HANDSCHRIFTLICHE NOTIZEN ZUR VORLESUNG FUNKTIONALANALYSIS IM SOMMERSEMESTER 2023

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

Caveat Emptor — Es ist, wie es ist.

Die vorliegende Datei beinhaltet meine handschriftlichen Notizen, anhand derer ich die Vorlesung Funktionalanalysis an der TU Dortmund im Sommersemester 2023 gehalten habe. Manchmal bin in der Vorlesung selbst von den Notizen abgewichen, im Großen und Ganzen hielt ich mich aber recht eng daran. An wenigen Stellen habe ich die Notizen nach der Vorlesung nachbearbeitet. An einigen Stellen finden Sie mehrere Beweise oder Beweisansätze zu einem Theorem, wobei in der Vorlesung nur einer davon ausgeführt wurde.

Es gibt sicherlich eine Reihe von kleineren Fehlern (Schreibfehler, Vorzeichenfehler, etc.). Die Notizen können das eigene Denken und Nachvollziehen der Schritte und Argumente nicht ersetzen. Sie sind als Hilfe gedacht, um Stellen in Ihrem eigenen Manuscript, die lücken- oder fehlerhaft sind, abgleichen zu können. Im Zweifelsfalle konsultieren Sie die angegebene Literatur.

Quellen und Bezüge

In der Vorlesung bezog ich mich insbesondere auf die beiden Bücher

- Dirk Werner: Funktionalanalysis, Springer,
- Winfried Kaballo: Grundkurs Funktionalanalysis, Springer

und zu einem geringeren Maße auf

- Joachim Weidmann: Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teubner

Als weitere Literatur können zum Beispiel die anderen im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher nützlich sein.

Ich bedanke mich ganz herzlich bei dem Assistenten der Vorlesung Herrn A. Seelmann.

Den Lesern wünsche ich viel Freude und Erfolg beim Nachvollziehen der Mathematik, die in diesem Manuscript dargestellt wird.

I.V., Dortmund, den 13. Juli 2023

Literatur

[Heu06] Harro Heuser. *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung.* Wiesbaden: Teubner, 4th revised ed. edition, 2006.

[Kab11] Winfried Kaballo. *Grundkurs Funktionalanalysis.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis.* New York, NY: McGraw-Hill, 2nd ed. edition, 1991.

[Sim15] Barry Simon. *Operator theory. A comprehensive course in analysis, part 4.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015.

[Wei76] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* Mathematische Leitfaden. Stuttgart: B.G. Teubner. 368 S. mit 93 Beisp. und 221 Aufg. DM 58.00 (1976)., 1976.

[Wei00] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen.* Wiesbaden: B. G. Teubner, 2000.

[Wer18] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* Springer-Lehrb. Berlin: Springer Spektrum, 8th revised edition edition, 2018.

©Ivan Veselić, 2023.

0. Wiederholung Analysis-Vorlesung

1. Banachräume

1.1. **Kompakte Mengen und Supremumsnormen.**

1.2. **L^p-Räume und Quotientenräume.**

1.3. **Der Satz von Arzela und Ascoli.**

1.4. **Separabilität und Approximationsaussagen.**

2. Lineare Operatoren

2.1. **Operatornormen.**

2.2. **Isomorphien, Normen, Fortsetzungen.**

2.3. **Integral- und Differentialoperatoren.**

3. Invertierbarkeit von Operatoren

3.1. **Banachalgebren.**

3.2. **Lösbarkeit von Integralgleichungen.**

3.3. **Elemente der Spektraltheorie.**

4. Prinzipien der Funktionalanalysis

4.1. **Der Satz von Baire.**

4.2. **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.**

4.3. **Anwendungen in Funktionenräumen.**

Satz von Korovkin.

4.4. **Der Satz von der offenen Abbildung.**

4.5. **Der Satz vom abgeschlossenen Graphen.**

5. Der Satz von Hahn und Banach

5.1. **Fortsetzung von Funktionalen.**

5.2. **Anwendungen.**

Trennung konvexer Mengen.

Reflexive Räume.

6. Hilberträume

6.1. **Motivation: Fourierreihen.**

6.2. **Orthogonalität.**

6.3. **Orthonormalsysteme.**

6.4. **Fouriertransformation.**

. Technische Universität Dortmund, Germany

5. April 23

Vorlesung Funktionalanalysis

SoSe 2023

Begrüßung

Vorstellung: Dozent Veselic

Ü-G-Leiter Seelmann

Webseite ... /lsix/

→ Lehre / Personen ⇝ Email

Sekretärin

Sprechstunden

Prüfungstermine

Moodle

Studienleistung:

- HA-Punkte 50%

2-Gruppen erlaubt

& 2x Vorrechnen

MP: mündliche Prüfung

- Vernetzen sie sich, bilden Lern-Gruppen (auch größer als HA-Grp)

sozialer Zusammenhalt und
gegenseitige Kommunikation
gibt Ihnen Motivation und
Ausdauer

Fassen Sie diese Vorlesung als
Gemeinschaftsprojekt auf. Dann
fällt auch mit und dem Ü-G-L
die Kommunikation einfacher.

Fragebogen: Damit wir Ihren
Background kennen lernen, und
(so weit wie möglich) berück-
sichtigen.

Rückgabe bis morgen, Bespr.
nächste Woche.

Terminfindung Ü-Gr. am Ende /
nach Vorlesung.

Was ist Functional analysis? Mit welchen Fragen beschäftigt sie sich?

(1) Untersuche Eigens.

der Abb $T : X \to Y$

wobei X, Y metr. Raum
VR
oder beides norm Rm.

der Gl. $Tx = y$

bekannt: y

unbekannte Lsg: x

Exist? Eind.? Stabil?

$$T(x + \Delta y) = y + \Delta y$$

gew. durch Stetigkeit von T^{-1}

(2) Wie messe ich diese? bzw definiere

BRUNNEN

(2) Abstands- & Konvergenz begriff nötig

Durch eine Norm gewährleistet

induziert auch geom Konzepte

z.B. „Ball"

(3) Besonders schön, falls Skalarprod.

wg es gibt Begriff „senkrecht"

& S.v. Pythagoras für induzierte Norm.

Weitreichende Folgen f. Konzepte in:

Optimierung

lineare Regression in Statistik

Differentialgeometrie

partielle Dgl.

Hilbertraumtheorie ⟹

insbesondere: Dfn & Berechnung von Fourier-koeff bzgl. einer gewählten HR-Basis.

analog zur eind. Darst

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$$ aus Lin Alg

(4) Kompaktheit

schon aus $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^n$ bekannt

Auch in ∞ dim NR und MR dfnt., i.a. mit vielreichaltigeren und komplexeren Phänomenen.

Lin fort „Brüche" bzw Interpolation zw. endl. & ∞ dimens. Situationen.

BRUNNEN

(5) Störungs th.

Was kann man aus $Tx = y$

für $\tilde{T}\tilde{x} = y$ folgern, falls

$\| T - \tilde{T} \| < \varepsilon$?

(6 a) Prinzipien der FA

(b) kompakte und

oder selbstadj. Operatoren

Lin Abb. auf ∞-dim VR mit

gewissen Eig. von L. A auf endl. dim.

VR.

0. Wiederholung von Begriffen aus der Analysis-Vorlesung

gegebf. mit kleinen Verallgem.

teilw. informell

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem VR V genügt:

Δ-Ungl: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Homogenität $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

Definith. $\|x\| \geq 0$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

In dieser VL: Alle VR über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dagegen benötigt eine Metrik d auf einer Menge M keine VR-Struktur

(M, d) metrischer Raum MR $:\Leftrightarrow$

$M \neq 0$ Menge, $d : M \times M \longrightarrow [0, \infty)$

Δ-Ungl $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(z,x)$ Symmetrie

$d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x,y,z \in M$

BSP $d(x,y) = \|x-y\|$ auf VR mit Norm

Ist (M,d) MR & $\emptyset \neq X \subseteq M$ zugelassen

$\Rightarrow$ auch X MR mit Metrik $X = M$

$$d_X = d|_{X \times X} : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

Konvergenz im MR (M,d)

Sei $(x_n)_n \subset M$, $x \in M$. Dann

$$x_n \longrightarrow x \quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_n, x) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

(im $\mathbb{R}$) $\mathbb{K}$-VR

Ein **inneres Produkt** q auf VR V erfüllt

$q : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

$q(x+y, z) = q(x,z) + q(y,z)$

$q(\lambda x, z) = \lambda\, q(x,z)$

$q(x,z) = \overline{q(z,x)}$ entfällt falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$q(x,x) \geq 0$ $\quad \in \mathbb{R} \subset \mathbb{K}$

$q(x,x) = 0 \iff x = 0$

Häufig nennt man q auch Skalarprodukt und schreibt

$$\langle x, y \rangle := q(x,y)$$

<u>BSP</u> Ist $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{3} x_j y_j$ das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^3$ und Matrix $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ positiv definit d.h. $\langle x, Ax \rangle \geq \lambda \|x\|^2$ für ein $\lambda > 0$ und alle $x \in \mathbb{K}^3$ & symmetrisch, so ist $q(x,y) := \langle x, Ay \rangle$ ein inneres Produkt auf $V = \mathbb{K}^3$

$\Rightarrow$ Es kann mehrere interessante innere Produkte auf einem VR geben.

Jedes innere Prod. q auf V <u>induziert</u> eine Norm, nämlich $\|x\| = \sqrt{q(x,x)}$

SKRIPTEN

Aufg: Zeigen Sie, dass flg. Abb. stetig sind:

$d: M \times M \to [0, \infty)$ für (M, d) MR

$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ für $(V, \|\cdot\|)$ NR

$+ : V \times V \to V$ -"-

$\mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ -"-

Erin.

$f: X \to Y$ zw. MR stetig $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.d.

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$$

(& äquivalente)

Dfn Flg $(x_n)_n \subset (M, d)$ MR heißt

Cauchy-Flg $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq K: d(x_n, x_m) < \varepsilon$

MR (M, d) heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$

zu jeder Cauchy-F $(x_n) \subset M$ ex ein $x \in M$

mit $x_n \longrightarrow x$

Flg:

- Ist (M,d) MR, $X \subset M$, X vollst. als MR mit Metrik d_X, so ist X abgeschl. Teilmenge von M

Bw

Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit Limes x in M

- $\Rightarrow$ $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy-F. in X
- $\Rightarrow$ $(x_n)_{\mathbb{N}}$ konverg in X, da vollst, gegen ein $y \in X$

Limes eind. in jedem MR: $X \ni y = x \in M$

Kugeln

- Für $a \in (M,d)$ MR und $r > 0$ setze

erklären

$$B_r(a) := B_r^M(a) = B_r^d(a) = \{x \in M \mid d(x,a) < r\}$$

$$K_r(a) := K_r^d(a) = \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$$

offener bzw. abgeschl. Ball / Kugel

- um a mit Radius r

BRUNNEN

Konvexität

Sei $A \subset V$, V Vektor-R.

A <u>konvex</u> $:\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ t \in [0,1]$ ist

$$t x + (1-t) y \in A$$

$$co(A) := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in [0,1],\ x_k \in A,\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \right\}$$

konvex-komb. von $x_1, \ldots, x_m$

heißt <u>konvexe Hülle</u> von A

Dfn. Norm – Äquivalenz

Zwei Normen $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}V$

$|\cdot| : V \to \mathbb{R}$

heißen <u>äquivalent</u>, falls Konstanten $\varepsilon, C \in (0, \infty)$ existt., s.d.

$$\forall\, x \in V : \quad |x| \leq \varepsilon \|x\| \leq C |x|$$

<u>Bsp</u> (a) Skalar prod. induziert Norm

(b) Euklidische / ℓ^2-Norm in $\mathbb{K}^d$

$$d = 3 : \quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = |x_1^2| + |x_2^2| + |x_3^2|$$

wird vom Skalarprod

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{d} x_j \overline{y_j}$$ induziert.

(c) Verallgemeinerung: ℓ^p-Norm auf $\mathbb{K}^d$

für $p \in [1, \infty)$

$$\mathbb{K}^d \ni x \longmapsto \|x\|_p := \left[\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right]^{1/p}$$

Hölder-Ungl.

Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{d} x_j \overline{y_j} \right| \leq \|x\|_p \, \|y\|_p$$

impliziert die Minkowski-Ungl.

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^d$$

d.h. die Δ-Ungl. für $\|\cdot\|_p$

Diese gilt auch ganz elementar für

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j|$$

$$\sum_j \underbrace{|x_j + y_j|}_{\leq |x_j| + |y_j|} \leq \sum_j |x_j| + \sum_1^d |y_j|$$

1-13

und Supremums / Maximums / ℓ^∞-N.

$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$, $\|x\|_\infty := \max_{j=1}^{d} |x_j|$

$\max_{j=1}^{d} |x_j + y_j| \overset{(\leq)}{\leq} \max_j |x_j| + \max_j |y_j|$

$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|$

Wann steht (=)? Wann (<)?

Damit folgt auch 1-∞-Hölder-U.

$$\left|\sum_1^d x_j \bar{y}_j\right| \leq \|x\|_\infty \sum_1^d |y_j|$$

$\leq \max_{k=1}^{d} |x_k|$

Später bw. wir diese Ungl. im komplizierteren / allg. Kontext von $\ell^p(I)$-Räumen, setzen es aber nun für endl-dim $\mathbb{K}^d$ voraus.

5.4.23 — 6. April 23

Bezug zu: Koordinaten / punktweiser Konvergenz

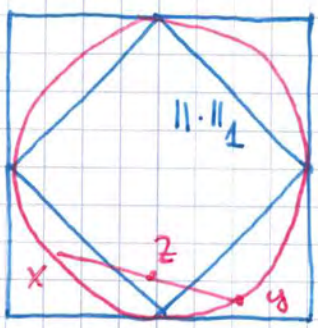
Für jedes $p \in [1, \infty] = [1, p) \cup \{+\infty\}$ und bel. Flg $(x^{(n)}) \subset \mathbb{K}^d$ gilt:

$\| x^{(m)} - x \|_p \longrightarrow 0 \iff \forall\, j \in \{1, \dots, d\}$ gilt
$m \to \infty$

$x_j^{(m)} \longrightarrow x_j$
$m \to \infty$

Analoge Aussage
gilt auch für Cauchy-Flg.
Daraus folgern wir:
$\mathbb{K}$ vollständig $\Rightarrow \mathbb{K}^d$ vollst. bzgl. $\| \cdot \|_p$

Zeichne Einheitssphären von $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$ in $\mathbb{R}^2$



lesen daraus ab

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \| x \|_1$$

sehen $B_1^{\| \cdot \|_2}$ ist
strikt konvex.

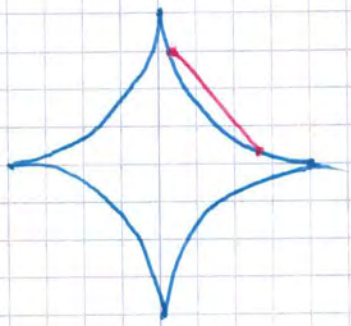
$z = tx + (1-t)y$, $t \in (0,1)$

dagegen $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$ nicht.

Warum ist $\| x \|_{\frac{1}{2}} := \left[\sum_j |x_j|^{1/2} \right]^2$
keine Norm?

Da „Einheitsball" nicht konvex.

BRUNNEN



$\Rightarrow$ Δ- Ungl. gilt nicht.

$\| \cdot \|_p$ für $p \in (0,1)$ ist Quasi-Norm und relevant im best. Geb. der Math, z.B. Compressive Sensing

Wichtiger Satz aus der Analysis

Zwei bel. Normen $\| \cdot \|$ und $|||\cdot|||$ auf $\mathbb{K}^d$ sind äquivalent

Es reicht z.z, dass $\| \cdot \|$ äquivalent zu $\| \cdot \|_1$

Transitivität d. Äq-Rel.

$\| \cdot \| \sim \| \cdot \|_1 \sim |||\cdot|||$

Dazu 2 Richtungen

(1) Elementare Überlegung

$\mathbb{K}^d \ni x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$

$e_j = (0, \dots 0, 1, 0 \dots, 0)^T$

$$\Rightarrow \|x\| = \Big\| \sum_j x_j e_j \Big\| \overset{\Delta}{\leq} \sum_j |x_j| \, \|e_j\|$$

Δ-Ungl. & Homogenität. muß nicht 1 sein.

setze $C := \max_{j=1}^{d} \|e_j\|$

$$\leq C \sum_{j=1}^{d} |x_j| = C \, \|x\|_1$$

Insbesondere: $\|x-y\| \leq C \, \|x-y\|_1$

d.h.

$$(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_1) \ni x \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

Lipschitz-stetig $\rightarrow$

$$\ell^1(\{1,\dots,d\}, \mathbb{K}) = \ell^1[d]$$

Andere Richtung ist konzeptuell interessanter

Die $\|\cdot\|_1$-Sphäre

$S := \{ x \in \mathbb{K}^d \mid \|x\|_1 = 1 \}$ ist kompakt in $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_1)$

und $\|\cdot\| : \ell^1[d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (s.o.)

nimmt also Max & Min auf S an.

Satz 1 $\delta := \min_{x \in S} \|x\| = \|x_0\| > 0$

da $\|x_0\| = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ aber

$x_0 \in S$ insbes $x_0 \neq 0$

Nun ist für bel. $y \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}$

$$x := \frac{y}{\|y\|_1} \in S \text{ also}$$

$$\delta \leq \|x\| = \left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\|$$

$$\|y\|_1 \leq \frac{1}{\delta} \|y\| \qquad \square$$

Folgerung: $\mathbb{K}^d$ versehen mit bel. Norm $\|\cdot\|$ ist vollst, da Begriff d. Cauchy-F und der konv. unabh. vom Wahl von $\|\cdot\|$.

Dieser Bw illustriert zentrale Bedeutung von Kompaktheit.

1 Banachräume

Freitag 10-12

Dfn 1.0

Ist ein Vektorraum V unter der Norm $\|\cdot\|$ vollständig, so heißt $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum.

§ 1.1 Kompakte Mengen & Sup-Normen

Dfn 1.1.1 Ein MR (M,d) heißt

folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Flg $(x_n) \subset M$ besitzt konv. Teilf

$\Updownarrow$ im MR aber nicht in allg. topologischen

„kompakt"

überdeckungskompakt $:\Leftrightarrow$

Ist J bel. Indexmenge und $U_j \subset M$ offen für jedes $j \in J$ mit $M \subset \bigcup_{j\in J} U_j$

so ex endl. $I \subset J$ mit

$$M \subset \bigcup_{j\in I} U_j = U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_N}$$

BRUNNEN

falls $I = \{j_1, \dots, j_N\} \subset J$.

„es ex. eine endliche Teilüberdeckung zu jeder offenen Überd."

Folgendes ist zumindest für Teilm des $\mathbb{R}^d$ bekannt (ansonsten gute Ü.)

Seien M & K MR, K kompakt und $f: K \to M$ stetig

$\Rightarrow$ f ist sogar glm stetig, d.h.

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, X) > 0$

$\forall\, x, y \in K$, $d_K(x,y) < \delta$ ist

$$d_M(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Ist f zusätzlich inj.

$\Rightarrow$ auch $f^{-1}: f(K) \to K$ stetig

Lem 1.1.2 M MR, (x_n) Cauchy-F in M mit konvergenter Teil-F (x_{n_j}) gegen x. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

⌜Bw: Übg mit Δ-Ungl. ⌟

Folgerung 1.1.3

Ist (K, d_K) kompakter MR & (M, d_M) bel. MR, s.d.

$K \subset M$ & $d_M|_K = d_K$

Metriken passen zueinander

so ist K abgeschlossene Teil-M von M.

⌜K kompakt $\Rightarrow K$ vollständig

$\Rightarrow K$ abges. in M ⌟

intrinsische/absolute relative Eigs.

Ist $(V, \|\cdot\|)$ NR und $K \subset V$ kompakt

so ist K beschränkt, d.h.

$$\sup_{x\in K} \|x\| < \infty$$

BRAUNSCHWEIG

Selbe Auss. gilt im $\underbrace{MR}_{(M,d)}$ falls wir dfn:

$A \subset M$ beschr $:\Leftrightarrow \exists\, r>0$ $a \in M$ mit $A \subset K_r(a)$

es gibt auch abweichende Dfn.

$K \subset \mathbb{R}$ besitzt Min & Max

S.v. Bolzano - Weierstraß 1.1.4

Für $A \subset (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|)$ gilt:

A kompakt $\Leftrightarrow$ A beschränkt & abges.

Nicht wahr im ∞-dim $\mathbb{R}$.

Num: Räume beschr Fkt bzw Folgen als Bsp. für BR (Banachräume)

Dfn 1.1.5 Seien N MR, $M \neq \emptyset$ Menge

a) Eine Fkt $f: M \to N$ heißt beschränkt, falls $f(M)$ beschr. TM von N im obigen Sinne.

b) $B(M,N) = \{ f : M \to N \mid f \text{ beschränkt} \}$

ist R. der beschr. Fkt von M nach N

Ist $N = Y$ sogar $\mathbb{R}$, so ist

$B(M,Y)$ sogar VR, wird auch

mit $\ell^\infty(M,Y)$ bez.

c) Die Abb $\|\cdot\|_\infty : B(M,Y) \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\sup} = \|f\|_M = \sup_{x \in M} \|f(x)\|_Y$$

ist eine Norm auf $B(M,Y)$. Für $Y = \mathbb{K}$

schreiben wir $\ell^\infty(M) = B(M,\mathbb{K})$

d) Ist $M = \{1, \dots, d\}$ endlich so

$$\left(B(M,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \left(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty\right) = \ell^\infty[d]$$

e) Ist M abz. so ist $\ell^\infty(M,Y)$ ein

<u>Folgenraum</u>. Setzen $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$.

<u>Bm 1.1.6</u>

(i) Interessante abg. Unter VR von

ℓ^∞ sind der Raum aller konvergenter

Folgen c bzw aller Nullf. c_0

(ii) Abstand $\|f-g\|_\infty$ beschr.

glm. Konvergenz. Für $f_n, f \in B(M,N)$

$f_n \to f$ glm $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N}:$

$\forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$

Bild

kein Argument

$:\Leftrightarrow \forall x \in M : \|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon$

(iii) Räume stetigen Fkt: Sei Y NR.

Sei (K,d) kompakter MR, z.B. $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

$C(K,Y) = \{ f : K \to Y \mid$ s stetig

$\Rightarrow K \ni x \mapsto \|f(x)\|_Y$ ist $\mathbb{R}$-wertig, stetig

beschränkt, nimmt Max an.

$\Rightarrow C(K,Y) \subset l^\infty(K,Y)$

als Menge

als VR

ist abges. TM, wegen: ?

„ (glm) Limes von stetigen Fkt ist stet".

und beide Räume sind mit $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

falls nur pktw. konv → i.a. falsch.

Satz 1.1.7

M Menge, Y BR $\Rightarrow$ $\ell^\infty(M,Y)$ BR

Bw: Vektorr. Übg.

Vollst:

Sei $(f_n) \subset \ell^\infty(M,Y)$ Cauchy-F.

und $t \in M$ bel. & fest

$\Rightarrow \|f_n(t) - f_m(t)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

$\Rightarrow (f_n(t))_n$ Cauchy-F im Y

Vollst. vorausges.

insbes. konv.

Daher $f: M \longrightarrow Y$

(Δ) $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ wohldef.

Cauchy-Eigensch. von (f_n) bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

aus geschrieben liefert:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Q \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq Q \; \forall t \in M$:

(▽) $\|f_n(t) - f_m(t)\|_Y < \varepsilon$

Für $t \in M$, $n \in \mathbb{N}$ fest:

(▽)

$\varepsilon > \lim_{m \to \infty} \|f_n(t) - f_m(t)\|_Y$

$= \|f_n(t) - \lim_m f_m(t)\|_Y$ Stetigkeit der Norm

$= \|f_n(t) - f(t)\|_Y$

Es folgt: $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ für $n \geq Q$

also $f_n - f \in \ell^\infty(M, Y)$

$\Rightarrow f = f_n + (f - f_n) \in$ -||-

und $f_n \to f$ im -||-

□ 6. April

12. April 23

Bem. 1.1.8 $(V, \|\cdot\|)$ BR und $A \subset V$ abgeschl. Unter-VR $\Rightarrow$ auch A BR

Analog für MR. Übg.

