackrel{s \neq 1}{=} \lim_{c \nearrow \infty} \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_1^c \\
&= \lim_{c \nearrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} \cdot \underbrace{c^{1-s}}_{\text{Limes für } c \rightarrow \infty?} - \frac{1}{1-s} \right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & \text{falls } s > 1, \text{ da } c^{1-s} \xrightarrow{c \nearrow \infty} 0, \\ \infty, & \text{falls } 0 < s < 1, \text{ da } c^{1-s} \xrightarrow{c \nearrow \infty} \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $s = 1$ gilt außerdem

$$\int_1^c \frac{1}{x} dx = \ln(c) - \ln(1) = \ln(c) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \infty.$$

Damit gilt insgesamt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & \text{falls } s > 1, \\ \infty, & \text{falls } 0 < s \leq 1. \end{cases}$$

Fazit. Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^s} dx = \infty.$$

- Wir betrachten nun die Funktion

$$f: [a, b) = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) dx &= \lim_{c \nearrow \infty} \int_0^c e^{-x} dx \\ &= \lim_{c \nearrow \infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_0^c \\ &= \lim_{c \nearrow \infty} (1 - e^{-c}) = 1. \end{aligned}$$

Also ist f uneigentlich Riemann-integrierbar.

(γ) Es gilt

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \infty,$$

das uneigentliche Integral divergiert also und existiert nicht als Wert in $\mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existiert dagegen.

Beweis (mit partieller Integration). Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx &= \lim_{c \nearrow \infty} \frac{1}{x} (-\cos(x)) \Big|_1^c - \int_1^c \left(\frac{-1}{x^2} (-\cos(x)) \right) dx \\ &= \underbrace{0 + 1 \cdot \cos(1)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\lim_{c \nearrow \infty} \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2} dx}_{=: A} \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung für Integrale liefert nun

$$|A| \leq \lim_{c \nearrow \infty} \int_1^c \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx$$

$$\begin{aligned}
[\text{Monotonie}] &\leq \lim_{c \nearrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} \, dx \\
&= \lim_{c \nearrow \infty} \left. \frac{-1}{3} \cdot x^{-3} \right|_1^c \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot 1^{-3} \\
&= \frac{1}{3} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, dx \in \mathbb{R},$$

so dass $\frac{\sin(x)}{x}$ uneigentlich integrierbar ist. $\square$

Satz 15.4 (Integrationskriterien für uneigentliche Integrale). *Es seien $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die auf jedem Intervall $[a, c] \subset [a, b)$ (eigentlich) integrierbar sind.*

(I.) Cauchy-Kriterium:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) *Das uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

existiert;

(b) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $c \in (a, b)$ derart, dass*

$$\forall y \in (c, b) : \left| \int_x^y f(x) \, dx \right| < \varepsilon.$$

(II.) Majoranten-Kriterium:

Gilt

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b),$$

und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x) \, dx$, so existieren auch die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

(III.) Minoranten-Kriterium:

Gilt

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b) \quad \text{und} \quad \int_a^b g(x) \, dx = \infty,$$

so gilt auch $\int_a^b f(x) \, dx = \infty$; die uneigentlichen Integrale existieren insbesondere nicht.

(Ohne Beweis)

LINK: [TEIL 2 DER 29. VORLESUNG VOM 03.02.2022](#)

Der obige Videolink umfasst eine inhaltliche Rekapitulation jeglicher Kapitel der Vorlesung zur Analysis I (Lehramt). Diese wird in diesem $\text{\LaTeX}$ -Satz nicht weiter ausgeführt.