

Funktionalanalysis II

im Wintersemester 2023/24

Bemerkung: Dieses Blatt wird in der ersten Übung besprochen und ist nicht zur Abgabe vorgesehen. Der zugehörige Stoff stellt einige nützliche technische Hilfsmittel parat, auf die wir in der Vorlesung und den weiteren Übungen zurückgreifen werden, ist im Wesentlichen aber unabhängig von der Funktionalanalysis I und kann daher zumindest teilweise auch schon aus anderen Vorlesungen bekannt sein, etwa der Analysis III oder den Partiellen Differentialgleichungen.

Aufgabe 1) (Glättung durch Faltung und glatte Abschneider)

Es sei $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t \leq 0. \end{cases}$$

Wir betrachten nun die Funktion $\eta := C\psi(1 - |\cdot|^2): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ bezeichne und die Konstante $C > 0$ so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) \lambda(dx) = 1$.

Man zeigt leicht, dass $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } \eta := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d: \eta(x) \neq 0\}} = \overline{B_1(0)}$.

Sei nun $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ messbar und auf allem kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ integrierbar. Mit $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-d}\eta(\cdot/\varepsilon): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definieren wir die Funktion $T_\varepsilon f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ als die *Faltung* von η_ε mit f , d.h.

$$T_\varepsilon f := \eta_\varepsilon * f := \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(\cdot - y) f(y) \lambda(dy).$$

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt stets $T_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ist ferner $f = 0$ f.ü. außerhalb einer messbaren Menge $M \subset \mathbb{R}^d$, so $(T_\varepsilon f)(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus M) := \inf\{|x - y|: y \in \mathbb{R}^d \setminus M\} > \varepsilon$.

- (b) Zu jeder messbaren Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ und jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\chi(\mathbb{R}^d) \subset [0, 1]$, $\chi = 1$ auf M und $\chi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\text{dist}(x, M) > \delta$.

Bemerkung: Man nennt χ einen *glatten Abschneider* zur Menge M .

- (c) Speziell für $f \in C_c(\mathbb{R}^d) := \{g \in C(\mathbb{R}^d): \text{supp } g \text{ kompakt}\}$ ist auch $\text{supp}(T_\varepsilon f)$ kompakt, und es gilt

$$\|T_\varepsilon f - f\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

für alle $1 \leq p \leq \infty$.

- (d) Für jedes $1 \leq p < \infty$ vermittelt $f \mapsto T_\varepsilon f$ einen beschränkten linearen Operator von $L^p(\mathbb{R}^d)$ nach $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit Operatornorm höchstens 1, und für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|T_\varepsilon f - f\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Hinweis: Man beachte die Höldersche Ungleichung und erinnere aus Funktionalanalysis I, dass $C_c(\mathbb{R}^d)$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ dicht liegt.

bitte wenden

Aufgabe 2) (Testfunktionen und Variationslemma)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Die Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ der glatten Funktionen mit kompakten Träger auf Ω ist wie üblich definiert durch

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \text{ kompakt}\}.$$

Man nennt die Elemente von $\mathcal{D}(\Omega)$ auch *Testfunktionen* auf Ω .

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1:

- (a) $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in jedem $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$.
- (b) Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ messbar und auf allen kompakten Teilmengen von Ω integrierbar (kurz: $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$) und gilt

$$\int_{\Omega} f \varphi \, \lambda = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

so ist bereits $f = 0$ fast überall.

Tipp: Zu $m \in \mathbb{N}$ betrachte $K_m := \{x \in \Omega : |x| \leq m, \text{ dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq 2/m\}$.

Bemerkung: Die Aussage aus Teil (b) bezeichnet man als *Fundamentallemma der Variationsrechnung*. Hierbei beschreibt $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ die größtmögliche Klasse an Funktionen, die man in diesem Zusammenhang sinnvoll betrachten kann. Sie umfasst insbesondere alle $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$.