Insbs: UVR c und $c_0 \subset \ell^\infty$

sind BR

BR nach S.

$$C(K,Y) \subset B(K,Y) \quad \text{mit } \|\cdot\|_\infty$$

komp. MR

BR

ebenfalls BR.

§ 1.2. L^p - Räume und Quotienterräume

$C([a,b])$ nicht vollst. unter

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|dx$$

$\rightsquigarrow$ Wie reparieren?

Dfn 1.2.1

a) $f: M \to N$ zw MR M, N heißt Isometrie, falls $\forall x, y \in M$:

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

b) Jeder MR M kann in einen vollst. MR $\hat{M}$ eingebettet werden, d.h. es ex eine Isometrie $i: M \to \hat{M}$ so dass M in $\hat{M}$ dicht ist.

$\hat{M}$ heißt Vervollständigung von M

mündlich $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ aber erst nachdem $\mathbb{R}$ konstr.

c) Ist $X = M$ sogar NR so ist $\hat{X}$ ein BR, konstruierbar

$X \quad \underset{\cup}{X}^{*)}$

$X \subset \overline{X}$

d) NR $X = C[a,b]$ mit $\|\cdot\|_{L_1}$ nicht vollst. Vervollständigung $\hat{X}$ wird mit $L^1[a,b]$ bez und ist isomorph. zum Raum ○ von Äquivkl. von L-int b. Fkt auf $[a,b]$

$\Rightarrow$ Quotientenraum $\mathcal{L}^1[a,b]/\sim$

Dissk. von L^p-Räumen

Quotientenr., Äquivkl.

Bm 1.2.2 Maße, Integrale, L^p-Räume

a) Sei $\Omega \neq \emptyset$ Menge

$\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra

$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ Maß

σ-additiv & $\mu(\emptyset) = 0$

$A \subset \Omega$ <u>messbar</u> $:\Leftrightarrow A \in \Sigma$

<u>Dfn.</u> (Ω, Σ, μ) ist vollst.

$:\Leftrightarrow N \in \Sigma, \mu(N) = 0, A \subset N \Rightarrow A \in \Sigma$

nehmen dies an.

wahr f. Lebesgue-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$

falsch f. Borel

b) Bsp: Lebesgue Maß $\lambda = \lambda^d$ auf $\mathbb{R}^d$ oder eingeschränkt auf bel. messb. TM $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

c) Für $p \in [1, \infty)$ setze

$\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid$ (σ-Algebra)

f ist Σ-messbar und $\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f|^p \mu\right]^{1/p} < \infty \}$

f stetig $\Rightarrow$ messbar.

setze Integralbegriff voraus

punktw. Konv. f. ü. erhält Messbarkeit,

ist also ein „anspruchsloser" d.h. sehr schwacher Regularitätsbegriff.

d) Eine Eigens (A) gilt μ-fast überall auf Ω (f.ü.) $:\Leftrightarrow$

$\{x \in \Omega \mid (A) \text{ gilt nicht im Pkt } x\} \subset N$

für eine μ-Nullmenge N

e) Abkürzungen $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu), \mathcal{L}^p(\mu), \mathcal{L}^p(\Omega)$ falls um missverständlich.

Für Lebesgue-Maß auch dx oder $d^d x$ für $\lambda^d(dx)$

Ω
$\|$
f) $\mu : \mathcal{P}(\Omega = \mathbb{N}_0) \to \mathbb{N}_0$, $\mu(A) = \#A$

heißt <u>Zähl maß</u>, ist auch eines.

$\ell^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}_0, \mu) = \{(x_j)_{\mathbb{N}_0} \mid$

$\|x\|_p := \left[\sum_{\mathbb{N}_0} |x_j|^p\right]^{1/p} < \infty\}$ für

$p \in [1, \infty)$

Menge der p-summierbaren Folgen. Tatsä: abgs. unter „+“ normiert BR

Für $x_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^r$ gilt

- $(x_n)_n \in \ell^p \iff rp > 1$

„fällt schneller ab als $\frac{1}{n}$“

g) Ist $\Omega = \{1, 2, \dots, d\}$ mit Zählmaß μ, so $L^p(\Omega, \mu) = \ell^p[d] \cong (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$

- h) Ein $f: \Omega \to \mathbb{K}$, Σ-messb heißt μ-wesentlich beschränkt $\iff f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ $:\iff \exists\ C > 0$ mit: $|f(\cdot)| \leq C$ μ-f.ü.

d.h. verletzt nur auf μ-NM

- Das Infimum aller solcher Schranken C wird m. $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |f(t)|$

BRUNNEN

wesentliches / essentielles Supremum
bezeichnet vom f bzgl. μ

i) Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ & $k \in \mathbb{N}$

ex. also μ-NM $A_k \subset \Omega$ mit

(U_k) $\quad |f(t)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{k}$ für $t \in A_k^c$

wg. „Infimum"

Mit

$A := \bigcup_k A_k$ alle bösen Mengen

gelten für $t \in A^c$ alle Ungl (U_k)

d.h. $\forall\ t \in A^c$: $|f(t)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ μ-f.ü. (WS)

Aber: Als abz. Vrn. ist A ebenfalls Nullm.

Insbes. ist das Inf. über alle Schranken C tats. ein Minimum.

Wie versprochen kommt nun der Beweis der allgem.

Satz 1.2.3 (Hölder-U.)

Seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exp., d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ im verallg. Sinne. (Ω, Σ, μ) ein Maßr., $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann

(1) $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

und (2) $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Bw (easy) $p = 1 \Rightarrow q = \infty$

Für $t \in \Omega$: (WS)

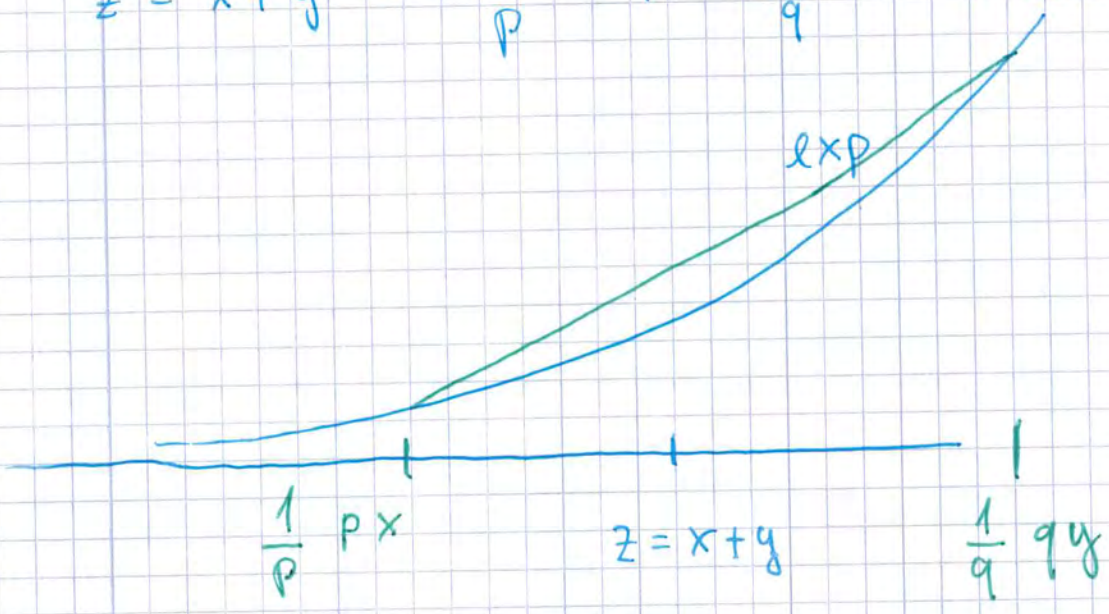
$|f(t)\, g(t)| \leq \|g\|_{L^\infty} |f(t)|$ μ-f. ü.

$\Rightarrow \int_\Omega |f(t) g(t)|\, d\mu \leq \|g\|_{L^\infty} \underbrace{\int_\Omega |f(t)|\, d\mu}_{= \|f\|_{L^1}}$

(hard) $p, q \in (1, \infty)$

Die e-Fkt ist konvex:

$z = x + y = \frac{px}{p} + \frac{qy}{q}$ konvex-Komb



liefert für $a, b > 0$ d.h.

$x = \ln a \in \mathbb{R}$

$y = \ln b$

$$\underline{a \cdot b} = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$\leq \frac{1}{p} e^{xp} + \frac{1}{q} e^{yq}$$

$$\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

(skalare) Young-Ungl.

Für $a, b \geq 0$ gilt die Ungl immer noch.

Setze für $\varepsilon \geq 0$

$$A_\varepsilon := \left[\int_\Omega |f|^p \, \mu \right]^{1/p} + \varepsilon > 0$$

$$B_\varepsilon := \left[\int_\Omega |g|^q \, \mu \right]^{1/q} + \varepsilon \geq 0$$

Für $\varepsilon > 0 \Rightarrow A_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$

$\Rightarrow a = \dfrac{|f(t)|}{A_\varepsilon}$, $b = \dfrac{|g(t)|}{B_\varepsilon}$ wohldef.

Young $\Rightarrow \dfrac{|f(t)\, g(t)|}{A_\varepsilon B_\varepsilon} \leq \dfrac{1}{p} \dfrac{|f(t)|^p}{A_\varepsilon^p} + \dfrac{1}{q} \dfrac{|g(t)|^q}{B_\varepsilon^q}$

Integr. üb. Ω:

$$\frac{1}{A_\varepsilon B_\varepsilon} \int |fg| \mu \leq \frac{1}{p A_\varepsilon^p} \int |f|^p \mu + \frac{1}{q B_\varepsilon^q} \int |g|^q \mu$$

$$\leq A_\varepsilon^p$$

$$\leq \frac{1}{p} \frac{A_\varepsilon^p}{A_\varepsilon^p} + \frac{1}{q} = 1$$

Durchmult:

$$\int_\Omega |fg| \mu \leq A_\varepsilon B_\varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

lim: $\leq A_0 B_0$ ✓

$\varepsilon \to 0$ stetig im ε □

S. 12.4 (Minkowski-Ungl.)

Für $p \in [1, \infty]$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ VR

Genauer: Für $p \in [1, \infty)$, f, g gilt:

$$\left[\int_\Omega |f+g|^p \, \mu\right]^{1/p} \leq \left[\int_\Omega |f|^p \mu\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |g|^p \mu\right]^{1/p}$$

Minkowski-Δ-Ungl.

Ebenso $\|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$

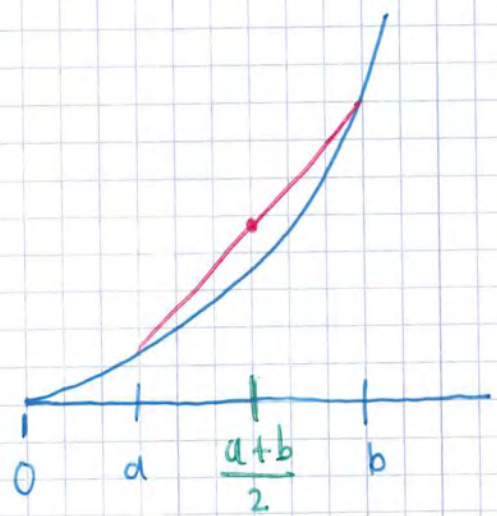
$\leq |f|+|g|$

Bw: i) Für $p \in \{1, \infty\}$ selbe Argumentat. wie im $\mathbb{K}^d$

ii) Für $p \in (1, \infty)$ ist die Fkt

$[0, \infty) \ni t \longmapsto t^p \in \mathbb{R}$ konvex

insbes: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right)$



$a = |A(x)|$

$b = |g(x)|$

einsetzen & integr.

ergibt: mit $A^p + B^p \le (A+B)^p$

$$\frac{1}{2^p} \int |f+g|^p \le \frac{1}{2}\left[\int |f|^p + \int |g|^p\right]$$

$$\frac{1}{2} \|f+g\|_{L^p}^p \le \frac{1}{2}\left[\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right]$$

$2^{1-1/p} > 1$

Folg: noch nicht Δ-Ungl.,
aber $\mathcal{L}^p$ abges unter Add,
für alle $p \in [1, \infty]$

iii) $f, g \in \mathcal{L}^p$, $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{q} := 1 - \frac{1}{p}$

$$\Rightarrow \int |f+g|^p \le \int |f| \cdot |f+g|^{p-1}$$

$$= |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} + \int |g|\,|f+g|^{p-1}$$

$$\le (|f| + |g|)\,|f+g|^{p-1}$$

BRUNNEN

$\Rightarrow p = (p-1)\,q$

Hölder-Ung ⇒

$$0 \neq \left(\int |f+g|^p\right)^1 \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$= \left[\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right] \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}$$

dividiere: $= 1/p$, $1 - 1/q$

$$\|f+g\|_{L^p} = \left(\int |f+g|^p\right)^{1-1/q} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

□

Dfn.

Bm 1.2.5 Nullfkt & Halbnorm

a) Die Menge der Nullfunktionen

$$N = N(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \ \Sigma\text{-messb} \ \& \ f \equiv 0 \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

ist ein Unter VR von $\mathcal{L}^p$ für jedes $p \in [1, \infty]$

Offensichtlich: $f \in N \Rightarrow \|f\|_{L^p} = 0$ (NG)

12.4. Aber auch $\Leftarrow$

Übg/Bw: Setze $M = \{g := |f|^p > 0\}$

$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, $M_n = \{x \in \Omega \mid g(x) > \frac{1}{n}\}$

Num: $\|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow \int g \, \mu = 0$

z.z: M ist Nullmenge

z.z: $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\mu(M_n) = 0$

da abz Vereinig.

$$0 = \int_\Omega g \geq \int_{M_n} g \geq \int_{M_n} \frac{1}{n} = \frac{\mu(M_n)}{n} \quad \checkmark$$

$g \geq 0$

Für jedes $p \in [1, \infty]$ ist

$\|\cdot\|_{L^p} : \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) \longrightarrow [0, \infty)$

eine Halbnorm, erfüllt also

Δ-Ungl. & Homogenität aber

nicht „Definitheit", sondern

BRUNNEN

statt dessen:

$$\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f \in N \Leftrightarrow f \equiv 0 \text{ f.ü.}$$

N ist also der Kern von $\|\cdot\|_{L^p}$.

b) Spezialfall:

$\Omega = \mathbb{N}_0$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, μ = Zählmaß

$$\Rightarrow N(\mathbb{N}_0, \mu) = \{0\} = \text{Kern } \|\cdot\|_p$$

d.h. $\|\cdot\|_p$ (echte) Norm auf Folgenraum ℓ^p

Ähnlich wie im Bsp. 1.1.7 zeigt man:
$\ell^p(\mathbb{N}_0)$ ist vollst., also BR,
auch für $p \in [1, \infty)$

(1) Schritt:

Sei $(f_n)_n \in \ell^p$ (Cauchy-Flg)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Q \in \mathbb{N} \; \forall n, m > Q$$

$$\varepsilon^p > \|f_n - f_m\|_p^p = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} |f_n(j) - f_m(j)|^p$$

$$\geq |\underbrace{f_n(j) - f_m(j)}_{\in \mathbb{K} \text{ vollständig}}|^p$$

$\Rightarrow$ Cauchy-F $(f_n(t))_n$ konv.

gegen ein $f(t)$. Damit ist Limes $f: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert

(2) Schritt: $f \in \ell^p$ und $f_n \to f$ in ℓ^p

Übg

Wollen aus H-N eine echte N machen, indem wir die ganze Menge N als Nullelement definieren

Dfn 1.2.6 Quotientenräume

Sei X VR und $V \subset X$ UVR (Unter-VR)

Dann defin.

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in V$$

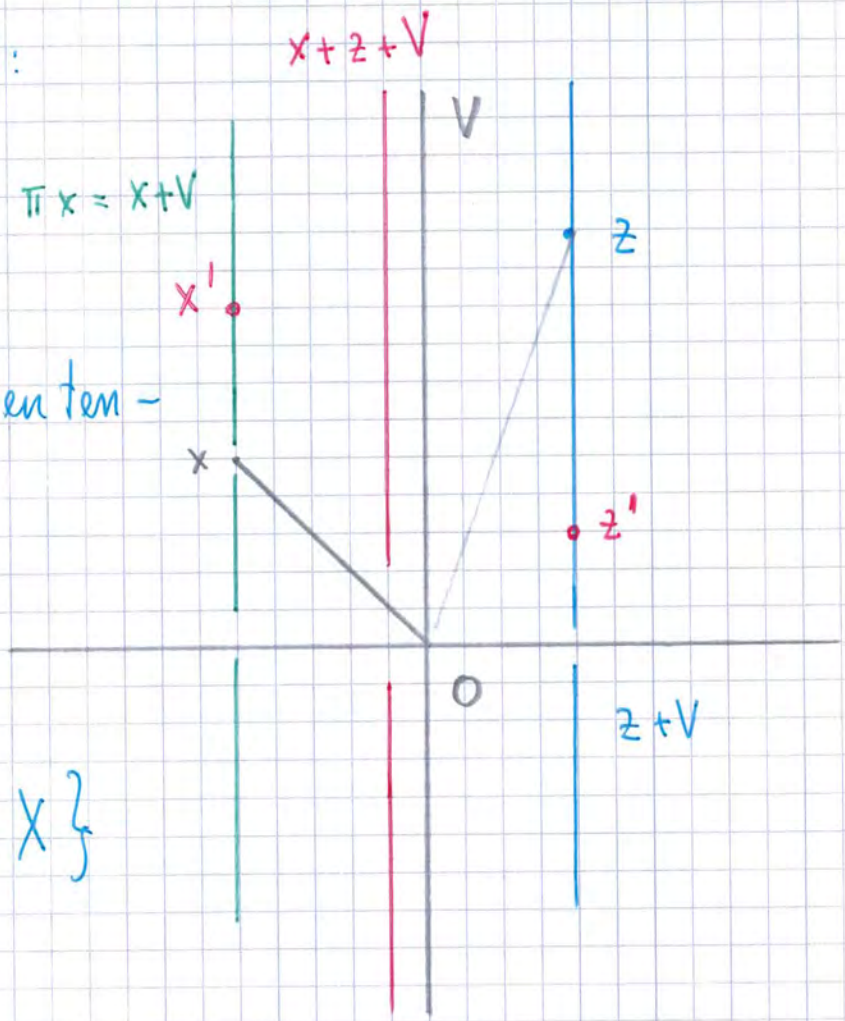
eine Äquivalenzrelation.

[z.B. $X = \mathcal{L}^p$, $V = N$: $f \sim g \Leftrightarrow f - g \equiv 0$ f.ü.]

Jede Äquivalenzklasse

4.3 $\Pi x := \{ y \in X \mid y \sim x \} = x + V = \{ x + v \mid v \in V \}$

ist ein zu „V paralleler" affiner Unterraum:



Deren Menge bildet Quotientenraum

$Q := X/V$

$:= \{ \pi x \mid x \in X \}$

Linearität:

Aus $x \sim x'$ und $z \sim z'$ folgt

$x + z \sim x' + z'$ & $\lambda x \sim \lambda x'$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

d.h. es gilt

$\pi(x+z) = \pi x + \pi z, \quad \pi(\lambda x) = \lambda \pi(x)$

Also ist die Abb. $\pi : X \to Q$ linear, auch surjektiv, da

für jeden affinen UR $A \subset X$ und jedes $x \in A$ gilt $\pi(x) = A = x + V$.

(*) zu V parallelen

Bm 1.2.7 Norm auf Quotientenr

Wollen nun auf Q eine Norm definieren. Dabei sind zwei Ausgangslagen denkbar: Haben auf VR X Halbnorm gegeben mit $\ker = N = V$ oder haben auf X echte Norm gegeben. Beh. zweiten Fall zuerst, da er kanonischer ist.

a) Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ NR und $V \subset X$ UVR so definiert

$$\|\cdot\|_Q : Q = X/V \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\|q\|_Q := \inf \{ \|x\|_X \mid x \in X \text{ mit } \pi x = q \}$$

bzw

$$\|\pi y\|_q = \inf \{ \|y - v\|_X : v \in V \}$$

(nur) eine Halb-N auf Q

b) Ist V abgeschl., so ist $\|\ \|_Q$ Norm ⊗

Ist X zusätzl. BR, so auch Q BR.

und heißt Quotientennorm (üb g)

c) Da $0 \in V$ für jeden UVR:

$$\|\pi x\|_Q = \inf_{v \in V} \|x - v\|_X \leq \|x - 0\|_X$$

insbes: $\|\pi x - \pi z\|_Q = \|\pi(x-z)\|_Q$

$$\leq \|x - z\|_X$$

also ist $\pi : X \to Q$ Lipschitz-stetig.

Es ist auch offene Abb., s.u.

Num zu Normen auf Q die durch Halb-N auf X erzeugt werden

d) Sei nun $\|\cdot\|$ Halbnorm auf VR X

und $N = \ker \|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$

Γ $\|\cdot\|$ stetig $\Rightarrow N = \|\cdot\|^{-1}\{0\}$ abges $\lrcorner$

$\|\cdot\|$ homogen & Δ-Ungl. $\Rightarrow N$ ist UVR

Dfn wie oben $\pi : X \to Q = X/N$

und $\|\pi x\|_Q = \inf_{v \in N} \|x - v\| = \|x\|$

Wg: $\|x - v\| \leq \|x\| + \|v\| = x$

$\|x\| \leq \|x - v\| + \|v\| = \|x - v\|$

Nun ist $\|\cdot\|_Q$ Norm auf Q, denn:

$\|\pi x\|_Q = 0 \Leftrightarrow \|x\|_X = 0 \Leftrightarrow$

$x \in \ker \|\cdot\| = N \Leftrightarrow \pi x = [0]$

Q heißt der zu $(X, \|\cdot\|)$ assoz. normierte R.

Wenden dies nun auf $\mathcal{L}^p$ und N an:

Dfn 1.2.8:

Bildet man den Quotienten von $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ bzgl. des UVR $N(\quad)$, d.h. des Kerns der Halbnorm $\|\cdot\|_{L^p}$ erhält man

den Quotientenraum

$$L^p(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)/N$$

ausgestattet mit (echter) Norm $\|\cdot\|_{L^p}$,

für $p \in [1, \infty]$.

Manch mal schreibt man $\tilde{f} = \pi(f)$

für die Äquivalenz kl. von $f \in \mathcal{L}^p$,

meistens unterdrückt man Unterschied.

Dfn 1.2.9

Sind X, Y MR und $f: X \to Y$,

so heißt f offen $:\Leftrightarrow$

$\forall$ offenen $U \subset X$ ist $f(U)$ offen in Y

S. 1.2.10

Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$

ein BR.

Zum Bw: Für $p = \infty$: Modifizieren

Bw. 1.1.7 unter Beachtung:

$(f_n)_n \subset L^\infty$ Cauchy-F

$\Rightarrow$ außerhalb einer Null M gilt Cauchy-Eig. pktw.

Für $p < \infty$ gehen wir anders vor. da Analogon von ∞ fehlt.

Dfn 1.2.11

a) Sei X NR und $a_n \in X$ für $n \in \mathbb{N}$.

Die Reihe $\sum_k a_k$ heißt konvergent in X, falls die Flg $(s_n)_n$ der Partialsummen

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (gegen ein Element s) in X konvergiert. Der Limes

$s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ d.h. $\|s - s_n\| \to 0$

heißt Summe oder Wert der Reihe.

b) Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt absolut

konvergent, falls $\sum_{k \in \mathbb{N}} \| a_k \| < \infty$

Satz 1.2.12 Sei X NR. Dann

X vollständig $\Leftrightarrow$ Jede absolut konverg. Reihe in X konvergiert.

Bw: Übg

Satz 1.2.13 B. Levi

Seien $p \in [1, \infty)$, $(g_k)_k \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\sum_{k \in \mathbb{N}} \| g_k \|_{L^1} < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} |g_k(t)|$ für μ-fast alle $t \in \Omega$ und die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} g_k$ konv. im $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bw ① Setze $h_m := \underbrace{\left(\sum_{1}^{m} |g_k| \right)^p}_{\in \mathcal{L}^1} \in \mathcal{L}^1$

$h_{m+1} \geq h_m \geq 0$

$$\Rightarrow \left[\int h_n \, d\mu\right]^{1/p} = \left\| \sum_1^n |g_k| \right\|_{L^p}$$

Minkowski $\quad (\leq) \quad \sum_1^n \|g_k\|_{L^p} < \infty$

S. v. d. monotonen Konv. $\Rightarrow$

$h(t) = \lim_{n\to\infty} h_n(t)$ ex. f.ü. & endl.

und $h \in \mathcal{L}^1$ $\quad \| \quad \sup_n \left[\sum_1^n |g_k|\right]^p = \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|\right]^p$

(2)

$\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k(t)|$ ist endl μ-f.ü.

insbesondere $g(t) := \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(t)$ f.ü. konvergent

und endlich (und messbar)

$$\left| g - \sum_1^n g_k \right|^p \leq \left(\sum_{n+1}^\infty |g_k| \right)^p \leq h \in \mathcal{L}^1$$

ist Majorante für Konvergenz

$$\int \left| g - \sum_1^n g_k \right|^p d\mu \longrightarrow 0$$

$\longrightarrow 0$ pkt w. nach Dfn von g.

BRUNNEN

d.h. $g = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k$ im (halb-normierten) Raum $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. □

Bw. von S. 1.2.10:

Sei $\sum_k g_k$ abs. konv. Reihe in L^p.

S. 1.2.13 $\Rightarrow$ Reihe (von Repräsentanten) konv. in L^p

S. 1.2.12 $\Rightarrow$ L^p vollst.

§ 1.3 Der Satz von Arzela-Ascoli

¿ Welche Teilmengen von $C[a,b]$ sind kompakt? motiviert diesen §

Zunächst einige Begriffe zum Umfeld der Kompaktheit.

Dfn 1.3.1 Sei M MR, $\delta > 0$.

(a) $N \subset M$ heißt **δ-Netz von M**, falls $M \subset \bigcup_{a \in N} B_\delta(a)$

(b) M heißt <u>präkompakt</u> oder <u>total beschränkt</u> $:\Leftrightarrow$ endliches
$\forall \varepsilon > 0$ besitzt M ein ε-Netz

(c) $A \subset M$ heißt <u>relativ kompakt im M</u>, falls $\overline{A}$ kompakt ist.
Abschluß von A in M

<u>Bem 1.3.2</u>

(i) Ist
$$A \subset (M, d_M)$$
$$\curvearrowright (X, d_X)$$
kann A in M relativ kompakt sein und in X nicht, selbst wenn
$$d_M|_{A\times A} = d_X|_{A\times A}$$

<u>Bsp:</u> $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$

$M = [0,1] \Rightarrow \overline{A}$ in M ist M insbes kompakt

$X = (0,1) \Rightarrow \overline{A}$ in X ist X also nicht kompakt

jeweils mit $d(x,y) = |x-y|$

BRUNNEN

Insbesondere ist „relativ kompakt" ein relativer, „kontextabh" Begriff.

(b) Dagegen sind kompakt, total beschränkt, vollstän. absolute, d.h. intrinsische Begriffe

19. April 2023

(c) Man kann zeigen:

M präkompakt $\Leftrightarrow$ Jede Flg. in M besitzt Teilflg. die Cauchyflg. ist.

(d) Folgerungen daraus:

M kompakt $\Leftrightarrow$ M präkompakt & vollständig

"$\Rightarrow$"

Zu $\varepsilon > 0$ ist $\bigcup_{x \in M} B_\varepsilon(x)$ Überdeckung von M, wähle endl. Teil-Ubd.: Ist ein ε-Netz für L. 1.1.2.

"$\Leftarrow$" mit (c) folgt Folgenkompakt.

e) A relativ kompakt in M

$\Rightarrow$ $\overline{A}$ — L —

$\Rightarrow$ Jede Flg in A besitzt in $\overline{A}$ konv. Teilf., diese ist Cauchy

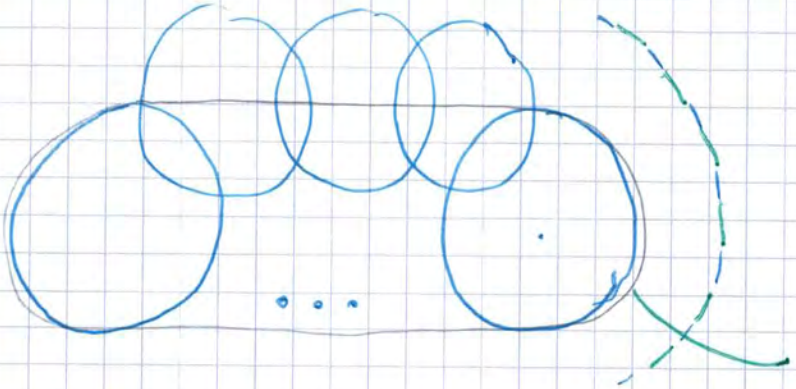
(c) $\Rightarrow$ A ist präkompakt.

f) $A \subset M$ präkompakt

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists$ endl. ε-Netz N von A

$\Rightarrow$ N ist 2ε-Netz von $\overline{A}$

$\Rightarrow$ auch $\overline{A}$ präkompakt



auch überdeckt

g) Daraus folgt: Für volls MR (M, d) und $A \subset M$ gilt:

A rel. kompakt $\Leftrightarrow$ A präkomp.

BRUNNEN

h) Offensichtlich für $A \subset M$ MR:

A total beschr $\Rightarrow$ A beschr.

Zurück zu Arzela-Ascoli

Bis zum Ende des Abschnitts ist k ein kompakter MR & $\|f\| = \sup_{x \in k} |f|$

Baby-Arzela-Ascoli:

$\mathcal{H} \subset C(k) := C(k, \mathbb{K})$ ist kompakt, falls es abgeschlossen bzgl $\|\cdot\|$ & beschränkt bzgl. $|||\cdot|||_1$ ist

$$|||f|||_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Unbefriedigend, da:

- (nur wenige $f \in C(k)$ diffb.)
- keine Äquivalenz

aber vermittelt richtige Intuition, wie folg. Bsp zeigt:

Bsp. 1.3.3 a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$f_n \in C([0, 2\pi])$, $f_n(x) = \cos(2^n x)$

$\Rightarrow \|f_n\| = 1$, $f_n(2^{-n}\pi) = \cos \pi = -1$

$f_m(2^{-n}\pi) = \cos(\underbrace{2^{m-n}}_{\text{gerade Zahl}}\pi) = +1$

für $m > n$

Vielf. von 2π

$\Rightarrow \|f_m - f_n\| = 2$ für $m \neq n$.

$\Rightarrow$ ex. keine Cauchy T-F in $(f_n)_n$

$\Rightarrow$ abges. Ball $B_1^{\|\cdot\|} \subset C([0, 2\pi])$

ist nicht präkomp., schon gar nicht kompakt.

Beschränktheit im $\|\cdot\|$ ist zu wenig.
Was kann man den Ableitungen ansehen?

BRUNNER

Wegen $f_n'(x) = -2^n \sin(2^n x)$ ist

$$\|f_n'\| = 2^n$$

insbesondere (f_n) unbeschränkt in $n \in \mathbb{N}$,

bzw $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_1 = \infty$

In der Tat ist eine etwas schwächere Eigenschaft als Beschränktheit in der $\|\cdot\|_1$-Norm entscheidend.

Dfn 1.3.4 Seien M & N MR sowie $\mathcal{H} \subset C(M,N)$ und $x \in M$.

a) $\mathcal{H}$ heißt gleichgradig stetig in x

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{H} \; \forall y \in M$

$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ falls $d(x,y) < \delta$ (M)

b) $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig $\Leftrightarrow$

$\forall x \in M$ ist $\mathcal{H}$ — " — in x.

c) $\mathcal{H}$ gleichstetig (oder glm gleichgradig stetig) $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{H} \; \forall y, z \in M$

mit $d(y,z) < \delta$ gilt

$$d(f(y), f(z)) < \varepsilon$$

- δ hängt nur von ε ab, nicht vom f noch von y, z!

Manche Autoren: gleichgradig s.:= gleichst.

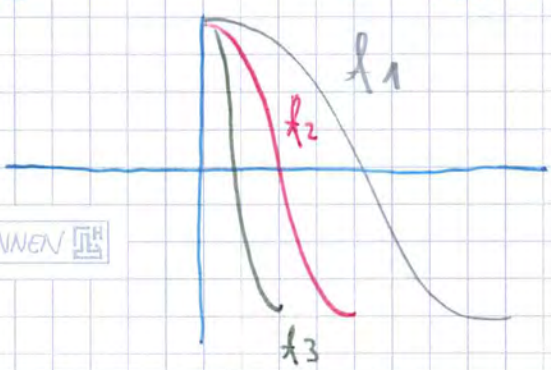
Im A-A kontext ist vor allem (c) wichtig.

- **Bsp. 1.3.5**

a) Folge $f_n = \cos 2^n \cdot$

nicht gleichgradig st im $x = 0$, da

$f_n(0) = 1$, $f_n\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = -1$ für n€IN



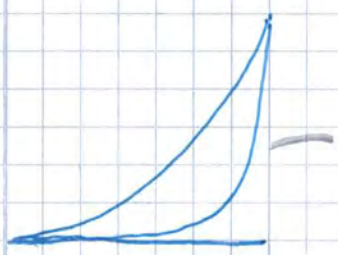
- Um

$|f_n(0) - f_n(y)| < 2$

BRUNNEN

für alle $y \in [0, \delta)$ zu gewährleisten, muß $\delta \leq 2^{-n} \pi$ sein, also von n abhängen.

b) Folge der Monome $\{ p_n : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p_n(y) = y^n, \; n \in \mathbb{N} \}$ nicht gleichgradig stetig in $x = 1$, da



immer steiler

insbes nicht gleichstetig.

insbes: $p_n \to \mathbb{1}_{\{1\}}$ auf $[0,1]$

c) Sei $L > 0$ und

$\mathcal{H} \subset \{ f : M \to N \mid f$ Lipschitz mit Konst $L \}$

$\subset C(M, N)$

Dann ist $\mathcal{H}$ gleichstetig, genauer:

$\forall \varepsilon > 0$ sei $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann:

5-6 $y, z \in M$, $d(y,z) < \delta$, $f \in \mathcal{H} \Rightarrow$

$$d(f(y), f(z)) \leq L\, d(y,z) < L \frac{\varepsilon}{L}$$

d) Ins besondere: Ist $\mathcal{H} \subset C([a,b])$ mit $C = \sup_{f \in \mathcal{H}} \|f\|_1 < \infty$

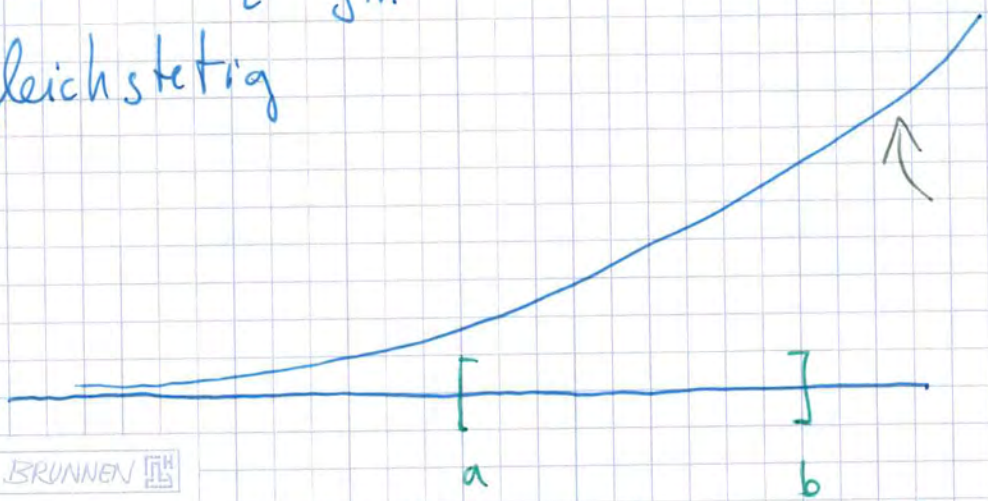
so ist $\mathcal{H}$ gleichstetig. Setze $L := C$ in (c)

HDI:

$$|f(y) - f(z)| = \left| \int_y^z f'(\tau)\, d\tau \right| \leq \|f'\|\, |z-y|$$

e) $\mathcal{H} = \{ g_n = (1 - \frac{1}{n})\, e^x \mid n \in \mathbb{N} \} \subset C(\mathbb{R})$

ist gleichgradig stetig, aber nicht gleichstetig. Für jedes $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist $\{ g_n : [a,b] \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \}$ gleichstetig



auf kompaktum alles beschränkt

BRUNNEN

Bsp der Monamie transparenter mit:

S. 1.3.6

Sei $\mathcal{H} = (f_n)_n \subset C(M,N)$ s.d.

- $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ ex. ptw auf M
- $\mathcal{H}$ ist gleichst.

Dann: $\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \cup \{f\}$ gleichst.

insbes f stetig.

Bw:

Zu $\varepsilon > 0$ ex $\delta > 0$ s.d.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x,y \in M$ mit $d(x,y) < \delta$:

$$d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$$

$d(\cdot,\cdot)$ vertauscht mit Limes $n \to \infty$.

$$d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

falls $d(x,y) < \delta$ □

S. 1.3.7 Sei $\mathcal{H} \subset C(K)$ präkomp.

(K komp. MR)

$\Rightarrow \mathcal{H}$ gleichst.

Bw: tot. beschr $\Rightarrow$

Zu $\varepsilon > 0$ ex Fkt $f_1, \dots, f_\ell \in \mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B_\varepsilon(f_j) \quad (\otimes)$$

jedes f_j glm stetig, da K kompakt.

d.h. es ex $\delta_j > 0$ mit:

$$d(x,y) < \delta_j \Rightarrow d(f_j(x), f_j(y)) < \varepsilon$$

Setze $\delta := \min_{j=1}^{\ell} \delta_j$. Sei $f \in \mathcal{H}$ bel.

Dann ex. Index $j \in \{1, \dots, \ell\}$ mit

$\|f - f_j\| < \varepsilon$ wg. $(\otimes)$

Für $d(x,y) < \delta$ folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon \quad \square$$

BRUNNEN

Damit wissen wir:

$\mathcal{H} \subset C(K)$ präkompakt $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ beschränkt

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ gleichstetig

Arzela-Ascoli $\Leftarrow$

Hilfsaussagen dazu:

L. 1.3.8

Sei $A \neq \emptyset$ abzählbar $n \in \mathbb{N}$ und $f_n : A \to \mathbb{K}$ mit $m_a := \sup_n |f_n(a)| < \infty$ für jedes $a \in A$.

Dann enthält $(f_n)_n$ eine ptw. konverg. Teilf. So eine Flg $(f_n)_n$ heißt ptw. beschränkt (auf A)

B w: Nummeriere A als $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

$\Rightarrow$ $(f_n(a_1))_n \subset \mathbb{K}$ beschränkt

$\Rightarrow$ ex TF $(f_n^{(1)})_n \subset (f_n)_n$ s.d.

$f_n^{(1)}(a_1)$ konv. gegen ein $A(a_1)$

$\Rightarrow$ $(f_n^{(1)}(a_2))_n \subset \mathbb{K}$ beschränkt

$\Rightarrow$ ex TF $(f_n^{(2)})_n \subset (f_n^{(1)})_n$

s. d. $\left(f_n^{(2)}(a_2)\right)_n$ konv gegen $f(a_2)$

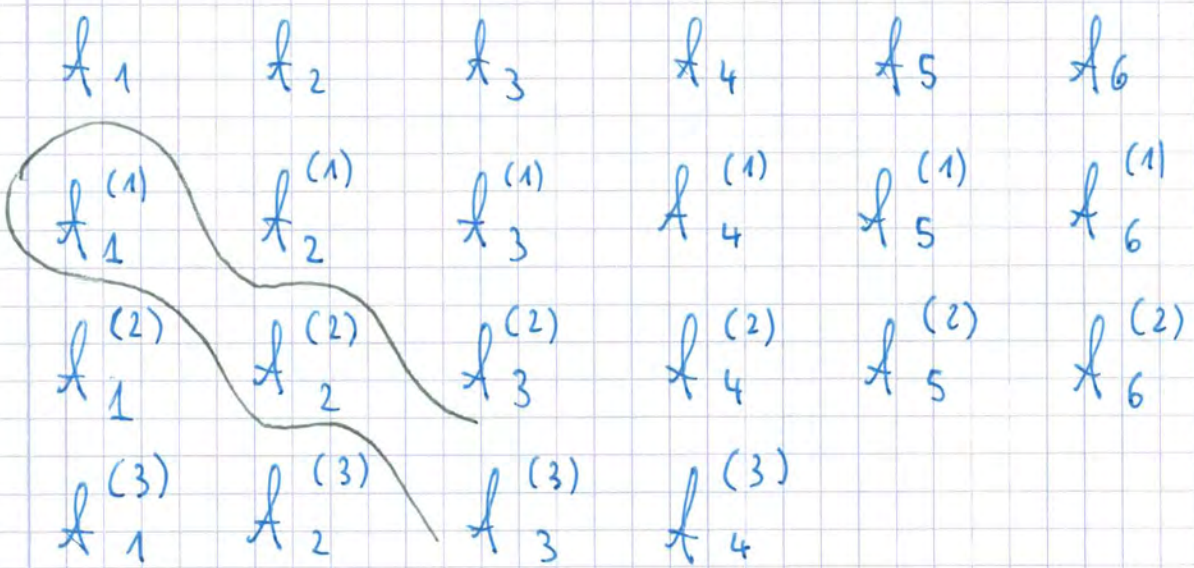
usw.

Konstr. rekursiv TF $(f_n^{(j+1)})_n$ von $(f_n^{(j)})_n$, so dass $\left(f_n^{(j+1)}(a_{j+1})\right)_n$ kon

Insbesondere: Für $k \leq j$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(a_n) = f(a_k)$$

noch dünnere TF als $(f_n^{(k)})_n$



Setze $g_n = f_n^{(n)}$

von Fkt. (für $n \in \mathbb{N}$)

Diagonalfolge n

Trick

$\Rightarrow$ $(g_n)_n$ ist TF von $(f_n)_n$

und (ab $n \geq j$) auch TF von $(f_n^{(j)})_n$

$\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} g_n(a_j) = f(a_j)$ $\square$

L. 1.3.9 Seien M, N MR, N sogar vollst. Sei Folge $(g_n)_n \subset C(M,N)$ gleichstetig und $A \subset M$ dicht, d.h. $\overline{A} = M$, s.d. $(g_n)_n$ in jedem $a \in A$ konv.

Dann ist $(g_n)_n$ auf ganz M pktw. konverg.. Die Konvergenz ist sogar glm auf jeder präkompakten Menge $K \subset M$.

Bw:

gleichst $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit

$d(g_n(t), g_n(s)) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, s \in M$ mit $d(t,s) < 2\varepsilon$

K präkomp. $\Rightarrow \exists\ b_1, \dots, b_r \in K$ s.d.

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_\delta(b_j)$$

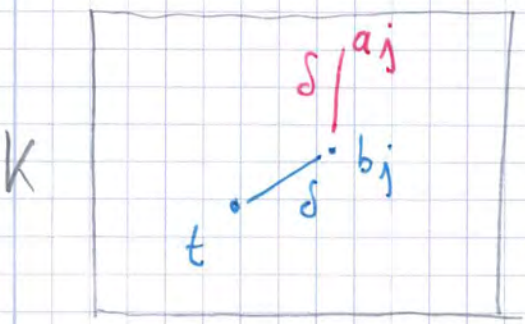
A dicht $\Rightarrow$ Zu jedem $j \in \{1, \dots r\}$ ex $a_j \in A$ mit $d(a_j, b_j) < \delta$.

$(g_n(a_j))_n$ konverg $\overset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \exists\ Q_j \in \mathbb{N}$ mit

$d(g_n(a_j), g_m(a_j)) < \varepsilon$ für $n, m > Q$

für $j = 1, \dots r$

Nun gilt für $n, m > Q$, $t \in K$ und $j \in \{1, \dots, r\}$ s.d $d(t, a_j) < 2\delta$



mit $\varepsilon/3$ - Trick

$d(g_n(t), g_m(t))$

$\leq d(g_n(t), g_n(a_j)) + d(g_n(a_j), g_m(a_j))$ Konvergenz.

$+ d(g_m(a_j), g_m(t)) < 3\varepsilon$

gleichstetig

Absch. uniform auf K, also

$$\sup_{t \in K} d(g_m(t), g_n(t)) < 3\varepsilon, \quad n, m > Q$$

$\mathbb{N}$ vollständig $\Rightarrow$ $(g_n)_n$ konvergiert auf K, sogar glm

Für jedes $t \in M$ ist $K = \{t\}$ präkomp.

$\Rightarrow$ $(g_n(t))_n$ konvergiert $\square$

19. April — 20 April

D 1.3.10 (Separabilität)

Ein MR M heißt separabel falls eine abzählbare, dichte Teilmenge $A \subset M$ ex.

Bsp. 1.3.11 $\mathbb{Q}^d$ ist abzählbar und $\overline{\mathbb{Q}^d} = \mathbb{R}^d \Rightarrow \mathbb{R}^d$ separabel

M totalbeschr. MR $\Rightarrow$ Zu jedem $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ex. ein endl. ε-Netz $A_n \subset M$

$\Rightarrow A := \bigcup_n A_n$ abzählbar

und zu jedem $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$ ex

ein $a_n \in A_n$ mit $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$

Nun ist es leicht zu bew.

<u>S. 1.3.11</u> vom Arzela-Ascoli

Sei K komp. MR und $\mathcal{H} \subset C(K)$.

Dann:

(i) $\mathcal{H}$ präkomp $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$ beschränkt & gleichstetig

(ii) $\mathcal{H}$ kompakt $\Leftrightarrow$ — " — & abgeschlossen

<u>Bw</u> (i) „$\Rightarrow$" siehe 1.3.7

„$\Leftarrow$"

K komp $\Rightarrow$ totalbeschr $\overset{1.3.11}{\Rightarrow}$ separabel

$\Rightarrow \exists$ abz., dichtes $A \subset K$

Sei $(f_n)_n$ bel Flg. in $\mathcal{H}$

BRUNNEN

$\mathcal{H}$ beschr. $\Rightarrow$ $(f_n)_n$ beschr $\Rightarrow$ 1.3.8

$\exists$ TF $(g_m)_m$ c (f_n) die pktw. auf A konverg.

L. 1.3.9 $\Rightarrow$ (g_m) konvergiert sogar glm auf K

Haben bzgl. $\|\cdot\|$ konv. TF gefunden!

(ii) $C(K)$ ist vollst. nach 1.1.8

"$\Rightarrow$"

$\mathcal{H}$ komp $\Rightarrow$ präkom $\Rightarrow$ beschr. & gl.-st.

$\Downarrow$

abgeschl.

"$\Leftarrow$" ... $\mathcal{H}$ ist präkom pakt & abgeschl. im vollständigen MR $C(K)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist vollst.

präkomp.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist kompakt nach 1.3.2 (d)

Zusatz 1.3.12

Bei ○ Verwendung von 1.3.8
ist nur pktw. Beschränktheit
von $\mathcal{H}$ nötig, also:

$\mathcal{H}$ pktw. beschr & gleichst $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ präkomp.
$\cap$
$C(k)$

BR?

Verallgem: K komp. $\mathbb{R}$, Y norm Raum
$\mathcal{H} \subset C(K, Y)$.

$\mathcal{H}$ präkomp. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$ gleichst. & $\subset Y$
$\forall t \in k$ ist $\{f(t) \mid f \in \mathcal{H}\}$ präkomp.

Es gibt verwandte Kompaktheits-
kriterien für $\mathcal{H} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

BRUNNEN

4. Separabilität & Approximationsaussagen

Scheint trivial:

S. 1.4.1 Sei M separabler MR, $N \subset M$.
$\Rightarrow$ N ist separabel.

Bw: Sei $A \subset M$ abz & dicht.

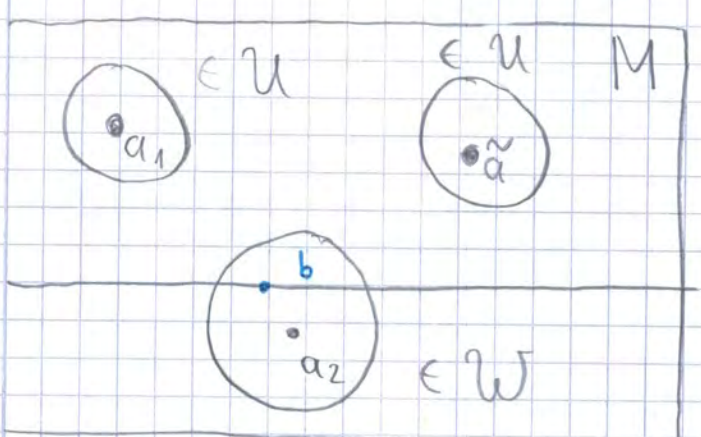
$$\mathcal{U} := \{ B_r(a) \mid a \in A,\ 0 < r \in \mathbb{Q} \}$$

$$\mathcal{W} := \{ B_r(a) \in \mathcal{U} \mid B_r(a) \cap N \neq \emptyset \}$$

beide abzählbar

Zu $W = B_r(a) \in \mathcal{W}$ wähle ein $b_W \in B_r(a) \cap N$

Erhalte so abz. Menge $B = \{ b_W \}_{W \in \mathcal{W}}$



Bh: B dicht in N

Bw: Sei $x \in N$ und $\varepsilon > 0$ bel.

Wähle $a \in A$ mit $d(a, x) < \frac{\varepsilon}{3}$

$r \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow x \in B_r(a) \Rightarrow B_r(a) \in \mathcal{W}$

$\Rightarrow b_W \in B_r(a) \cap N$ ex.

Damit

$d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < \frac{\varepsilon}{3} + r < \varepsilon$ □

Ziel nun: K kompakter MR $\Rightarrow C(K)$ separabel

Dfn 1.4.2 Sei M MR & Y NR.

a) Sei $f: M \to Y$. Dann heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

Träger (engl.: support) von f.

c) Sei $M \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_j$, $U_j = B_{r_j}(x_j)$

Überdeckung von M durch offene Bälle.

Setze $U_j^c = M \setminus U_j$ und

$$g_j : M \to [0, \infty), \; x \mapsto d(x, U_j^c)$$

b) Zu $A \subset M$, $x \in M$ defn Abstand oder Distanz von x zu A als

$$d_A(x) = d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Wegen $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ Übg.

ist d_A Lipschitz-stetig auf M.

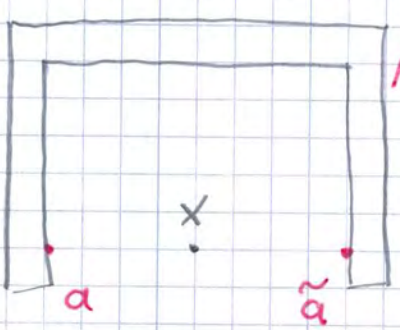
Gilt $d_A(x) = d(x, a)$ für ein $a \in A$

so heißt a ein Proximum oder

Bestapproximation zu x im A

Ist A kompakt ex. stets ein solches

muß aber nicht eindeutig sein



weiter mit (c): ... so wie $\gamma(x) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(x)$

Dann gelten:

$\gamma_j(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin \overline{U_j^c}$, also

$\operatorname{supp} \gamma_j \subset \overline{U_j} = \overline{B_{r_j}(c_j)}$

$x \in M \Rightarrow$ ex. $j \in \{1, \dots, m\}$ & $\varepsilon > 0$

mit $x \in U_j$, sogar $B_\varepsilon(x) \subset U_j$ da offen

$\Rightarrow \gamma(x) \geq \gamma_j(x) \geq \varepsilon > 0$

Daher ist für $j = 1, \dots m$

$\alpha_j = \frac{\gamma_j}{\gamma} \in C(M)$

insbes wohldef. mit

$\alpha_j : M \longrightarrow [0, 1]$

$\operatorname{supp} \alpha_j \subset \overline{U_j}$, $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \frac{\gamma}{\gamma} = 1$

$(\alpha_j)_{j=1}^{m}$ heißt eine der Überdeckung

$(U_j)_j$ untergeordnete (stetige)

Zerlegung der Eins auf M.

Dfn 1.4.3

a) $\mathcal{F}(M,E) := \{ f : M \to E \}$

b) Ist $M \neq \emptyset$, E Vektor R, $A \subset E$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ so defn wir das Tensor produkt

Skalar Vektor

$$\mathcal{H} \otimes A := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \, y_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \varphi_k \in \mathcal{H}, y_k \in A \right\} \subset \mathcal{F}(M,E)$$

Fkt

konstante

Bm. 1.4.4

$\mathcal{F}(M) \times E$ ist Raum aller E-wertigen Fkt auf M mit endlich dimensionalem Bild, denn das Bild von

$$f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k y_k$$

ist in $\operatorname{span}\{y_1, \dots y_n\}$ enthalten

Umgekerht: Ist $f \in \mathcal{F}(M,E)$

mit $f(M) \subset V := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$

jeder n-dim UVR so darstellb

so folgt $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x)\, v_k$

jedes $v \in V$ so darstellbar.

Satz 1.4.5 zur Tensorapproximation

Seien K kompakter MR, Y NR, $f \in C(K, Y)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex $g \in C(K) \otimes Y$ mit

$$g(K) \subset \operatorname{co}(f(K)) \text{ \& } \|f - g\|_{\sup} = \sup_{x \in K} \|f(x) - g(x)\|_Y \leq \varepsilon$$

Bw: K komp. $\Rightarrow$ f glm stetig

Also ex $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f(t) - f(s)\|_Y \leq \varepsilon$

für $d(t, s) \leq 1/n$.

K (prä) komp $\Rightarrow$ ex endl. $\frac{1}{n}$ Netz:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{r} U_j, \quad U_j = B_{1/n}(t_j), \quad t_j \in K$$

BRUNNER

mit untergeord. Zerl. d. Eins $(\alpha_j)_j$

26.4. Satze:

(*) $$g(t) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t)\, f(t_j) \in C(K) \otimes Y$$

$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t) \equiv 1$

Konvex-Komb. von Werten von f, insb.

$\in co(f(K))$

Für bel. $t \in K$ gilt

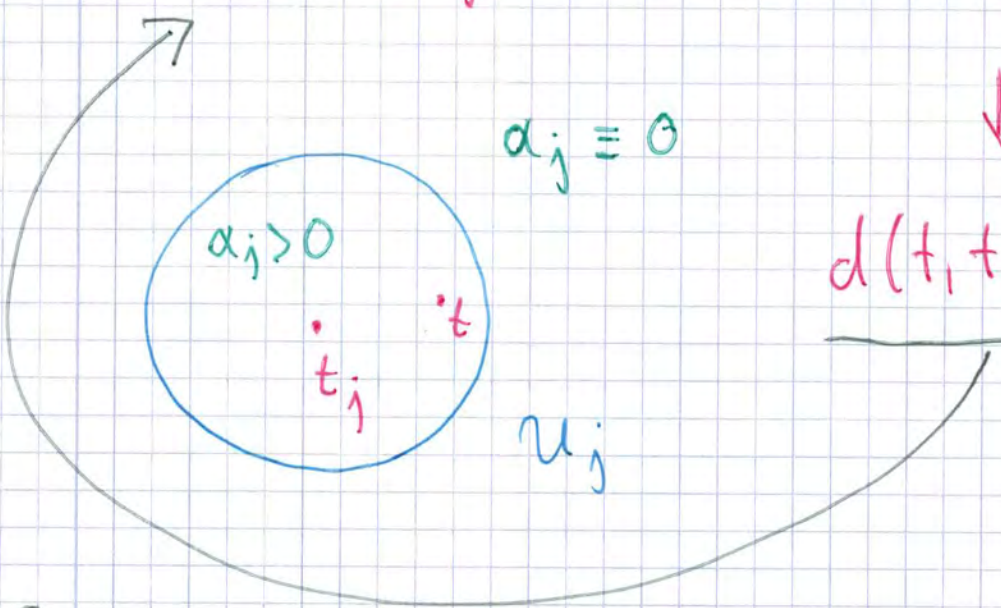
$$\left\| \sum_j \alpha_j(t) f(t) - g(t) \right\|_Y = \left\| \sum_j \alpha_j(t) \left[f(t) - f(t_j) \right] \right\|_Y$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t) = \varepsilon$$

da $\|f(t) - f(t_j)\| \leq \varepsilon$ falls $\alpha_j(t) \neq 0$

$\Downarrow$

$\alpha_j \equiv 0$ $\quad d(t, t_j) \leq 1/n$



Kor 1.4.6

Seien K kompakter MR & Y separabler NR. Dann ist $C(K,Y)$ separabel.

Bew: a) Gerade haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerl. d. Eins (ZdE) $(\alpha_j^n)_{j=1}^{r_n}$ konstruiert.

$$Z := \{ \alpha_j^n \mid n \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots r_n \}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ \alpha_1^n, \dots, \alpha_{r_n}^n \} \quad \text{abzählb.}$$

Für obem ⊗ konstruierte g gilt

$$g \in Z \otimes Y$$

b) Es ex. nach Anm dichtes, abz $A \subset Y$. Insbesondere ist dann

$$Z \otimes A \quad \text{abzählbar.}$$

BRUNNEN

Nun wähle wie im letzten Bw zu (x)

$f \in C(K, Y)$ und $\varepsilon > 0$, $g \in Z \otimes Y$

mit zugehörigen $t_1, \dots, t_r \in K$

A dicht in $Y \Rightarrow$ es ex a_j mit

$$\| f(t_j) - a_j \|_Y < \varepsilon$$

Für $$h(t) := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t)\, a_j \in Z \otimes A$$

gilt dann $$\| h - f \|_{sup} \leq \| h - g \|_{sup} + \| g - f \|_{sup}$$
$$\leq 2\varepsilon$$

Also $Z \otimes A$ dicht in $C(K, Y)$ & abz. □

Dfn 1.4.7

Sei M MR. Setze:

$$C_c(M) := \{ f \in C(M) \mid \operatorname{supp} f \overset{M}{\cup} \text{ ist komp} \}$$

Übg: $C_c(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ bzgl $\| \cdot \|_{L^p}$, für $p \in [1, \infty)$, Lebesguem

mit untergeord. Zerl. d. Eins $(\alpha_j)_j$

26.4. Satze:

(*) $$g(t) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t)\, f(t_j) \in C(K) \otimes Y$$

$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t) \equiv 1$

Konvex-Komb. von Werten von f, insb.

$\in co(f(K))$

Für bel. $t \in K$ gilt

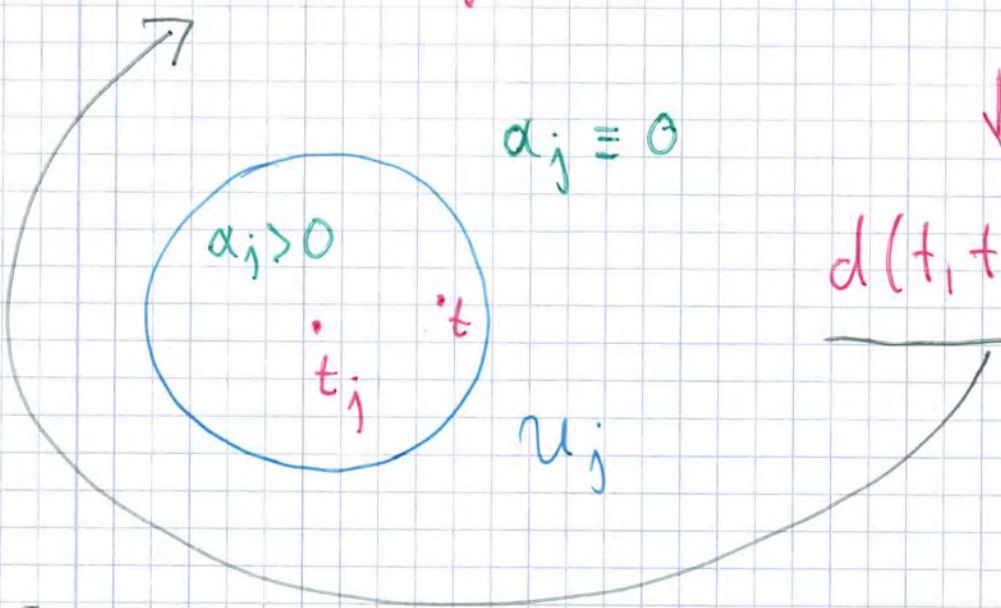
$$\left\| \sum_j \alpha_j(t) f(t) - g(t) \right\|_Y = \left\| \sum_j \alpha_j(t) \left[f(t) - f(t_j) \right] \right\|_Y$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t) = \varepsilon$$

da $\|f(t) - f(t_j)\| \leq \varepsilon$ falls $\alpha_j(t) \neq 0$

$\Downarrow$

$\alpha_j \equiv 0$ $\quad d(t, t_j) \leq 1/n$



Kor 1.4.6

Seien K kompakter MR & Y separabler NR. Dann ist $C(K,Y)$ separabel.

Bw: a) Gerade haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerl. d. Eins (ZdE) $(\alpha_j^n)_{j=1}^{r_n}$

- konstruiert.

$$Z := \{ \alpha_j^n \mid n \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots r_n \}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ \alpha_1^n, \dots, \alpha_{r_n}^n \} \quad \text{abzählb.}$$

- Für obem ⊗ konstruierte g gilt

$$g \in Z \otimes Y$$

b) Es ex. nach Anm dichtes, abz $A \subset Y$. Ins besondere ist dann

- $$Z \otimes A \quad \text{abzählbar.}$$

BRUNNEN

Nun wähle wie im letzten Bw zu (x)

$f \in C(K, Y)$ und $\varepsilon > 0$, $g \in Z \otimes Y$

mit zugehörigen $t_1, \dots, t_r \in K$

A dicht in Y $\Rightarrow$ es ex a_j mit

$$\| f(t_j) - a_j \|_Y < \varepsilon$$

Für $$h(t) := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(t)\, a_j \in Z \otimes A$$

gilt dann

$$\| h - f \|_{sup} \leq \| h - g \|_{sup} + \| g - f \|_{sup}$$
$$\leq 2\varepsilon$$

Also $Z \otimes A$ dicht in $C(K, Y)$ & abz. □

Dfn 1.4.7

Sei M MR. Setze:

$$C_c(M) := \{ f \in C(M) \mid \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt in } M \}$$

Übg: $C_c(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ bzgl $\| \cdot \|_{L^p}$, für $p \in [1, \infty)$, Lebesguem

S. 1.4.8 Sei $p \in [1, \infty)$, $M \subset \mathbb{R}^d$ messb.

$\Rightarrow$ $L^p(M, \lambda)$ ist separabel

Bw (1) Zunächst $M = K \subset \mathbb{R}^d$ komp.

$\Rightarrow$ $C_c(K) = C(K)$ ist separabel k 1.4.6

„supp f abges. ck, also komp" bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Also ex abz $A \subset C(K)$ mit:

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, f \in C(K)\ \exists\, g \in A$ s.d.

$$\|f-g\|_{L^p(K)} \leq \|f-g\|_\infty \lambda(K) < \frac{1}{n}\,\lambda(K)$$

$$\left[\int_K \underbrace{|f-g|^p}_{\leq \|f-g\|_\infty^p}\right]^{1/p}$$

(2) Insbesondere ex für $R \in \mathbb{N}$ & $K = \overline{B_R(0)}$ ein solches abz $A = A_R$

$C_c(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} \text{ stet} \mid \underbrace{\operatorname{supp} f}_{\subset \overline{B_R(0)}} \text{ komp} \}$

BRUNNEN

$= \bigcup_{R \in \mathbb{N}} \underbrace{C(\overline{B_R})}_{\text{besitzt abz. dichte TM } A_R}$

abz.

besitzt abz. dichte TM A

↳ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{L^p}$

(3) $\frac{\varepsilon}{2}$ Trick zeigt:

$C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$

$C_c(\mathbb{R}^d)$ separabel

$\Rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ separabel

(4) Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ nun messb. Für $f \in L^p(M)$ setze $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$

Damit ist eine linear, inj. Abb. $L^p(M) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ dfn.

$L^p(M)$ kann damit als abges. UVR von $L^p(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden. $\overset{\text{S.1.4.1}}{\Longrightarrow}$ auch $L^p(M)$ separabel

L. 1.4.9 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel

Bew $E := \{ \varepsilon : \mathbb{N} \to \{-1, +1\} \} \subset \ell^\infty$

ist überabz. da $\exists$ surjektives

$$\phi : E \longrightarrow [0,1]$$

überabz. „Binärdarst."

- Sind $\varepsilon \neq \tilde{\varepsilon}$, $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in E$ so

$$\| \varepsilon - \tilde{\varepsilon} \| = | \underbrace{1 - (-1)}| = 2$$

um terschiedl. an mind. einem $j \in \mathbb{N}$

- Sei nun A bel. dicht $\subset \ell^\infty$. Also ex. zu jedem $\varepsilon \in E$ ein a_ε mit $\| a_\varepsilon - \varepsilon \| < 1/2$

Diese Zuordnung $E \longrightarrow A$

$\varepsilon \longrightarrow a_\varepsilon$

ist injektiv, denn

BRUNNEN

Also: $\xi \neq \tilde{\xi} \Rightarrow a_\xi \neq a_{\tilde{\xi}}$

Damit ist auch A überabz. □

Hölder- & Sobolev-Normen

Dfn 1.4.10

a) Seien K komp $\subset \mathbb{R}$ & $\alpha \in (0, 1]$.

$f: K \to \mathbb{K}$ heißt **α-Hölder-stetig** oder **α-Hölder**, falls ein $C \in \mathbb{R}$ ex mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C \underbrace{d(x,y)^\alpha}_{> d(x,y) \text{ für make } x,y}$$

Deren Menge

$$C^{0,\alpha}(K) = \Lambda^\alpha(K)$$

$$= \left\{ f: K \to \mathbb{K} \;\middle|\; \underbrace{\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha}}_{= [f]_\alpha \text{ Halbnorm}} < \infty \right\}$$

ist ein Vektor R mit

$$\Rightarrow \|f\|_{\Lambda^\alpha} = \|f\|_{0,\alpha} = [f]_\alpha + \|f\|_\infty$$

ist Norm. Mit dieser ist $\Lambda^\alpha(K)$ BR.

1-Hölder $\Leftrightarrow$ Lipschitz

S. 1.4.11

Sei $\alpha \in (0,1]$, K komp $\subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{H} \subset C(K)$

$$C := \sup_{f \in \mathcal{H}} \|f\|_{1\alpha} < \infty$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist präkompakt (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$).

Bw: $\forall f \in \mathcal{H}$, $\forall s,t \in K$ gilt

$$|f(s)-f(t)| \leq [f]_\alpha \, d(t,s)^\alpha \leq C \, d(t,s)^\alpha$$

C unabh. von f, s, t

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ gleichst. $\Rightarrow$ Arzela-A. anwendb. $\square$

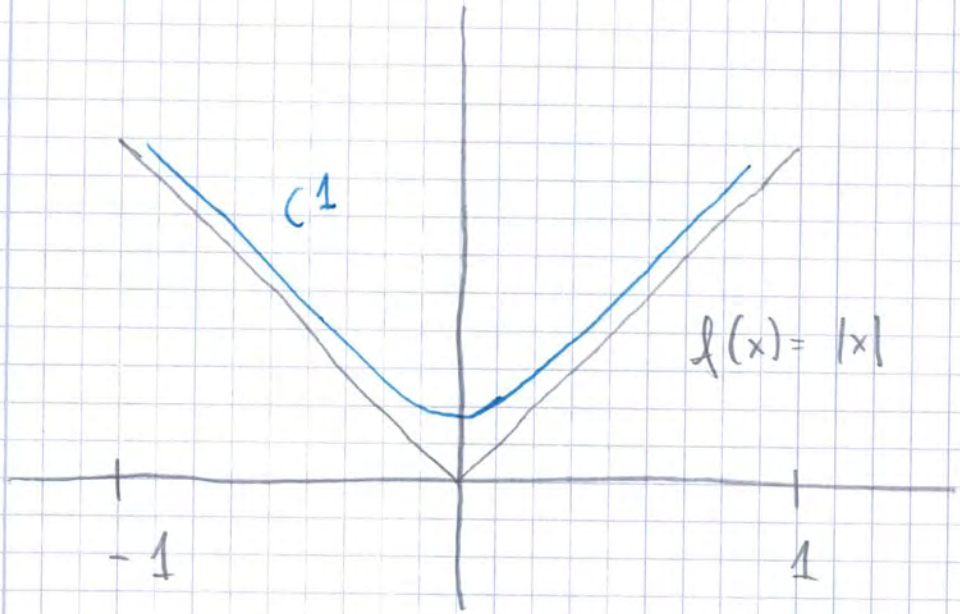
Bm 1.4.12 (Fkt auf Intervallen)

a) $C^1[a,b]$ nicht abg. in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

vgl Blatt 2, A1.

z.B. ex Flg $(f_n) \in C^1[-1,1]$

mit $\|f_n - f\|_\infty < 1/n$ für $f(x) = |x|$



Weierstraß-Approx-S.

Polynome liegen dicht in $\left(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\right)$

$\subset C^\infty$, insbes $C^1[a,b]$ dicht in —"—

Aber: vgl. Blatt 2

$C^1[a,b]$ ist BR bzgl. $\|\cdot\|_1$

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \Rightarrow$ auch $f \in C^1$

Es reicht sogar:

$(f_n) \subset C^1[a,b]$ & $\|f_n' - g\|_\infty \to 0$ &

$\exists\, c \in [a,b]$ s.d. $(f_n(c))_n$ konv in $\mathbb{K}$

$\Downarrow$

$\exists f \in C^1 : f_n \to f$ glm und $f' = g$

b) $0 < \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow$

$$C^1[a,b] \subset \Lambda^1[\,] \subset \Lambda^\beta[\,] \subset \Lambda^\alpha[\,] \subset C[\,]$$

Lipschitz

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\Lambda^\alpha} \leq C_\beta^\alpha \|f\|_{\Lambda^\beta}$$

$$\|f\|_{\Lambda^1} \leq |||f|||_1 =: \|f\|_{C^1}$$

c) Für $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1]$

$$C^{m,\alpha}[a,b] := \Lambda^{m,\alpha}[a,b] :=$$

$$\{ f \in C^m[a,b] \mid f^{(m)} \in \Lambda^\alpha[a,b] \}$$

ist BR bzgl. Norm $\|f\|$

$$\|f\|_{\Lambda^{m,\alpha}} := \|f\|_{m,\alpha} := \|f\|_{C^m} + [f^{(m)}]_\alpha$$

$$= |||f|||_m$$

26. April

d) Sobolev-Normen

für $p \in [1,\infty)$ auf $C^m[a,b]$:

$$f \longmapsto \|f\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{j=0}^{m} \int_a^b |f^{(j)}|^p \, dt \right)^{1/p}$$

BRONNER

b) $0 < \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow$

$$C^1[a,b] \subset \Lambda^1[\,] \subset \Lambda^\beta[\,] \subset \Lambda^\alpha[\,] \subset C[\,]$$

Lipschitz

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\Lambda^\alpha} \leq C_\beta^\alpha \|f\|_{\Lambda^\beta}$$

$$\|f\|_{\Lambda^1} \leq |||f|||_1 =: \|f\|_{C^1}$$

c) Für $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1]$

$$C^{m,\alpha}[a,b] := \Lambda^{m,\alpha}[a,b] :=$$

$$\{ f \in C^m[a,b] \mid f^{(m)} \in \Lambda^\alpha[a,b] \}$$

ist BR bzgl. Norm $\|f$

$$\|f\|_{\Lambda^{m,\alpha}} := \|f\|_{m,\alpha} := \underbrace{\|f\|_{C^m} + [f^{(m)}]_\alpha}_{= |||f|||_m}$$

26. April

d) Sobolev-Normen

für $p \in [1,\infty)$ auf $C^m[a,b]$:

$$f \longmapsto \|f\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{j=0}^{m} \int_a^b |f^{(j)}|^p \, dt \right)^{1/p}$$

BRONNER

$C^m[a,b]$ nicht vollst unter $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$!

S. 7.4.1 (elementare Sobolev-Abs)

a) Für alle $p \in [1, \infty)$ ex $C = C_p \in \mathbb{R}$

mit $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_{W^{1,p}}$ für $f \in C^1[a,b]$

b) Für alle $p \in (1, \infty)$. Es ex. $K = K_p \in \mathbb{R}$ mit

sei $\alpha := \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$\forall f \in C^1[a,b]: \|f\|_{1^\alpha} \leq K \|f\|_{W^{1,p}}$

c) Sei $p \in (1, \infty)$ & $\mathcal{H} \subset C[a,b]$ bzgl.

$\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ beschränkt.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ prä kompakt (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$)

Bw a)

MWS Integralrechnung: $\exists\ c \in [a,b]$

mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tau)\, d\tau$

HDI anwenden:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(\tau)\,d\tau \quad (\ast)$$

Beträge

$= \frac{1}{b-a}$ $\int_a^b f$ + —||— für $x \in [a,b]$ uniform in

Sei q konj. Exponent $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

< 1

Hölder-Ungl:

$$\int_c^x 1 \cdot f' \leq \left(\int_a^b 1 \right)^{1/q} \left(\int_a^b |f'|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq (b-a)^{1/q} \, \|f'\|_{L^p}$$

Insgesamt folgt

$$\|f\|_\infty \leq (b-a)^{\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L^p} + (b-a)^{1/q} \|f'\|_{L^p}$$

$\frac{1}{q} - 1 = -\frac{1}{p}$

$$\leq \max\left\{ (b-a)^{-1/p}, (b-a)^{1/q} \right\} \left(\|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p} \right)$$

falls $b-a<1$ ↙ ↘ falls $b-a>1$

$$\leq C_p \, \|f\|_{W^{1,p}}$$

BRUNNEN

7-9 Insbes hängt C_p vom $b-a$ ab! Übg: explizit.

Ebenso konst K_p.

(x) F alls $p = 1$ setze Betragsstr & verwende Δ-Ungl. f. Integrale

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f| + \int_a^b |f'|$$

maximiere Intervall

$$= \underbrace{C_{p=1}} \|f\|_{W^{1,1}}$$

$$= \max\{1, (b-a)^{-1}\}$$

b) Für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

Höldern:

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t 1 f'(\tau) d\tau \right|$$

$$\leq |t-s|^{1/q} \underbrace{\left(\int_s^t |f'|^p \right)^{1/p}}_{\leq \|f'\|_{L^p(a,b)}}$$

also ist f $\frac{1}{q}$-Hölder-st.

und $[f]_\alpha \leq \|f'\|_{L^p(a,b)}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{1,\alpha} = \underbrace{[f]_\alpha}_{\leq \|f\|_{W^{1,p}}} + \underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{wie im a)}}$$

a)

b)

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \|f\|_{1,1/q} \leq \sup_{f \in \mathcal{H}} K_p \|f\|_{W^{1,p}} < \infty$$

S. 1.4.11 $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ prä kompakt bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

2 Lineare Operatoren

Dfn 2.1 Seien E, F $\mathbb{K}$-VR und $T : E \to F$.

T heißt <u>linear</u> oder <u>(linearer) Operator</u>

falls $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E$

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

$$\ker T = T^{-1}\{0\} = \{ x \in E \mid T(x) = 0 \}$$

heißt <u>Kern</u> oder <u>Nullraum</u> von T und ist UVR von E

$\operatorname{Ran} T = T(E) = \{ T(x) \mid x \in E \}$ ist UVR vom F

$T(x) = Tx$ Klammern weggelassen

§ 2.1 Operatornormen

S. 2.1.1 Seien X, Y $\mathbb{R}$ und $T: X \to Y$ linear

Dann äquivalent

(i) $\|T\| := \sup_{x \in X,\ \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$

(ii) $\exists\, C \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X: \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X$ Lipschitz

(iii) T glm stetig auf X

(iv) $\exists\, x_0 \in X$: T ist stetig in x_0

(v) T ist in $0 \in X$ stetig

Bw: Am schwierigsten erscheint:

(v) $\Rightarrow$ (i) Ist Sup in (i) unendlich, so

ex Folge $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$

aber $\|T x_n\| > n$

Dann ist $y_n = \frac{1}{n} x_n$ Nullfolge

aber $\|T y_n\| = \frac{1}{n} \|T x_n\| > 1$ keine. ↯

Andere Implik: übg. Präsenzübg

Bm 2.1.2

a) Offensichtlich darf ich $C = |||T|||$ in (ii) benutzen. In der Tat ist $|||T|||$ kleinstes solches C, die Lipschitz-Konstante.

$L(X,Y) := \{ T : X \to Y \text{ linear stetig} \}$ ist VR und $|||\cdot|||$ eine Norm darauf.

Notation:

$L(X) = L(X,X)$

$X' = L(X, \mathbb{K})$ heißt Dualraum von X

$\varphi \in X'$ heißt stetiges lineares Funktional oder (stetige) Linearform.

$\|T\| = |||T|||$ Umweltschutz

BRUNNEN

(b) Für lineares $T : X \to Y$ zw. NR:

T stetig $\Leftrightarrow$ $T(\underbrace{B_1(0)}_{\subset X})$ beschr in Y

$\Leftrightarrow$ $T(A)$ beschr in Y für jedes beschr $A \subset X$

Daher

T <u>beschränkt</u> $:\Leftrightarrow$ T stetig

(c) Ist X endl-dim, so auch $T(X) \subset Y$ und T ist automatisch stetig.
[alle Normen äquivalent]

Bsp. Un beschränkter Operatoren (auf ∞-dim VR) sind Differentialoperatoren.

(d) Seien $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ NR und S linear

Dann ist $ST := S \circ T$ auch linear, d.h. $ST \in L(X, Z)$, heißt <u>Komposition</u>

0. Hintereinanderausführung von $ macht T.

Die $\|\cdot\|$ - Norm ist sub multiplikativ:

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \text{, denn}$$

$$\forall x \in X: \|STx\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

Aus S. 2.1.1 folgt

K. 2.1.3 Seien X, Y NR und $\mathcal{H} \subset L(X,Y)$.
Dann

$$\mathcal{H} \text{ gleichstetig} \iff C := \sup_{T \in \mathcal{H}} \|T\| < \infty$$

Bw „$\Leftarrow$"

Linearität

$$\|Tx - T\xi\| \leq \|T\| \|x - \xi\| \leq C \|x - \xi\|$$

↑ Def $\|T\|$

↑ unabh. v. x, ξ, T

Also $\mathcal{H}$ gleichst

„$\Rightarrow$" Wäre $C = \infty$, so gäbe es

$\forall n \in \mathbb{N}$ ein $T_n \in \mathcal{H}$ mit $\|T_n\| > n$, d.h.

einen Vektor $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$

BRUNNEN

und $\| T_n x_n \| > n$. Sei $\xi_n = \frac{1}{n} x_n$

$\Rightarrow \| \xi_n - 0 \| \leq 1/n$ & $\| T_n \xi_n - T_n 0 \| > 1$

Also kann $\mathcal{H}$ nicht gleichst. sein. □

S. 2. 1. 4 Seien X, Y NR.

a) Y vollst $\Rightarrow L(X, Y)$ vollst.

b) X' ist BR Insbesondere:

Bw:

Sei $(T_n) \subset L(X, Y)$ Cauchy-F und $x \in X$ fest $\Rightarrow$

$\| T_m x - T_n x \| \leq \| T_m - T_n \| \, \| x \|$ $< \varepsilon$ für $m, n > Q$

Also ist $(T_n x)_n$ Cauchy im Y (vollst) also konvergent:

$$T x := \lim_{n \to \infty} T_n x$$

def. Abb. $T : X \to Y$.

Diese ist sogar linear (übg.)

Nun $\varepsilon > 0$, $x \in X$ bel. Dann ex $Q \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Tx - T_m x\| = \lim_n \|T_n x - T_m x\| \leq \underbrace{\|T_n - T_m\|}_{<\varepsilon} \|x\|$$

für $m, n > Q$

Also:

$T - T_m$ stetig

$T = (T - T_m) + T_m$ stetig

& $\|T - T_n\| < \varepsilon$ für $n > Q$

Insges: (T_n) konv. gegen T in $L(X, Y)$ □

Spezialfall von L. 1.3.9

K. 2.1.5 $A \subset \mathbb{N}$ dicht

Seien: X NR, Y BR, $(T_n)_n \subset L(X, Y)$,

$C := \sup_n \|T_n\| < \infty$, (T_n) konv. auf A

Dann: $\forall x \in X$ ex: $Tx := \lim_n T_n x$

Konverg ist glm auf jedem präkomp. $K \subset X$

$T \in L(X, Y)$, d.h. linear

$\|T\| \leq C$

Bw: Ersten beiden Eig klar nach L 1.3.9

Linearität (übg)

Wg: $\|Tx\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\|$

$\leq C\|x\|$

ist $\|T\| \leq C$ insbes. T stetig □

27. April

Nun untersuche Linearformen auf $X = C(K)$ oder $C_b(M)$

Dfn 2.1.6

a) Sei M MR. Setze

$C_b(M) = \{ f \in C(M) \mid f \text{ beschränkt.} \}$

$\Rightarrow \|f\|_\infty < \infty$ für $f \in C_b(M)$

definiert Norm auf $\|\cdot\|$

$\sup\{|f(x)| : x \in M\}$

Nun $\varepsilon > 0$, $x \in X$ bel. Dann ex $Q \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Tx - T_m x\| = \lim_m \|T_m x - T_n x\| \leq \underbrace{\|T_m - T_n\|}_{< \varepsilon} \|x\|$$

für $m, n > Q$

Also:

$T - T_m$ stetig

$T = (T - T_m) + T_m$ stetig

& $\|T - T_n\| < \varepsilon$ für $n > Q$

Insges: (T_n) konv. gegen T in $L(X, Y)$ □

Spezialfall von L. 1.3.9

K. 2.1.5 $A \subset \mathbb{N}$ dicht

Seien: X NR, Y BR, $(T_n)_n \subset L(X, Y)$,

$C := \sup_n \|T_n\| < \infty$, (T_n) konv. auf A

Dann: $\forall x \in X$ ex: $Tx := \lim_n T_n x$

Konverg ist glm auf jedem präkomp. $K \subset X$

$T \in L(X, Y)$, d.h. linear

$\|T\| \leq C$

Bw: Ersten beiden Eig klar nach L 1.3.9

Linearität (übg)

Wg: $\|Tx\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| \leq C\|x\|$

ist $\|T\| \leq C$ insbes. T stetig □

27. April

Norm untersuche Linearformen auf $X = C(K)$ oder $C_b(M)$

Dfn 2.1.6

a) Sei M MR. Setze

$C_b(M) = \{ f \in C(M) \mid f \text{ beschränkt} \}$

$\Rightarrow \|f\|_\infty < \infty$ für $f \in C_b(M)$

definiert Norm auf $\|\cdot\|$

$\sup\{|f(x)| : x \in M\}$

b) Sei M MR, $a \in M$ und

$$\delta_a : C_b(M) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto f(a)$$

Diese Abb. ist linear und wg

$|\delta_a(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_\infty$ auch beschr (x)

also $\delta_a \in C_b(M)'$, genannt

Dirac-δ-Funktional

(x) $\Rightarrow$ $|||\delta_a||| \leq 1$

$f \equiv 1$ auf M einsetzen ergibt

$|||\delta_a||| \geq |\delta_a(f)| = 1$

insbes $|||\delta_a||| = 1$

Bm 2.1.7

(i) Eine Linearkombination

$$L := \sum_{j=1}^{m} c_j \delta_{a_j}, \quad a_j \in M, \ c_j \in \mathbb{K}$$
$$c_j \neq 0$$

BRUNNEN

vom Dirac-Funktionalen ist wieder
im $C_b(M)'$, da VR.

Δ-Ungl für $|||\cdot|||$ auf $C_b(M)'$ liefert

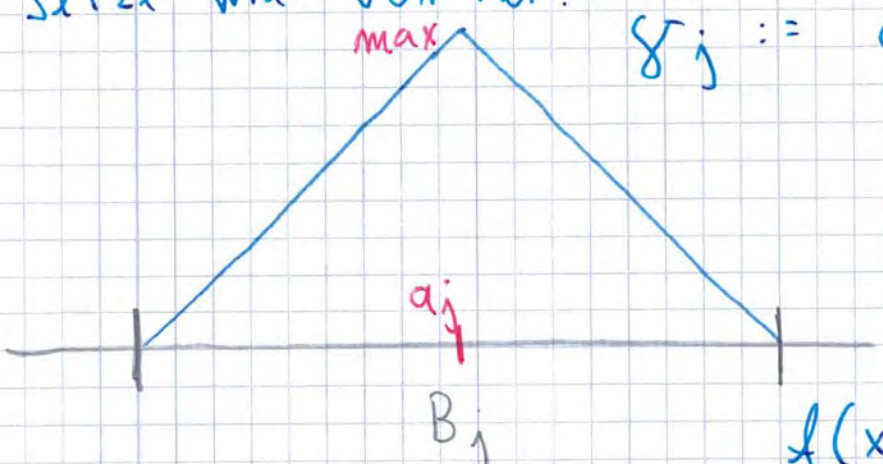
$$\|L\| \leq \sum_j |c_j| \, \|\delta_{a_j}\| = \sum_{j=1}^{M} |c_j|$$

Wollen = zeigen.

Setze $r = \frac{1}{3} \min_{i,j=1}^{M} d(a_i, a_j)$

$\Rightarrow B^j := B_r(a_j)$, $j = 1, \dots, M$ disjunkt

Setze wie vorher: $\gamma_j := d_{B^j}(\cdot)$



sowie

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} \frac{|c_j| \, \gamma_j(x)}{c_j \, \gamma_j(a_j)}$$

$\Rightarrow f \in C(M)$,

$$|f(x)| \leq \sum_j \underbrace{\left|\frac{c_j}{c_j}\right|}_{=1} \frac{\gamma_j(x)}{\gamma_j(a_j)} \leq 1$$

nur ein Summand $\neq 0$, da Bälle disjunkt. $\Rightarrow \|f\|_\infty \leq 1$, $f \in C_b(M)$.

Für $j = 1, \dots, M$:

$$f(a_j) = \frac{|c_j|}{c_j} \frac{g_j(a_j)}{g_j(a_j)}$$

damit

$$L(f) = \sum_j c_j \underbrace{\int_{a_j}(f)}_{= f(a_j) = |c_j|/c_j} = \sum_{j=1}^{M} \frac{c_j}{c_j} |c_j|$$

(ii) Behauptet:

zu $L^p(\mathbb{R}^d) \ni f \xleftarrow{\text{ex}} f_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messb $\quad \|(f - f_n)\mathbb{1}_\Omega\|_p < \frac{1}{n}$, $p \in [1, \infty)$

$\Rightarrow C_c(M)$ dicht in $L^p(M)$

für $M \subset \mathbb{R}^d$ offen oder abgeschlossen.

S. 2.1.8

Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ offen oder abgeschlossen. Zu $g \in L^1(M)$ definiere

$$J_g : C_b(M) \longrightarrow \mathbb{K}, \; f \longmapsto \int_M f g \, d\lambda$$

Lebesg.

Dann ist J_g linear & stetig, d.h. $J \in C_b(M)'$,

und $$\|J_g\| = \|g\|_{L^1(M)}$$

Bw: a) $$|J_g(f)| \leq \int_M |f| |g| \leq \|g\|_{L^1(M)} \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq \|f\|_\infty}$$

$\Rightarrow \|\|J_g\|\| \leq \|g\|_{L^1}$

$\Rightarrow$ J_g beschränkt, auch linear, da

$$\int (f+h) g = \int f g + \int h g, \text{ also } J_g \in C_b(M)'$$

Auch die Abb.

$$J : L^1(M) \longrightarrow C_b(M)', \; g \longmapsto J_g$$

ist daher linear und (Lipschitz) stet.

w.g. $\|\!|\!| J_g - J_{g_M} |\!|\!| = \| g - g_M \|_{L^1(M)}$

b) Sei zunächst $g \in C(M) \cap L^1(M)$

Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi(x) = \exp(-|x|^2)$

und $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\overline{g(x)}}{|g(x)| + \varepsilon\,\varphi(x)} > 0$

$\Rightarrow f$ stetig und $\|f\|_\infty \leq 1$

$$J_g(f) = \int_M \frac{g\,\overline{g}}{|g| + \varepsilon\varphi} \geq \int_M \frac{|g|^2 - \varepsilon^2\varphi^2}{|g| + \varepsilon\varphi}$$

$$= \int_M (|g| - \varepsilon\varphi) = \|g\|_{L^1(M)} - \varepsilon \underbrace{\int_M e^{-x^2}}_{= c \in \mathbb{R}}$$

Mit Folge $f = f_{1/n}$ ergibt sich

$$\|\!|\!| J_g |\!|\!| = \|g\|_{L^1}$$

c) Wg. Bm ex. zu $g \in L^1(M)$

Flg $g_n \in C_c(M)$ mit

$$\| g - g_n \|_{L^1} \longrightarrow 0$$

Damit

$$\| \mathcal{J} g \| = \| \lim_{n \to \infty} \mathcal{J} g_n \| = \lim \| g_n \|_{L^1} = \| g \|_{L^1}$$

□

2.2 Isomorphien, Normen, Fortsetzungen

Dfn 2.2.1 Seien M, N MR, $\varphi : M \to N$

X, Y NR, $T : X \to Y$ linear

i) φ ist Homöomorphismus

$:\Longleftrightarrow$ φ bijektiv, φ & φ^{-1} stetig

Dann heißen M & N homöomorph.

ii) T <u>Isometrie</u> $:\Leftrightarrow \forall x \in X : \|Tx\|_Y = \|x\|_X$

iii) X & Y <u>isomorph</u> $:\Leftrightarrow X \simeq Y$

$:\Leftrightarrow \exists A : X \to Y$ linearer Homöomorph.

[$\Rightarrow$ auch A^{-1} linear]

iv) X & Y <u>isometrisch (isomorph)</u>

$:\Leftrightarrow X \cong Y :\Leftrightarrow \exists$ lineare, bij. Isometrie $A : X \to Y$

ununterscheidbar

Klassifikation:

Welche BR sind isomorph oder sogar isometrisch zueinander?

<u>Bm 2.2.2</u>

a) $\dim X = \dim Y < \infty \Rightarrow X \simeq Y$

da alle Normen äquivalent

b) Für $p \neq q \in [1, \infty)$ gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_q = \sqrt[q]{n} \neq \sqrt[p]{n} = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$\Rightarrow \quad \ell^p[\,] \not\cong \ell^q[\,]$$

c) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar

Parsevalsche Gl. $\Rightarrow$ $L^2(\Omega) \cong \ell^2(\mathbb{N})$

Pelczynshi $\Rightarrow$ $L^\infty[a,b] \cong \ell^\infty(\mathbb{N})$

$\cong$ für alle anderen p.

d) N, M komp $\mathbb{R}$, $\varphi: M \to N$ bij, stet

φ^{-1} auch.

Setze:

$$T: C(N) \longrightarrow C(M) \qquad \text{ist linear}$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi \qquad \text{übg.}$$

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(\underbrace{\varphi(x)}_{=y})| \overset{\text{bij}}{=} \sup_{y \in N} |f(y)| = \|f\|_\infty$$

Zu $g \in C(M)$ def m. $f := g \circ \varphi^{-1} \in C(N)$

$\Rightarrow Tf = g$

$\Rightarrow T$ surjektiv $\overset{\text{isom}}{\Longrightarrow}$ bijektiv

Im $\mathbb{K}^M = V$ gilt: $M \subset V$ beschränkt

$\Rightarrow M$ relativ kompakt

$\Rightarrow M$ präkomp.

S. 2.2.3 Sei X NR & $B_1(0) \subset X$ total beschränkt. $\Rightarrow \dim X < \infty$

Bw Es ex $\varepsilon = \frac{1}{2}$ - Netz $a_1, \dots, a_M$:

$$B := B_1(0) \subset \bigcup_{j=1}^{M} B_{\frac{1}{2}}(a_j)$$

$$= a_j + B_{\frac{1}{2}}(0) = a_j + \tfrac{1}{2} B$$

$$\subset V + \tfrac{1}{2} B \qquad V = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_M)$$

Iteriere:

$$B \subset V + \tfrac{1}{2} B \subset \underbrace{V + \tfrac{1}{2}\left(V + \tfrac{1}{2} B\right)}_{=V} = V + \tfrac{1}{4} B$$

$\cap$ x

$$\subset V + \frac{1}{2^k} B \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

$\cap$ V_k

$\Rightarrow$ Für jedes $x \in B$ & $k \in \mathbb{N}$ ex. $v_k \in V$:

$$\| x - v_k \| < 2^{-k}$$

$\Rightarrow$ $x \in \overline{V}$

Da V endl-dim $\cup \mathbb{R}$ ist

$$V = \overline{V} \supset B$$

$\Rightarrow V = X$, also X endl-dim $\square$

Bm 2.2.4 Lin. Op. auf $\mathbb{K}^d$ und Matrix normen

$T : (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_1) \longrightarrow Y$ NR linear

$$\Rightarrow |||T||| = \max_{j=1}^{d} \|T e_j\|$$

$e_j = (0 \quad 0 \; 1 \; 0 \quad 0)$
$\uparrow j$

$$T : (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|) \longrightarrow Y \text{ linear}, \quad Y \text{ über } \mathbb{R}$$

$$(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|) \xrightarrow{\text{Id stetig}} (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_1) \xrightarrow{\text{stetig}} Y$$

Wg. Norm äquiv.

$\Rightarrow$ T stetig

Spalten summen - Norm

$T \in L(\mathbb{K}^d, \mathbb{K}^m) \rightsquigarrow$ Matrix (Darstellung)

bzgl. Einheitsvektoren

$$T e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

$e_j \in \mathbb{K}^d$, $e_i \in \mathbb{K}^m$

$$A = M(T) = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m \quad d}$$

[abh. vom Basis wahl]

Im Kontext von Matrizen:

$x \in \mathbb{K}^d$ stets Spaltenv. $(x_1, \dots, x_d)^T$

$\Rightarrow$ Te_j ist j-te Spalte von $A = (a_{ij})$

$$\Rightarrow \|T\|_{L(\ell^1[d], \ell^1[m])} \overset{s.o}{=} \max_{j=1}^{d} \|Te_j\|_1$$

$$= \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \|A\|_{ss}$$

↑ Elem. d. j-ten Spalte

Matrix $\simeq$ Zeilenvektor von Spaltenvektoren

$\ell^p[d] := \ell^p(\{1, \dots, d\}, \mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$

3. Mai

Zeilensummen - N.

$$\|T\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} = \max_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{d} |a_{ij}| =: \|A\|_{zs}$$

$$\|T\|_{L^2(\ell^2, \ell^2)} = ? \quad \text{nicht explizit}$$

Abschätzungen:

9-11

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$\|Tx\|_2^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right) \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|T\|_{L(\ell^2, \ell^2)} \leq \sqrt{\quad} =: \|A\|_{HS}$$

Hilbert - Schmid - Norm.

unitär invariant

$$\|T\|_{L(\ell^2,\ell^2)} \leq \sqrt{\|A\|_{2s} \, \|A\|_{ss}}$$

Für $T = Id : \mathbb{K}^d \longrightarrow \mathbb{K}^d$, $x \longmapsto x$

ist $M(T) = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{d} = I$

$$\Rightarrow \quad 1 = \|Id\|_{L(\ell^2)} \leq \sqrt{\|I\|_{2s} \, \|I\|_{ss}} = 1$$

Aber $\max \underbrace{\sum |\delta_{ij}|}_{=1}$

$$\sum_i \sum_{j=1}^{d} |\delta_{ij}| = \sum_i |\delta_{ii}| = d$$

$$\Rightarrow \|I\|_{HS} = \sqrt{d}$$

Übg: Analog Normen berechnen / abschätzen für

$\mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Big\} d$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{d}$

S. 2.2.5

X NR, $V \subset X$ UVR, Y BR

$T: V \to Y$ stetig, linear

a) $\Rightarrow \exists!$ Fortsetzung $\overline{T}: \overline{V} \to Y$ von T

$\forall x \in V: \overline{T}(x) = T(x)$

b) $\overline{T}$ ist linear & $\|\overline{T}\| = \|T\|$

Bw: Standardargumente.

Bm: T injektiv $\not\Rightarrow$ $\overline{T}$ inj

T isometrisch $\Rightarrow$ $\overline{T}$ isometrisch

S 1.4.1. $p \in [1, \infty)$ $\Longrightarrow$ Inklusion

zu Sobolev Abs.

$$J: \underbrace{\left(C^1[a,b], \|\cdot\|_{W^{1,p}}\right)}_{\| \quad \text{V}} \to C[a,b]$$

ist stetig

S.2.2.5 $\Rightarrow$ $\exists!$ Fortsetzung $\overline{J}: \overline{V} \to C[a,b]$

!!

$W^{1,p}[a,b]$

Es gilt: $\overline{J}$ ist injektiv, also Einbettung

Fkt zweier Variablen als Bsp für

Isomorphie / Isometrie

Dfn / Not. 2.2.6

M, N Mengen, $f: M \times N \longrightarrow \mathbb{K}$

partielle Fkt

für $t \in M, s \in N$

$f_t: s \longmapsto f(t,s)$

$f^s: t \longmapsto f(t,s)$

analog zu Vektor schreibweise von Matrizen.

Definiere $\Phi : \mathcal{F}(M \times N) \longrightarrow \mathcal{F}(M, \mathcal{F}(N))$

$$f \longmapsto \Phi(f) = F$$

$F(t) := f_t \in \mathcal{F}(N)$ für alle $t \in M$

Φ ist linear, bij mit Inverser

$$\Phi^{-1} : \mathcal{F}(M, \mathcal{F}(N)) \longrightarrow \mathcal{F}(M \times N)$$

$f := \Phi(F)$, $f(t,s) = F_t(s)$

S. 2.2.7

K, L komp MR

a) $\Phi : C(K \times L) \longrightarrow C(K, C(L))$

ist linear, bij., isometrisch

b) $C(K) \otimes C(L)$ dicht in $C(K \times L)$

Bw von a) $K \times L$ ist komp. MR

$f \in C(K \times L)$

ist glm stetig

$d((x,g),(t,s)) = d_K(x,t) + d_L(g,s)$

Ist $(t_n, s) \longrightarrow (t,s)$ in $K \times L$

so $\| F(t_n) - F(t) \|_{C(L)} = \sup_{s \in L} |f(t_n,s) - f(t,s)| \longrightarrow_n 0$ glm stetig

Also $F: K \longrightarrow C(L)$ stetig

Isometrie eigenschaft wg:

$\| \Phi(f) \| = \sup_{t \in K} \| F(t) \|_{C(L)} = \sup_{t \in K} \sup_{s \in L} |f(t,s)| = \| f \|$

Zur Surjektivität:

Bh: $F \in C(K, C(L)) \Rightarrow f := \Phi^{-1}(F) : K \times L \to \mathbb{C}$ ist stetig

Fkt existiert, s.o.

Bw: Sei $(t_n, s_n) \longrightarrow (t,s) \in K \times L$

$$\Rightarrow \quad |f(t_m, s_m) - f(t,s)|$$

$$\leq |f(t_m, s_m) - f(t, s_m)| + |f(t, s_m) - f(t,s)|$$

$$\leq \sup_{s_m} \|F(t_m) - F(t)\|_{C(L)} + |F(t)(s_m) - F(t)(s)|$$

$\|F(t_m) - F(t)\| \to 0$ da $t_m \to t$, da $(t_m, s_m) \to (t,s)$ und F stetig $\in C(K, C(L))$

$|F(t)(s_m) - F(t)(s)| \to 0$ da $s_m \to s$ und $F(t) \in C(L)$

Hier verwendet: Metrik d auf $K \times L$ s.d. Projektionen $K \times L \to K$, $K \times L \to L$ stetig ⌟

Haben also gez, dass $\Phi^{-1}(F)$ legitimes Urbild zu F. □

§ 2.3 Integral- & Differentialoper

1. F. sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\varphi \in C(K)$

Wollen für geeignete Fkt $f: K \to \mathbb{K}$

Abb.

$$S : f \longmapsto (Sf)$$

(10)

$$(Sf)(t) := \int_K \kappa(t,s) f(s)\, ds \,, \quad t \in K$$

definieren. κ heißt hier Integral kern

Analogie zu Matrizen

D. 2.3.1

a) $$\|\kappa\|_{SI} := \sup_{s \in K} \int_K |\kappa(t,s)|\, dt$$

Spalten integral - N

$$\|\kappa\|_{ZI} := \sup_{t \in K} \int_K \underbrace{|\kappa(t,s)|}_{\leq \|\kappa\|_\infty}\, ds$$

Zeilen integral - N.

$$\Rightarrow \quad \|\kappa\|_{ZI} \leq \|\kappa\|_\infty \; \lambda(K)$$

$$\|\kappa\|_{SI} \leq \|\kappa\|_\infty \; \lambda(K)$$

b) Die Abb. S aus (IO) heißt Integraloperator und $\mathcal{K}$ Integralkern.

Bm. 2.3.2

(i) S ist linear

bildet $L^1(k)$ in $C(k)$ ab, denn:

$k \times k$ kompakt, also $\mathcal{K}$ glm stetig, d.h.

zu $\varepsilon > 0$ ex $\delta > 0$ so dass

für alle $|t_1 - t_2| < \delta$ und alle $s \in k$

$$|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| < \varepsilon$$

$$|(Sf)(t_1) - (Sf)(t_2)| \leq \int_k |\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)|\, |f(s)|\, ds$$

$$\leq \varepsilon \int_k |f| = \varepsilon \|f\|_{L^1} < \infty$$

Also Sf stetig

Sogar: $C := \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^1} < \infty$

für $\mathcal{K} \subset L^1(k)$ so ist

$S(\mathcal{K}) \subset C(k)$ gleichstetig.] GS

(ii) $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|Sf(t)| \leq \left[\int |x(t,s)|^q \, ds \right]^{1/q} \|f\|_{L^p}$$

Hölder

$$\Rightarrow \|Sf\|_\infty \leq \left[\sup_{t \in k} \left[\int |x(t,s)|^q \, ds \right]^{1/q} \right] \|f\|_{L^p}$$

$\underline{p = 1}$: $\|Sf\|_\infty \leq \|x\|_\infty \, \|f\|_{L^1}$

$\underline{p = \infty}$ $\|Sf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \underbrace{\sup_{t \in k} \int_k |x(t,s)| \, ds}_{= \|x\|_{ZI}}$

(iii) Arzela - Ascoli:

$\mathcal{K}$ beschränkt in $L^p(k) \Rightarrow S(k)$ relativ kompakt in $C(k)$

Für $p=1$ besagt das GS

Für $p>1$ passen wir Abschätzungen an:

$$|Sf(t_1) - Sf(t_2)| \leq \int ds\, |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)|\, |f(s)|$$

$$\leq \Big[\int ds \underbrace{|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)|^q}_{< \varepsilon \text{ für } |t_1-t_2|<\delta \text{ da } \mathcal{K} \text{ glm stetig.}} \Big]^{1/q} \|f\|_{L^p}$$

$$\leq \varepsilon\, \lambda(k)^{1/q}\, \|f\|_{L^p} \Rightarrow \text{Gleichstetigkeit}$$

falls $\sup_{f \in \mathcal{H}} \|f\|_{L^p} =: C < \infty$

Wegen $\left(\int_k |f|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty\, \lambda(k)^{1/p}$

ist Inklusion $i : C(k) \longrightarrow L^p(k)$ stetig

10-11 $\Rightarrow$ $\tilde{S} := i \circ S : L^p(k) \circlearrowleft$

bildet beschränkte L^p-Teilm in relativ kompakte ab. 4. Mai

(iv) Mit Varianten bekannter Ideen zeigt man

$$\|Sf\|_\infty = \|x\|_{ZI} \|f\|_\infty$$

und $\|S\|_{L(C(k))} = \|x\|_{ZI}$

Vgl. mit Abs. 4. Matrixnormen S. 2.3.3

Seien $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x \in C(k^2)$

$S = S_x$ wie oben. Dann

a) $\|Sf\|_{L^2} \leq \|x\|_{L^2(k^2)} \|f\|_{L^2(k)}$

b) $\|Sf\|_{L^1} \leq \|x\|_{SI} \|f\|_{L^1}$

c) $\|Sf\|_{L^p} \leq \|x\|_{ZI}^{1/q} \|x\|_{SI}^{1/p} \|f\|_{L^p}$

11-1 c) ist Interpolation von L^1 Schranke b)

und σ-Schranke im (iv)

Bw. von c)

$$\int_K dt\, |Sf(t)|^p \le \int_K dt \left[\int_K |x(t,s)|^{\frac{1}{q}} |x(t,s)|^{\frac{1}{p}} |f(s)| \right]^p$$

Hölder

$$\le \int_K dt \underbrace{\left(\int_K ds\, |x(t,s)| \right)^{p/q}} \int ds\, |x(t,s)|\, |f(s)|^p$$

$$\le \sup_{t \in K} \; -\|-\; = \|x\|_{\infty I}$$

$$\le \|x\|_{\infty I}^{p/q} \int_K ds\, |f(s)|^p \int_K dt\, |x(t,s)|$$

Fubini

$$\le \|x\|_{\infty I}^{p/q} \|f\|_{L^p}^p \underbrace{\qquad}_{\le}$$

$$\sup_{s \in K} \int_K dt\, |x(t,s)| = \|x\|_{\infty I}$$

p-te Wurzel $\Rightarrow$ c)

implizit auch $x^s \in L_1(\Omega)$ für f.a. s

c) $\|x\|_{sI} < \infty$ und

$$\|x\|_{zI} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \int_\Omega |x(t,s)|\, ds < \infty$$

Noch allgem: für σ-endliche Maßräume (Ω, μ).

Bsp 2.3.5

a) Betrachte $D: (C^1[0,b], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,b], \|\cdot\|_\infty)$

$$f \longmapsto \frac{d}{dx} f$$

Für $f_n(t) = \frac{\sin tn}{n}$ gilt

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{aber}$$

$$\|f'_n\| = \|\cos(\cdot n)\|_\infty \geq \cos 0 = 1$$

Bsp 2.3.4

a) $\|x\|_{L^2} = \left[\int_K dt \int_K ds \; |x(t,s)|^2 \right]^{1/2}$

heißt Hilbert-Schmidt-Norm

analog zu

$$\|A\|_{HS} = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

b) Die Aussagen vom S. 2.3.3 gelten auch für die Verallgem.

K kompakt $\longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d$ messb.

$x \in C(K \times K) \longrightarrow x: \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ messb.

und jeweils in

a) $x \in L^2(\Omega \times \Omega) \Rightarrow \|x\|_{L^2} < \infty$

b) $\|x\|_{SI} = \operatorname{ess\,sup}_{s \in \Omega} \int_\Omega |x(t,s)| \, dt < \infty$

also keine Nullfolge. Damit ist der lineare Op. D nicht stetig.

Ändern wir die Norm:

$$\tilde{D}: \left(C^1[0,b], \|\cdot\|_{C^1}\right) \to \left(C[0,b], \|\cdot\|_\infty\right)$$

ist stetig, da:

$$\|\tilde{D}f\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$$

Hier sind Start- und Zielraum unterschiedlich.

b) Wollen nun D auf ganz $C[0,b]$ erweitern.

VR $C^1[0,b]$ besitz (algebraische) Basis $\mathcal{B}_1$. Diese ist lin. un abh. in $C[0,b]$. Ergänze sie durch

$\mathcal{B}_2$ zu (alg.) Basis $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$

von $C[0,b]$. Setze $W = \operatorname{span} \mathcal{D}_2$.

$$\Rightarrow \quad C[0,b] = C^1[0,b] \oplus W$$

$$v = \underbrace{u + w}$$

eind. durch v gegeben.

Setze $Dw = 0$ für alle $w \in W$.

Damit $D: C[0,b] \hookrightarrow$ definiert,

linear, aber unstetig wg a).

Fazit:

Müssen uns damit abfinden, dass

Differentialoperatoren häufig / i.d.R

unstetig.

Ansätze:

* Gl mit Differentialop ~ DGl.

  $\rightsquigarrow$ Integralgleichung umformulieren

Diese sind häufig besser / regulärer.

Integration ist „invers zu" Differentiation

$$A x = y \quad \text{für} \quad A : X \to Y \text{ NRe}$$

$$\rightsquigarrow \quad x = A^{-1} y$$

einfacher zu analysieren, z. B. falls

A unendliche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & & 3 & \\ \vdots & & & 4 \\ \vdots & & & & 5 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$ unbeschränkt

$$\rightsquigarrow A^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1/2 & & & \\ \vdots & & 1/3 & & \\ \vdots & & & 1/4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$ beschränkt

Begründung für Untersuchung von Integr. Op.

besonders einfach, falls T^{-1} ex.

$$\rightsquigarrow \quad x = T^{-1} y$$

oder sogar stetig ist.

$$\rightsquigarrow \quad x_\Delta = T^{-1}(y + \Delta y)$$

$$= T^{-1} y + T(\Delta y) = x + T(\Delta y)$$

$$\leq \|T\| \, \|\Delta y\|$$

$$\leq \|T\| \cdot \varepsilon$$

Lsg stabil

3.1 Banachalgebren

D 3.1.1

Ein BR A über $\mathbb{K}$ heißt Banachalgebra BA (mit Eins), falls eine Multiplikation

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

$\mathbb{K}$-bil ex, die Assoziativ- und Distributiv-

* Baby-SBsp illustriert auch:
„Diagonaloperatoren" besonders einfach zu analysieren.

Diagonalisierung von Diff-Op

↙ ↘

Fourier-Analysis Spektraltheorem

↕

* Behandlung von unbeschränkten, abgeschlossenen Operatoren

§3 Invertierbarkeit von Operatoren

inkl. Neumannsche Reihe und Basics der Spektraltheorie

(eh fundamental für Frage nach)

Lösbarkeit von $Tx = y$

gesetzt,

$$(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y) \quad \text{für } x,y \in A, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

Submultiplikativität der Norm des BR

d.h. $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$

erfüllt und Einselement e,

$$ex = x = xe \quad \text{für } x \in A, \text{ mit } \|e\| = 1$$

besitzt.

B. 3.1.2

i) $f, g \in C_b(M) \Rightarrow f \cdot g \in C_b(M)$

kommutative BA mit $e \equiv 1 = \mathbb{1}_M$

ii) $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{n \times n}$

nicht-kom. BA mit $e = I = (\delta_{ij})$

allgem: X BR, $T, S \in L(X)$

$\Rightarrow T \circ S \in L(X)$

Welche Norm?

$\|\cdot\|_X$ induziert $|||T||| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|_X$

ist sub multiplikativ.

bei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$\|\ \|_{\ell^1} \rightsquigarrow \|A\|_{ss}$

$\|\ \|_{\ell^\infty} \rightsquigarrow \|A\|_{zs}$

sub multiplik. N.

nicht-sub multiplik. Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$

$\|A\| = \max |a_{ij}|$

denn für $A = (1)_{ij}$ ist $A^2 = (n)_{ij}$

aber $n \not\le 1 \cdot 1$

iii) K komp HR, $x, g \in C(K^2)$, μ W-Maß

$\Rightarrow x \circ g \in C(K^2)$ für auf K

$\|\cdot\|$ $(x \circ g)(t,s) = \int_K x(t,r)\, g(r,s)\, \mu(dr)$

$$\| x \cdot g \|_{C(K^2)} \leq \| x \| \cdot \| g \| \underbrace{\mu(k)}_{=1}$$

vgl. Markov-Prozesse in Stochastik

iv) K komp MR, $\mathcal{A}$ Banachalgebra

$\Rightarrow$ f, g $C(K, \mathcal{A})$ auch BA

$\Rightarrow$ $(f g)(t) = \underbrace{f(t)\, g(t)}_{\text{Verkn in } \mathcal{A}}$

$\uparrow$
k

v) $\mathcal{A}$ BA, $\mathcal{B}$ abgeschl. Unteralg.)

d.h. $\mathcal{B}$ abgesch. UVR von $\mathcal{A}$,

$\mathcal{B}$ Algebra (abges. unter Multipl.)

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ auch BA

Verallg. d. geometrischen Reihe:

S. 3.1.3

Sei $\mathcal{A}$ BA, $x \in \mathcal{A}$, $\| x \| < 1$. Dann:

- konv $\sum_k x^k$ absolut, $\alpha \leq$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^k = (e - x)^{-1}$$

- $e - x$ invertierbar

Bw: $\|\cdot\|$ submultiplikativ $\Rightarrow$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \|x^k\| \leq \sum \|x\|^k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \alpha^k$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha}$$

A BR insb. konvergieren abs. konv. Reihen

$\Rightarrow$ $s := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^k \in \mathcal{A}$ ex. &

$$(e - x)\, s = s\,(e - x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^k - \sum_{k \in \mathbb{N}} x^{k+1}$$

$$= x^0 = e \qquad \text{(vgl. Ana I)} \qquad \square$$

Bonus-Einsicht:

Für $P\Sigma$ $\quad s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$

gilt $s_0 = x^0 = e$

$s_1 = x^0 + x = e + xe = e + xs_0$

$\underline{s_{n+1} = e + x s_n}$

(Die) konvergenz $s_n \longrightarrow s$

(können wir) quantifizieren:

$$\|s - s_n\| \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\|x^k\|}_{\leq \|x\|^k} \right\| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

durch Reduktion auf geometrische R.

B/D. 3.1.4

Bw von 3.1.3 zeigt:

(*) $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \|x^k\| < \infty \Leftrightarrow \sum x^k$ abs. konv

$\Rightarrow \sum x^k$ konv. $=: s \in A$ ex.

(*) ist schon gewährleistet,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^k = (e - x)^{-1}$$

- $e - x$ invertierbar

Bw: $\|\cdot\|$ submultiplikativ $\Rightarrow$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \|x^k\| \leq \sum \|x\|^k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \alpha^k$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha}$$

A BR insb. konvergieren abs. konv. Reihen

$\Rightarrow$ $s := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^k \in \mathcal{A}$ ex. &

$$(e - x)\, s = s\,(e - x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^k - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^{k+1}$$

$$= x^0 = e \qquad \text{(vgl. Ana I)} \qquad \square$$

Bonus - Einsicht:

11-13 Für $P\sum$ $\quad s_m := \sum_{k=0}^{m} x^k$

gilt $s_0 = x^0 = e$

$s_1 = x^0 + x = e + xe = e + xs_0$

$\underline{s_{n+1} = e + x s_n}$

(Die) konvergenz $s_n \longrightarrow s$

(können wir) quantifizieren:

$$\|s - s_n\| \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\|x^k\|}_{\leq \|x\|^k} \right\| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

durch Reduktion auf geometrische R.

10. Mai / 11. Mai

B/D. 3.1.4

Bew vom 3.1.3 zeigt:

(*) $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \|x^k\| < \infty \Leftrightarrow \sum x^k$ abs. konv

$\Rightarrow \sum x^k$ konv. $=: s \in A$ ex.

(*) ist schon gewährleistet,

Falls

$$r(x) := \overline{\lim_k} \sqrt[k]{\|x^k\|} < 1$$

$$\leq (\|x\|^k)^{1/k}$$

nach Wurzelkriterium.

$r(x)$ verdient einen Namen und heißt

Spektralradius von X

Zusatzinfo:

$r(x) \in [0, \|x\|]$, denn ↑

$r(x) = \lim_k \sqrt[k]{\|x^k\|}$, auch wg.

Submultiplikativität. (übg.)

Fekete Lemma.

§ 3.2 Lösbarkeit von Integralgl.

B 3.2.1 Fredholmsche I. Gl.

Sei $k \subset \mathbb{R}^d$ komp., $\kappa \in C(k^2)$.

Zu $g \in C(k)$ fragen wir nach

der Lsg $f \in C(k)$ der F. Integral-

gl.

$$f(t) - \int_k \varkappa(t,s) f(s)\, ds = (I - S) f(t) = g(t) \qquad t \in k$$

Gilt:

$$\|S\|_{L(C(k))} = \|\varkappa\|_{ZI} = \sup_{t \in k} \int_k |\varkappa(t,s)|\, ds < 1$$

so konv. die Neumannsche Reihe $\sum S^k$

und $I - S$ ist invertierbar in der

BA $L(C(k))$.

$\Rightarrow$ $f = (I - S)^{-1} g$ ex & eind.

Analog:

Ist für ein $p \in [1, \infty]$

$$\|S\|_{L(L^p(k))} < 1, \qquad (xx)$$

so ex $\forall\, g \in L^p(k)$ genau ein $f \in L^p(k)$

mit $(I - S) f = g$.

Behauptet: $Sf \in C(k)$, $S: L^p(k) \to C(k)$

also: $g \in C(k) \Rightarrow f = g + Sf \in C(k)$

(xx) $\Rightarrow$ S bij aut $C(k)$

Nicht destotrotz sind Kleinheits-Bed. an $\|S\|_2$ einschränkungen für manche Anwendungen. Man kann sie teilweise umgehen, indem man die quantitative Bed $\|S\| < 1$ durch eine qualitative (kompakter Operator, Fredholm alternative) ersetzt.

B.3.2.2. Volterra-Op. bei Gl.

Sei $]=[0,a] \subset \mathbb{R}$ und

$K:]x[\to \mathbb{K}^{n \times m}$ stetiger,

Matrix-wertiger Integralkern.

Volterra-Op: $V: C(J, \mathbb{K}^M) \to C(J, \mathbb{K}^M)$

$$(Vf)(t) = \int_0^t \underbrace{k(t,s) f(s)}_{\text{Matrix-Vektor Mult.}} ds \quad , t \in J$$

Wg.

$$\|Vf(t)\|_{\mathbb{K}^M} \leq \underbrace{\|k\|_{sup}}_{\sup_{t,s \in J} \|k(t,s)\|_{\mathbb{K}^{M \times M}}} \|f\|_{sup} \cdot t$$

ist V beschr. also $\in L(C(J, \mathbb{K}^M))$

S. 3.2.3

a) Der Spektralradius $r(V)$ vom Volterra-Op. ist 0.

b) Die Volterra integralgl.

$$(I - V) f(t) = f(t) - \int_J k(t,s) f(s) ds = g(t)$$

besitzt für jedes $g \in C(J, \mathbb{K}^M)$ die eind.

Lsg. $f = (I - V)^{-1} g \in C(J, \mathbb{K}^n)$.

B.w. (a) Potenzen $\|V^k\|$ abschätzen

$$\|V^2 f(t)\| \leq \|x\|_{sup} \int_0^t \|Vf(s)\| ds$$

$$\int x(t,s) Vf(s)$$

$$\leq \|x\|_{sup}^2 \|f\|_{sup} \underbrace{\int_0^t s\, ds}_{= \frac{1}{2} s^2}$$

Induktion ergibt

$$\|V^k f(t)\| \leq \|x\| \int_0^t \|V^{k-1} f(s)\|$$

$$\leq \|x\|^{1 + k - 1} \|f\| \int_0^t \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \|x\|^k \frac{t^k}{k!} \|f\|$$

$(k^k)^{-1/k}$

$$\Rightarrow \|V^k\| \leq \frac{c^k}{k!} \qquad c := \|x\| \cdot a \quad s$$

$$\Rightarrow r(V) = \overline{\lim} \sqrt[k]{\|V^k\|} \leq c \overline{\lim} (k!)^{-1/k}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ (b) Es konv. Neumannsche R

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} V^k = (I - V)^{-1}$$

□

Fehlerabsch:

$$\| f - \sum_{0}^{m} V^k g \| \leq \sum_{k=m+1} \| V^k \| \, \| g \|$$

$$\leq \| g \| \sum_{\substack{k > m \\ k \geq 0}} \frac{c^k}{k!} \leq \| g \| \, e^c \, \underbrace{\frac{c^{m+1}}{(m+1)!}}$$

schnelle Konvergenz $\geq^m$

Bsp 3.2.4 Lin Syst von g.DGlen

$J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{K}^m$

$A: J \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times m}$ } stetig

$b: J \longrightarrow \mathbb{K}^m$ }

Ist

$\forall t \in J$: $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t)$ lösbar?

(AWP) $x(0) = \xi$

Integrieren ergibt:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,ds \qquad t \in J$$

$$(I\,gl) \quad = \quad \xi + \int_0^t \big(A(s)\,x(s) + b(s)\big)\,ds$$

Andererseits:

Einsetzen $t=0$ in $(I\,gl)$

Ableiten von $(I\,gl)$

$\Big\}$ ergibt (AWP)

Also:

(AWP) lösb. $\Leftrightarrow$ $(I\,gl)$ lösbar.

Definiere Integraloperator V

$$C(J, \mathbb{K}^M) \ni x \longmapsto \left(t \mapsto (Vx)(t) := \int_0^t A(s)\,x(s)\,ds\right)$$

$$\in C(J, \mathbb{K}^M)$$

und Fkt.

$$B \in C(J, \mathbb{K}^M), \quad B(t) = \xi + \int_0^t b(s)\,ds$$

Dann: ist $(I\,gl)$ umgestellt gerade

$$(I - V)\,x = B \qquad \text{im BR } C(J, \mathbb{K}^M)$$

Kor 3.2.5 (von 3.2.3)

Für jedes $A \in C(J, \mathbb{K}^{n\times n})$ und $\xi \in \mathbb{K}^n$

$b \in C(J, \mathbb{K}^n)$

besitzt das (AWP) genau eine Lsg.

$x \in C(J, \mathbb{K}^n)$.

Bw V ist Volterra-Op zu dem Integralkern $\mathcal{K}(t,s) = A(s)$ für $t,s \in J$.

A stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ stetig.

s. 3.2.3 $\Rightarrow$ $I - V$ invertierbar in

$L(C(J, \mathbb{K}^n))$

$\Rightarrow$ $x = (I-V)^{-1} B$ Lsg. des AWP $\square$

Spezialfall von Picard-Lindelöf für lineare DGl-Systeme.

§ 3.3 Elemente der Spektraltheorie

Verallgemeinerung von Eigenwerten λ : $Av = \lambda v$

$\rightsquigarrow$ $A - \lambda$ nicht invertierbar.

D. 3.3.1

Sei A BA. Die Menge

$$G = G(A) = GA = \{ x \in A \mid \exists\, y \in A : \underbrace{xy}_{=yx} = e \}$$

heißt Gruppe der invertierbaren Elemente von A.

L. 3.3.2

i) G ist eine Gruppe

ii) G ist offen in A

iii) $G \ni a \longmapsto a^{-1} \in G$ ist stetig,

damit auch Homöomorphismus

Bw: i) Übg.

ii) Sei $a \in G$ und $\varepsilon := \frac{1}{\|a^{-1}\|} > 0$

Bh: $B_\varepsilon(a) \subset G \subset A$ $[\Rightarrow$ G offen$]$

Bw: $x \Rightarrow \|x-a\| < \varepsilon$

$\Rightarrow x = a - (a-x) = \left(e - (a-x)a^{-1}\right)a$

und $\|(a-x)a^{-1}\| \leq \underbrace{\|x-a\|}_{<\varepsilon} \|a^{-1}\| < 1$

Neumannsche R. $\Rightarrow x = \left(e - (a-x)a^{-1}\right)a \in G$

$$x^{-1} - a^{-1} = a^{-1}\left(e - (a-x)a^{-1}\right)^{-1} - a^{-1}$$

$$= a^{-1}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left((a-x)a^{-1}\right)^k - \cancel{a^{-1}} \; \cancel{e}\right]$$

$$\Rightarrow \|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\|a-x\| \cdot \|a^{-1}\|\right)^k$$

$x \in B_{\varepsilon/2}(a)$

$$\leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \underbrace{\|a-x\|\,\|a^{-1}\|}_{<1/2}} \underbrace{\|a-x\|}_{<\delta}$$

$\Rightarrow \|x^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$ ins bes. Inversion stetig,

deren Umkehrabb. ist wieder Inversion.

12-11 □

D. 3.3.3 Sei A BA, $x \in A$.

i) $\varrho(x) := \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda e - x \in G(A) \}$

heißt Resolventenmenge von x.

$$R_x : \varrho(x) \to G(A), \quad \lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}$$

heißt Resolvente (nfunktion) von x

ii) $\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \varrho(x)$ heißt Spektrum von x.

Bm 3.3.4

G ist offen in $A \Rightarrow \varrho(x)$ offen in $\mathbb{K}$

$a \mapsto a^{-1}$ stetig in $A \Rightarrow R_x$ stetig in $\varrho(x)$

$\lambda, \mu \in \varrho(x) \Rightarrow$

$$\lambda e - x - (\mu e - x) = (\lambda - \mu) e$$

$$R_x(\mu) - R_x(\lambda) = (\lambda - \mu) R_x(\lambda) R_x(\mu)$$

heißt Resolventen gl.

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \mu} \frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = -R(\mu)^2$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $R_x : \varrho(x) \to G$ ist diffbar

ist holomorph

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

17 Mai 2023

$\rightarrow$ Funktionenth. anwendb.

Neumannsche R. "um ∞"

Für $|\lambda| > r(x)$ ist $r(\lambda^{-1} x) < 1$

also ex $\frac{1}{\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k = \lambda^{-1} \left[e - \frac{x}{\lambda}\right]^{-1}$

$= [\lambda e - x]^{-1} = R_x(\lambda)$

Also $\sigma(x) \subset \overline{B_{r(x)}(0)}$

ist beschränkt & abges.

$\Leftrightarrow$ kompakt

$\max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(x) \} \overset{=}{\leq} r(x)$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

und $\sigma(x) \neq \emptyset$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit Holomorphie.

Bm. 3.3.5 $A = L(X)$ ist BA. Sei $T \in L(X)$.

a)

$\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von $T :\Leftrightarrow \exists\ x \in X, x \neq 0$

mit $Tx = \lambda x$.

Insbes:

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \mathrm{Id} - T \notin G(L(X))$$
$$\Leftarrow \ker(\lambda \mathrm{Id} - T) \neq \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwert.}$$

b) Für $\dim X < \infty$ ist $\Leftarrow$.

„Für quadr. Matr: bij $\Leftrightarrow$ surj $\Leftrightarrow$ inj"

$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda$ Nullstelle des char. Polyn.

$$\chi_T(\mu) = \det(\mu \mathrm{Id} - T)$$

Existenz von EW $\Leftrightarrow$ Fundamentalsatz d. A.

c) Was ist für $\dim X = \infty$ anders?

Betrachte Volterra I O

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\,ds, \quad t \in [0,a]$$

für $f \in C[0,a]$.

Sind $Vf = Vg$ so auch

$$f = (Vf)' = (Vg)' = g$$

$\Rightarrow V$ injektiv

Offensichtlich ist $V: C[0,a] \hookrightarrow$ nicht surjektiv, da

$$V\left(C[0,a]\right) \subset C^1[0,a]$$

und $(Vf)(0) = 0$

Also: V nicht invert. $\Rightarrow 0 \in \sigma(V)$

aber λ kein Eigenwert von V.

Auch in diesem Spezialfall von S. 3.23 gilt

$0 = r(V)$ und $\overline{B_0(0)} > \sigma(V)$

Insgesamt: $\sigma(V) = \{0\}$.

Bsp 3.3.6.

Sei $a \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und

$M_a : \ell^p = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \hookrightarrow$, $p \in [1, \infty]$

$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots)$

stetiger linearer Multiplikations- oder Diagonaloperator (vgl. Blatt 5).

[Matrix ist Multiplikop. $\Leftrightarrow$ diagonal.]

Sei für $j \in \mathbb{N}$

$e_j = (0, \dots 0, \underset{\text{jte}}{1}, 0 \dots) \in \ell^p$

$\Rightarrow M_a e_j = a_j e_j \Rightarrow a_j$ Eigenw. von M_a

$\sigma(M_a)$ kompakt $\Rightarrow$ abges. $\Rightarrow \overline{\{a_j \mid j \in \mathbb{N}\}} \subseteq \sigma$

Gilt Gleichheit?

$\{a_j \mid j \in \mathbb{N}\} = \sigma_{pp} = \sigma_{pp}(M_a)$

Dazu sei $\lambda \in \underline{\mathbb{C} \setminus \sigma_{pp}}$ $\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit

offen

$B_\delta(\lambda) \cap \sigma_{pp} = \emptyset$

Also: $\forall j \in \mathbb{N}: \quad |\lambda - a_j| \geq \delta$

$$\ell^\infty \ni b_j := \frac{1}{\lambda - a_j} \leq \frac{1}{\delta}$$

$\Rightarrow M_b : \ell^p \circlearrowleft$ beschränkt

und $M_b (\lambda \cdot I - M_a) = I$ (RI)

$$b_j (\lambda - a_j) x_j = \frac{\lambda - a_j}{\lambda - a_j} x_j = x_j$$

Also | tatsächlich $\sigma(M_a) = \sigma_{pp}(M_a)$ |

(RI) $\Rightarrow R_{M_a}(\lambda) = M_b = M_{(\lambda - a)^{-1}}$

für $\lambda \in \varrho(M_a)$

und |

$\Rightarrow \|M_a\| \leq \|a\|_\infty = \sup_{\mu \in \sigma_{pp}} |\mu| = \sup_{\mu \in \sigma} |\mu|$

$\leq r(M) \leq \|M_a\|$ nach Df. 3.1.4 3.3.3

Insbesondere kann jede kompakte, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{C}$ als Spektum eines beschränkten linearen Operators auf ℓ^p realisiert werden

L. 3.3.7 Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $p \in [1, \infty]$. Dann ex $T \in L(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}))$ mit $\sigma(T) = K$

Bw $\mathbb{C}$ separabel

$\cup$

K ebenfalls, d.h.

$\exists$ Folge $a: \mathbb{N} \to K$ mit $\overline{\{a_j \mid j \in \mathbb{N}\}} = K$.

Setze $T = M_a$. Dann $\sigma(T) =$ —"— □

Bsp. 3.3.8 Shift-Operator

Links-

Sei $p \in [1, \infty]$ und $S_- : \ell^p(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \circlearrowleft$

$(x_0, x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_1, x_2 \ldots)$

„erster Eintrag wird gelöscht"

Offensichtlich $\|Sx\| \leq \|x\|$

und $\|S e_2\| = \|e_1\| = 1$, also $\|S\| = 1$

$\Rightarrow \quad \sigma(S_-) \subset \overline{B_1(0)} =: D \subset \mathbb{C}$

Für $\lambda \in \mathring{D}$ setze $x = x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in \ell^p$

$\Rightarrow \quad S_- x = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots) = \lambda (1, \lambda, \ldots)$

$\Rightarrow \quad \lambda$ Eigenw

$\Rightarrow \quad \mathring{D} \subset \sigma(S_-)$

$\Rightarrow D = \overline{\mathring{D}} \subset \overline{\sigma(S_-)}$

$=$

Für $|\lambda| = 1$ ist $x_\lambda \in \ell^\infty$ aber nicht

$\subset \ell^p, \; p < \infty$.

In ℓ^∞ gilt sogar $\lambda \in D \Rightarrow \lambda$ Eigenw. vom S_-

Übg: Was sind die analogen Eigs. vom Rechts-shift: $S_+ : \ell^p(\mathbb{N}_0) \hookrightarrow$

$(x_0, x_1, x_2, \dots) \longmapsto (0, x_0, x_1, \dots)$

Warum nicht $(1, x_0, x_1, \dots)$

oder Shift Operator

$S: \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

$(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$

$\longmapsto (\dots, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots)$

↑

0 te Koordinate

4 Prinzipien der Funktionalanalysis

§ 4.1 Satz von Baire

Q: Sei $C(\mathbb{R}) \ni f_n \xrightarrow[\text{pktw.}]{} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Gibt es einen Pkt, in dem f stetig ist?

Gibt es ein nirgends diffbares $g \in C[a,b]$?

Bsp. für konkrete positive Aussage:

S.v. Osgood 4.1.1

Sei $\mathcal{H} \subset C(\mathbb{R})$ pkt ws. beschränkt, d.h.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \quad \text{für} \quad A_n = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall f \in \mathcal{H} : |f(x)| \leq n \}$$

d.h. für jedes reelle x gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, dass alle Fkt im Punkt x beschränkt.

Dann ex $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $I \neq \emptyset$ sup $|f(x)| < \infty$ $x \in I, f \in \mathcal{H}$

Bw - Ansatz:

$$A_n = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \mid |f(x)| \leq n\}$$ ist abgeschlossen

abgeschlossen, da f stetig.

Bh (*): Für ein $n \in \mathbb{N}$ hat A_n nicht-leeres Inneres, symbolisch $\mathring{A}_n \neq \emptyset$. offen

Dann:

enthält offenes $\mathring{A}_n$ ein Intervall (a,b)

insbesondere

$$\forall f \in \mathcal{F},\ x \in (a,b): \quad |f(x)| \leq n$$ □

——— Einschub.

Einschub 13-10-a

Zweite Annäherung an das Problem, diesmal über offenen Mengen

S. 4.1.2 (Bairscher Kategoriensatz)

Sei (M,d) vollständiger MR, $O_n \subset M$ offen & dicht für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht im M.

Einschub.

Dfn 4.1.3 Sei M MR, $A \subset M$.

a) A heißt nirgends dicht $:\Leftrightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \emptyset$

„Abschluss hat keine inneren Punkte"

b) A heißt mager oder von erster (Baire) Kategorie $:\Leftrightarrow \exists$ nirgends dichte $A_n \subset M$

mit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

c) A ist von zweiter Kategorie $:\Leftrightarrow$

Alles eine Darstellung wie in b) nicht ex.

Bsp. 4.1.4

a) $A = \{x\}$ nirgends dicht in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ mager in $\mathbb{R}$, jede abz Teilm mager.

b) X NR $V \subset X$ UVR

$\exists x.\ a \in \mathring{V}$, dann ex $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon^X(a) \subset V$

Linearität $B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(a) - a \subset V$

Linearität: $B_{(k+1)\varepsilon}(0) = B_{k\varepsilon}(0) + B_\varepsilon(0) \subset V$

$\Rightarrow X \subset V \subset X$

Kontraposition:

echter UVR V enthält keinen inneren Pkt.

— " — $V = \overline{V} \subset X$ ist nirgends dicht in X

Sei $M = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ unendliche Menge lin. unabh. Vektoren in X, d.h. $M \subset X$ lin. unabh.,

und $V_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \overline{V_n} \subset X$

$\Rightarrow A = \bigcup_n V_n$ von erster Kategorie

S. 4.1.5 (Satz von Baire Komplementversion)

Sei M vollst. MR und $\emptyset \neq D \subset M$ offen.

Dann ist D von 2. Kategorie.

Mittwoch, 24. Mai 2023

Bw Wid-Ann: D mager, d.h. ex Darstellung $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $\overline{\overset{\circ}{A_n}} = \emptyset$

Es ex $a \in D$. D offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit

$K_\varepsilon(a) = \overline{B_\varepsilon(a)} \subset B_{2\varepsilon}(a) \subset D$

$\overline{\overset{\circ}{A_1}} = \emptyset \Rightarrow$ ex $a_1 \in B_\varepsilon(a) \setminus \overline{A_1}$

$\overline{\overset{\circ}{A_1}} = \emptyset$: nicht dicht im $B_\varepsilon(a)$

$B_\varepsilon(a) \setminus \overline{A_1}$: offen

$\Rightarrow$ ex. $\varepsilon_1 > 0$: $K_{\varepsilon_1}(a_1) \subset B_\varepsilon(a) \setminus \overline{A_1}$

$\subset B_\varepsilon(a)$

und $K_{\varepsilon_1}(a_1) \cap A_1 = \emptyset$

OE Verkleinern $\varepsilon_1 \leq \varepsilon/2$

$\overline{A_2} = \emptyset \Rightarrow$ ex. $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_{1/2})$ mit

$$K_{\varepsilon_2}(a_2) \subset B_{\varepsilon_1}(a_1)$$

$$K_{\varepsilon_2}(a_1) \cap A_2 = \emptyset$$

Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. $\varepsilon_n > 0$, $a_n \in M$

mit: $\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \leq 2^{-n}\varepsilon$

$$K_{\varepsilon_n}(a_n) \cap A_n = \emptyset$$

$$K_{\varepsilon_n}(a_n) \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(a_{n-1}) \quad (*)$$

insbes: $m > n$: $a_m \in K_{\varepsilon_m}(a_m) \subset B_{\varepsilon_n}(a_n)$

$$d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n+1}^{m} d(a_k, a_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{n+1}^{m} 2^{-k}$$

$$\leq \varepsilon\, 2^{-n+1}$$

$\Rightarrow$ Cauchyfolge im vollst MR

$\Rightarrow \exists \; b = \lim_n a_n \in M$

$(x) \Rightarrow d(b, a_n) = \lim_{m \to \infty} d(a_m, a_n)$

$\leq \varepsilon_n$

Also $b \in K_{\varepsilon_n}(a_n) \subset K_\varepsilon(a) \subset D$

$b \notin A_n \qquad b \in D$

$\Rightarrow b \in D \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ □

Geometrische Konstruktion schön

logische Vermeidungen evtl. verwirrend.

Komplemente bilden $\Rightarrow$ S. 4.1.2

BR X ist von 2. Kategorie

$\overset{4.1.4}{\Rightarrow}$ dim X endlich oder

überabzählbar.

Besässe X abz. vendl Basis $\mathcal{U}$ so:

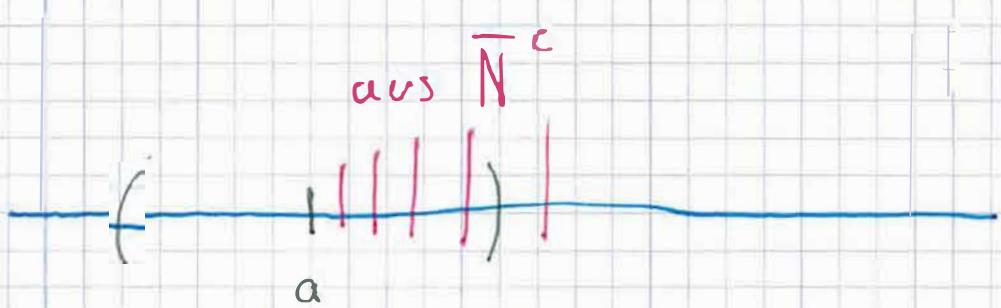
$X = \bigcup_n V_n = A$ von 1. Kategorie.

Überlegung / Bsp 4.1.6 M MR

a) $N \subset M$ nirgends dicht $\Leftrightarrow$ $\overline{N}$ nirgends dicht

$\Leftrightarrow$ N ist disj. zu einer offenen, dichten Teilmenge, nämlich $\overline{N}^c = M \setminus \overline{N}$

$\Leftrightarrow$ $\overline{N}$ hat keinen innenen Punkt. $\exists a$



$B_r(a) \subset \overline{N}$

b) $S = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ mager $\Leftrightarrow$ S disj zu abz $\cap$ off & dicht Mengen

nämlich $\bigcap_j \overline{N_j}^c$

Dabei folgt „dicht" aus Teil a)

c) Um formulierungen des S. v. Baire

Dabei immer M vollst. MR.

Wir beweisen Baire (i): $\emptyset \neq D \subset M$ offen
S. 4.1.5

$\Rightarrow D$ 2. kategorie

Kontraposition liefert

Baire (ii) $S \subset M$ mager $\Rightarrow S$ hat keinen inneren Pkt.

Komplementbildung liefert:

Baire (iii) S. 4.1.2

$O_n \subset M$ offen & dicht, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow N_n = O_n^c$ disj zu offenem & dicht O_n $\overset{a)}{\Rightarrow}$ also nirgends dicht

$\Rightarrow S = \bigcup_{\mathbb{N}} N_n$ mager $\overset{B(ii)}{\Rightarrow} S$ ohne innere Pkt.

$\Rightarrow \bigcap_{\mathbb{N}} O_n = \left[\bigcup O_n^c\right]^c = \left[\bigcup N_n\right]^c = S^c$

Bild oben ist dicht

BRUNNER

S. 4.1.5 (Satz von Baire komplementversion)

Sei M vollst. MR und $\emptyset \neq D \subset M$ offen.

Dann ist D von 2. Kategorie.

24. Mai

Bw Wid-Ann: D mager, d.h. ex Darstellung $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $\overline{\overset{\circ}{A}_n} = \emptyset$

Es ex $a \in D$. D offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit

$K_\varepsilon(a) = \overline{B_\varepsilon(a)} \subset B_{2\varepsilon}(a) \subset D$

$\overline{\overset{\circ}{A}_1} = \emptyset \Rightarrow$ ex $a_1 \in B_\varepsilon(a) \setminus \overline{A_1}$

$\overline{\overset{\circ}{A}_1} = \emptyset$: nicht dicht im $B_\varepsilon(a)$

$B_\varepsilon(a) \setminus \overline{A_1}$: offen

13-12

$\Rightarrow$ ex. $\varepsilon_1 > 0$: $K_{\varepsilon_1}(a_1) \subset B_\varepsilon(a) \setminus \overline{A_1}$

$\subset B_\varepsilon(a)$

und $K_{\varepsilon_1}(a_1) \cap A_1 = \emptyset$

OE Verkleinern $\varepsilon_1 \leq \varepsilon/2$

$\overline[o]{A_2} = \emptyset \Rightarrow$ ex. $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_{1/2})$ mit

$$K_{\varepsilon_2}(a_2) \subset B_{\varepsilon_1}(a_1)$$

$$K_{\varepsilon_2}(a_1) \cap A_2 = \emptyset$$

Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. $\varepsilon_n > 0$, $a_n \in M$

mit: $\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \leq 2^{-n}\varepsilon$

$$K_{\varepsilon_n}(a_n) \cap A_n = \emptyset$$

$$K_{\varepsilon_n}(a_n) \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(a_{n-1}) \quad (*)$$

insbes: $m > n$: $a_m \in K_{\varepsilon_m}(a_m) \subset B_{\varepsilon_n}(a_n)$

$$d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n+1}^{m} d(a_k, a_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{n+1}^{m} 2^{-k}$$

$$\leq \varepsilon\, 2^{-n+1}$$

$\Rightarrow$ Cauchyfolge im vollst MR

$\Rightarrow \exists \quad b = \lim_n a_n \in M$

$(x) \Rightarrow d(b, a_n) = \lim_{m \to \infty} d(a_m, a_n)$

$\leq \varepsilon_n$

Also $\underline{b \in K_{\varepsilon_n}(a_n) \subset K_\varepsilon(a) \subset D}$

$b \notin A_n \qquad b \in D$

$\Rightarrow \quad b \in D \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ ↯ □

Antwort auf eine Frage vom Kapitel-Anfang:

S. 4.1.6 Seien M, Y MR, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ M vollständig.

$C \subset C(M,Y)$ s.d.

$\forall x \in M \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert.

$\Rightarrow \{x \in M \mid f \text{ unstetig in } x\}$ mager in M.

Ich habe einen anderen Beweis geführt, siehe unten.

Bw: ? f_n stetig $\Rightarrow \forall\, m,j \in \mathbb{N}$ ist

$F_{m,j} := \{x \in M \mid d(f_n(x), f_m(x) \leq \frac{1}{j}$ für alle $n \geq m\}$

abgeschlossen entsp. abz Schnitt

$f_n \to f$ pkt w $\Rightarrow$

$M = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_{m,j}$ für jedes j

jeden $\varepsilon = \frac{1}{j}$ Fehler

$D_j := \bigcup_m F^\circ_{m,j}$ ist offen, also

$$D_j^c = M \setminus \bigcup_m \mathring{F}_{m,j} = \bigcup_m \left(F_{m,j} \setminus \mathring{F}_{m,j} \right)$$

abgeschlossen.

D_j^c mager.

Für den Rest des Beweises siehe Satz 8.3 in Kaballo, Grundkurs Funktionalanalysis.

Dfn 4.1.7 Seien M, N MR, $f: M \to N$.

$$osc_f(x) = \omega_f(x)$$

$$= \inf_{\delta > 0} \sup \{ d(f(y), f(z)) \mid y, z \in B_\delta(x_0) \}$$

$M = N = \mathbb{R}$ .... $|f(y) - f(z)| : y, z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

heißt Oscillation von f in x.

Übg: f stetig in $x \iff osc_f(x) = 0$

BRUNNEN

Bw: Um Notation zu vereinfachen nur für $M, Y = \mathbb{R}$, aber gültig i.a. Fall.

$\{x \in M \mid osc(x) = 0\}$ = Stetigkeitsstellen von f

$\{x \in M \mid osc(x) > 0\}$ = Um — " —

$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \mid osc(x) \geq \frac{1}{n}\}}_{F(1/n)}$ archimedisches Axiom

Um „mager" z.z. reicht es z.z. dass jedes $F(1/n)$ nirgends dicht, d.h. $\overline{K} = K$

zu jedem gegeb Ball $\emptyset \neq K \subset M$ ex kleinerer Ball $\emptyset \neq D \subset K$, der disjunkt zu $F(1/n) = F(4\varepsilon)$.

4ε

$$E_m = \bigcap_{i=m}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} \underbrace{\{x \in M : \overbrace{|f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon}^{\text{stetig}}\}}_{\text{abgeschlossen.}}$$

$f_n \to f$, insbes Cauchyf. ptw überall

$\Rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \cap K = X \cap K$ vollst MR

Baire

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \emptyset \neq \overline{E_N \cap K}^{\circ} =: A$ offen

$\cup$

$B = B_r(x_0)$

$\Rightarrow B \subset \overline{E_N \cap K} = E_N \cap K$ abges.

$\Rightarrow \forall x \in B \; \forall i \geq N: \lim_{i \to \infty} |f_i(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$

D (=) $f(x)$

$\Rightarrow \forall z, y \in B_{r_1}(x_0) \subset B$ verkleinern.

$|f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)|$

$\leq |\text{-"-}| + |\text{-"-}| + |\text{-"-}|$

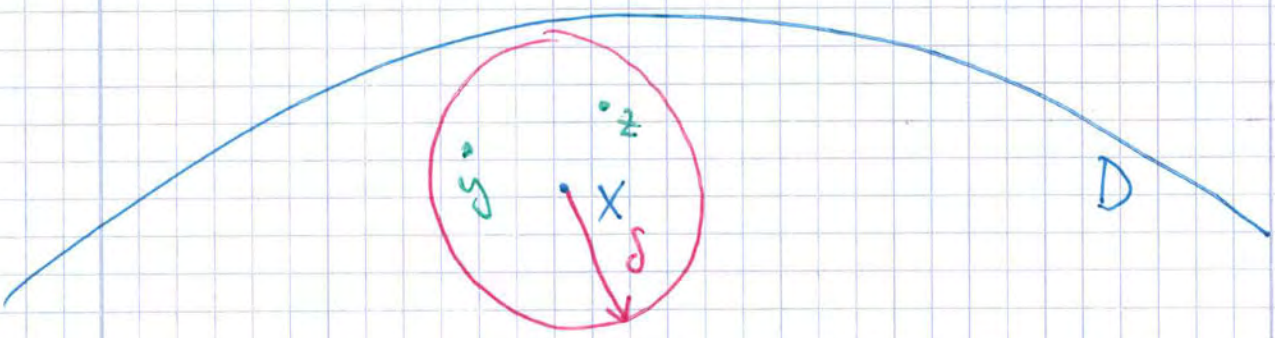
$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$

da f_N stetig

also $\operatorname{osc}(x_0) \leq 3\varepsilon$, ja sogar $\operatorname{osc}(x) \leq 3\varepsilon$ für alle $x \in D$

BRUNNEN

da D offen



Also $D \subset F(4\varepsilon)^c = F(1/n)^c$

wie gewünscht. □

4.1.8

Bsp: $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nicht mager in $\mathbb{R}$.

Fakt 1 abz $\cup$ von mageren Mengen ist wieder mager

Denn:

mager

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k = \bigcup_k \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_{j,k}$$

nirgends dicht

abz Index-M $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Fakt 2 M vollst $\mathbb{R}$, N mager in M

$\Rightarrow N^c$ ist nicht mager

denn

Wäre N^c mager, so $M = N \cup N^c$ abz Ver

magerer Mengen $\Rightarrow$ $\lightning$ zu Baire (i)

4.1.5

Fakt 3 $\mathbb{Q}$ ist mager $= \{q\}_{q \in \mathbb{Q}}$

in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist es nicht

---

Fakt 4 $S \subset M$, M vollst $\mathbb{R}$, S mager

$\Rightarrow$ S besteht nur aus Randpkt

denn: $S = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ mager

$\Rightarrow$ disjunkt zu abz $\cap$ dicht & off. M

$\bigcap_j \overline{N_j}^c$ ist $\neq$ dicht nach Baire (iii)

$\Rightarrow$ S hat keine inneren Pkt, nur Randp.

Nun kommt ein Fußgänger-Beweis, dass die Menge der irrationalen Zahlen nicht mager ist.

Diesen alternativen Beweis habe ich in der Vorlesung nicht gemacht.

Frage: Gilt

M mager im $\mathbb{R}$ X $\not\Leftrightarrow$ M enthält nur

$\Rightarrow$ Randpunkte.

Bsp: Beh 4.1.5. ½

$A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besteht nur aus Randpunkten ist aber nicht mager

Bw

Ist $a \in A$ und $\varepsilon > 0$ so enthält $B_\varepsilon(a)$ rationale Zahlen $\Rightarrow a \in \partial A$.

Um zu zeigen, dass A nicht mager ist nehmen wir an, dass eine Darstellung

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$$

existiert. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist

ex. Abzählung $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q}$

Setze $A_{-n} = \{q_n\}$. Dann ist

A_{-n} nirgends dicht

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{-n} = \mathbb{Q}$, also

$\mathbb{R} = A \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{-n}$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$

$\mathbb{R}$ vollst $\mathbb{R} \overset{\text{Baire}}{\Rightarrow}$ ein $\overline{A_n}$ (für $n\in\mathbb{Z}$) hat inneren Punkt. Dies trifft nicht für negative n zu. $\Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}_0$ mit $\overline{A_n}$ hat inneren Punkt

$\Rightarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ ist nicht mager.

Ende des ausführlichen, alternativen Beweises.

§ 4.2 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

S. 4.2.1

Seien X BR, Y NR, $\mathcal{H} \subset L(X,Y)$. Dann

$$\sup_{T \in \mathcal{H}} \|Tx\| < \infty \quad \text{für jedes } x \in X$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{T \in \mathcal{H}} \|T\| < \infty$$

pktw. Beschr $\Rightarrow$ glm Beschr.

Bw

$$A_n := \{ x \in X \mid \sup_{T \in \mathcal{H}} \|Tx\| \leq n \}$$

$$= \bigcap_{T \in \mathcal{H}} \{ x \mid \|Tx\| \leq n \}$$

abgeschl, da T stetig

unsere Annn „pktw Beschr" besagt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Bairscher Kategoriensatz: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

A_{M_0} hat inneren Punkt, d.h. $\exists \varepsilon > 0$

$y \in \overline{B_\varepsilon(y)} \in A_{M_0}$

d.h. $\|x - y\| \leq \varepsilon \Rightarrow x \in A_{M_0}$

zwei Eigens von A_M:

- Symmetrie: $z \in A_M \Leftrightarrow -z \in A_M$
  (wegen $\|Tz\| = \|T(-z)\|$)

- Konvexität: z_3
  $\|T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\| \leq \lambda_1 \|Tz_1\| + \lambda_2 \|Tz_2\|$
  $\leq (\lambda_1 + \lambda_2) M$ falls $z_1, z_2 \in A_M$.
  falls $= 1 \Rightarrow z_3 \in A_M$

Damit:

$\|u\| \leq \varepsilon \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left[\underbrace{(u-y)}_{\in A_{M_0}} + (u+y)\right] \in A_{M_0}$

D.h:

$\|u\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|Tu\| \leq M_0 \quad \forall T \in \mathcal{H}$

d.h. $\|u\| \leq 1 \Rightarrow \|Tu\| \leq \frac{M_0}{\varepsilon} \quad \forall T \in \mathcal{H}$

d.h. $\sup_{T \in \mathcal{H}} \|T\| \leq M_0/\varepsilon$ □

S. vom Banach - Steinhaus 4.2.2

Seien X BR, Y NR, $(T_n)_n \subset L(X,Y)$ mit

$\forall x \in X$ ex. $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ (x)

Dann:

$\{x \mid T$ unstetig in $x\}$ ist mager

$\Rightarrow T$ stetig in einem $x_0 \Rightarrow T$ stetig überall

$T \in L(X,Y)$

$\|T\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty$

Konvergenz (x) gilt glm. auf Präkompakta

Bw:

$\sup_n \|T_n x\| = C_x < \infty$

da $(T_n x)_n$ konvergent.

Banach-St $\Rightarrow$ $C := \sup_n |||T_n||| < \infty$

(x) $\Rightarrow$ $\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \leq C\|x\|$

Letzte Auss. folgt aus L. 1.3.9 □

k. 4.2.3 Seien X, Y BR, $(T_n)_n \subset L(X,Y)$

Dann äquivalent

(T_n) konv glm. auf Präkompakta $\subset X$

... ptw auf X

... ptw auf dichter Teilm $\subset X$

und $\sup_n \|T_n\| < \infty$

k. 4.2.5 Sei X BR und $M \subset X'$.

Dann äquivalent

- M ist beschränkt (bzgl $\|\cdot\|_{X'}$)
- $\forall x \in X$ ist $\{x'(x) \mid x' \in M\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$.

k 4.2.4 Sei X NR, $M \subset X$.

Dann äquivalent:

(i) M beschr.

(ii) $\forall x' \in X'$ ist $x'(M) \subset \mathbb{K}$ beschr.

Zum Bw brauchen wir Bidualraum.

Präsenz aufg. später.

4.3 Anwendungen im Funktionenräumen

S v. Korovkin 4.3.1

Seien $T_n \in L(C[0,1])$ positive Operatoren für $n \in \mathbb{N}$, $p_0, p_1, p_2 \in C[0,1]$, $p_k(t) = t^k$.

Gilt dann $\|T_n p_k - p_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für $k = 0,1,2$

so schon $\|T_n x - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für alle $x \in C[0,1]$.

D 4.3.0

Seien $N, M \neq \emptyset$, $T : \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(N, \mathbb{R})$.

T heißt positiv (er Operator), falls

$Tf \in \mathcal{F}(N, [0,\infty))$ für jedes $f \in \mathcal{F}(M, [0,\infty))$

" nicht-negative Fkt werden auf

— " — abgebildet. "

$f \geq g \Rightarrow T(f-g) \geq 0$

Bw: $x \in C[0,1] \Rightarrow$ glm st.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit $|s-t| \leq \sqrt{\delta} \Rightarrow |x(s)-x(t)| \leq \varepsilon$

Für $\alpha = \frac{2\|x\|_\infty}{\delta}$ gilt dann mit Fallunt.

(x) $|x(s)-x(t)| \leq \varepsilon + \alpha \underbrace{(t-s)^2}_{= y_t(s)} \quad \forall s,t \in [0,1]$

$\Updownarrow$

(xx) $-\varepsilon p_0 + \alpha y_t(s) \leq x(s) - x(t) p_0 \leq \varepsilon p_0 + \alpha y_t(s)$

für alle $t \in [0,1]$

T_M positiv $\Rightarrow$

$$-\varepsilon T_M p_0 - \alpha T_M y_t \leq T_M x - x(t) T_M p_0 \leq \varepsilon T_M p_0 + \alpha T_M y_t$$

D.h. $\forall t \in [0,1]$:

$$|T_M x - x(t) T_M p_0| \leq \varepsilon T_M p_0 + \alpha T_M y_t$$

als Umgl. zw. Fkt auf $[0,1]$,
insb. nach Auswertung im $s=t$:

$$|(T_M x)(t) - x(t)(T_M p_0)(t)|$$

$$\leq \varepsilon (T_M p_0)(t) + \alpha (T_M y_t)(t) \qquad \forall t \in [0,1]$$

$$\longrightarrow \varepsilon p_0(t) + \alpha y_t(t) = \varepsilon \quad \text{-II-}$$

wg $y_t \in \operatorname{span}\{p_0, p_1, p_2\}$

Konvergenz ist sogar glm im Parameter $t \in [0,1]$ da

$$T_M y_t - y_t = \underbrace{(T_M p_2 - p_2)}_{\to 0 \text{ glm}} - 2t(T_M p_1 - p_1) + t^2 \underbrace{(T_M p_0 - p_0)}_{\to 0 \text{ glm}}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_M} \| T_M x - x(T_M p_0) + x(T_M p_0) - x p_0 \|_\infty$$

$$\leq \overline{\lim_M} \| T_M x - x(T_M p_0) \| + \overline{\lim_M} \|x\|_\infty \| T_M p_0 - p_0 \|_\infty$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \|x\|_\infty \frac{\varepsilon}{\|x\|_\infty} \quad \square$$

Der A-Satz v. Weierstraß folgt, indem man $T_n x$ als n-tes Bernstein polynom von x definiert. Dieser Operator ist positiv, da Koeffizienten des Polynoms aus Funktionswerten von x gebildet werden.

$$C_{2\pi} := \{ x \in C[-\pi, \pi] : x(-\pi) = x(\pi) \}$$

$$\cong \{ x \in C_b(\mathbb{R}) : x \text{ ist } 2\pi \text{ periodisch.} \}$$

ist BR bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

S.v. Korovkin 4.3.2

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n \in L(C_{2\pi})$ positiv. Setze $p_0 \equiv 1$, $p_1 = \cos$, $p_2 = \sin$. Dann

$$\lim_n T_n p_j = p_j, \; j = 1,2,3 \Rightarrow T_n x \to x \quad \forall x \in C_{2\pi}$$

§ 4.4 Satz von der offenen Abbildung

$f: M \to N$ offen $:\Longleftrightarrow [O \subset M \text{ off} \Rightarrow f(O) \text{ offen}]$

$\mathbb{R}$

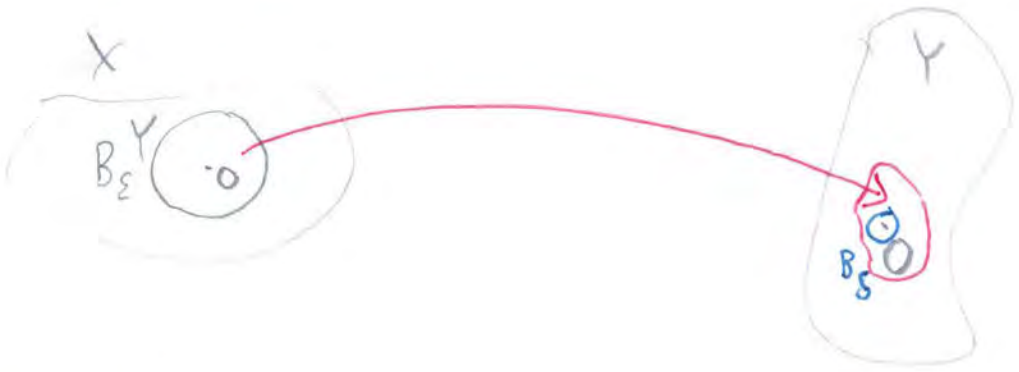
L. 4.4.1 X, Y $\mathbb{R}$, $T: X \to Y$ linear

Dann äquiv:

(i) T offen

(ii) $\forall r > 0 \quad \exists \delta > 0$ mit

$$B^Y_\varepsilon(0) \subset T\left(B^X_r(0)\right)$$



(iii) $\exists \delta > 0$ mit $B^Y_\delta(0) \subset T\left(B^X_1(0)\right)$

Bw: Linearität (nach 0 translatieren)

& Homogenität (Radius skalieren)

S. 4.4.2 Vom der offenen Abbildung

Seien X, Y BR und $T \in L(X, Y)$ surj.

Dann ist T offen.

Ende der Vorlesung am Donnerstag, 25. Mai 2023

S. 4.4.2 von der offenen Abbildung

Seien X, Y BR und $T \in L(X,Y)$ surj.

Dann ist T offen.

25. Mai — 31. Mai 2023

Bw. Wir zeigen Charakt. (iii) aus letztem Lemma. Setze $U_r = B_r^X(0)$.

(1) Bh: $\exists\, \delta > 0$ mit $B_\delta^Y(0) \subset \overline{T(U_1)}$

Bw: T surjektiv:

$$Y = T(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(U_n)$$

Y vollst $\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit

$$\emptyset \neq \overline{T(U_N)}^{\circ} \ni y_0 \quad \text{sogar } \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(y_0) \subset \overline{T(U_N)}^{\circ}$$

d.h. $\|z - y_0\| < \varepsilon \Rightarrow z \in \overline{T(U_N)}^{\circ}$

U_N symmetrisch & T linear $\Rightarrow T(U_N)$ sym.

$\Rightarrow \overline{T(U_N)}$ symm. $\Rightarrow -z \in \overline{T(U_N)}$

Für $\|y\| < \varepsilon$ setze $z = y + y_0$

$\Rightarrow \|(y_0+y) - y_0\| < \varepsilon \Rightarrow y_0 + y \in \overline{T(U_N)}$

analog $-y_0 + y \in \overline{T(U_N)}$

U_N konvex $\Rightarrow T(U_N)$ konvex

$\Rightarrow \overline{T(U_N)}$ konv

$\Rightarrow y = \frac{y_0+y}{2} + \frac{-y_0+y}{2} \in \overline{T(U_N)}$

Insges $B_\varepsilon^Y(0) \subset \overline{T(U_N)}$

Skalieren: $B_{\varepsilon/N}^Y(0) \subset \overline{T(U_1)}$, $\delta = \varepsilon/N$

(2) Bh: Mit $\delta = \varepsilon/N$ wie eben gilt sogar

$$B_\delta^Y(0) \subset T(U_1)$$

Bw: Sei $\|y\| < \delta$ und $\varepsilon > 0$ s.d.

$$\|y\| < \varepsilon < \delta$$

Setze $\bar{y} := \frac{\delta}{\varepsilon} y$ (vergrößert)

aber immer noch $\|\bar{y}\| = \frac{\delta}{\varepsilon} \|y\| < \delta$

Nach (1) ist $\bar{y} \in \overline{T(U_1)}$. Approximation

Damit ex $y_0 = T x_0 \in T(U_1)$

$$\|\bar{y} - y_0\| < \tilde{\varepsilon} = \alpha\delta \quad (x)$$

klein.

Dabei wählen wir $\alpha \in (0,1)$ so klein, d.

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \quad \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}}_{>1 \text{ aber} \approx 1} < 1$$

$$(x) \Rightarrow \left\| \frac{\bar{y} - y_0}{\alpha} \right\| < \delta$$

$$\in B_\delta^Y(0) \subset \overline{T(U_1)} \text{ nach (1)}$$

Approx: $\exists \quad y_1 = T x_1 \in T(U_1)$ mit

$$\left\| \frac{\bar{y} - y_0}{\alpha} - y_1 \right\| < \alpha \cdot \delta$$

skalieren $\quad \| \bar{y} - y_0 - \alpha y_1 \| < \alpha^2 \delta$

$$\left\| \frac{1}{\alpha^2} \left(y - (y_0 + \alpha y_1) \right) \right\| < \delta$$

Iterativ:

Zu $\frac{1}{\alpha^2}\left(\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1)\right)$ finde $y_2 = T x_2 \in T(U_1)$

mit $\quad \| \bar{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2) \| < \alpha^3 \delta$

und induktiv: Folge $x_n \in U_1$

mit $\lim_{n \to \infty} \left\| \bar{y} - T\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha^j x_j \right) \right\| < \alpha^{n+1} \delta \to 0$ $\quad n \to \infty$

abs. konv. wg. $\alpha < 1, |x_j| < 1$

X vollst $\Rightarrow \quad \bar{x} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j x_j \in X$

$$\overline{y} = T\,\overline{x}$$

Reskalieren $x := \frac{\varepsilon}{\delta}\,\overline{x}$

$$\Rightarrow Tx = \frac{\varepsilon}{\delta}\,T\,\overline{x} = \frac{\varepsilon}{\delta}\,\overline{y} = y$$

Num:

$$\|x\| = \frac{\varepsilon}{\delta}\,\|\overline{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \alpha^j \underbrace{\|x_j\|}_{\leq 1} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{1}{1-\alpha} < 1$$

nach Wahl von α.

$$\Rightarrow y = Tx \in T(U_1) \qquad \square$$

Schon erwähnt haben wir folgendes

k. 4.4.3 Seien X, Y BR, $T \in L(X,Y)$ bij.

$$\Rightarrow T^{-1} \text{ (ist stetig)} \in L(X,Y)$$

Bw: T bij $\Rightarrow T^{-1}$ exist. & linear

T offen $\Rightarrow T^{-1}$ stetig $\square$

k. 4.4.4 Sei X VR mit Normen $\|\cdot\|$ & $|||\cdot|||$, s.d $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, |||\cdot|||)$ BR. Ex $M \in \mathbb{R}$ mit $\|x\| \leq M\,|||x|||$ für $x \in X$, so sind die Normen äquivalent.

Bw. Nach Ann ist

$$T = Id : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$$

stetig, sowieso lin & bij.

k. 4.4.3. $\Longrightarrow$ T^{-1} ist stetig $\square$

k. 4.4.5 Seien X, Y BR, $T \in L(X, Y)$ inj.

Dann:

$T^{-1} : \mathrm{Ran}(T) \to X$ stetig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ran}\,T$ abgs. in Y

Bw.: „$\Rightarrow$“

„$Z := \mathrm{Ran}\,T$ abg $\Rightarrow$ Z BR

$\Rightarrow$ $T : X \to Z$ bij. $\overset{4.4.3}{\Longrightarrow}$ $T^{-1} : Z \to X$ stet.

„⇒" T^{-1} stetig ⇒ T Isomorphie zw X und Z. Mit X ist dann auch Z vollständig und damit abgs. in Y. □

§ 4.5. Satz vom abgeschlossenen Graphen

ist auch ein Kor. des S.v. der offenen Abb., erschliesst aber neues Themengebiet & verdient abschnitt.

Haben gesehen, das (lin.) Differentialoperatoren i. d. R. nicht stetig sind. Wir isolieren eine Eigens. die als „teilweiser Ersatz" für Stetigkeit dienen kann, und von allen stetigen und vielen Differentialoperatoren erfüllt wird.

D. 4.5.1 Seien X, Y NR, $D \subset X$ UVR

$T: D \to Y$ linear

i) $G(T) = \{ (x, Tx) \mid x \in D \} \subset X \times Y$

heißt Graph von T.

ii) T heißt (graphen) abgeschlossen, falls

$$\left.\begin{array}{l} \text{Folge } (x_n) \subset D \text{ konv. gegen } x \in X \\ \text{und } (Tx_n) \subset Y \text{ konv. gegen } y \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow x \in D,\ Tx = y$$

iii) Ist T auf $D \subset X$ definiert, so schreiben wir $D = \operatorname{dom} T$ bzw

$$T: \quad X \supset D \longrightarrow Y.$$

Bm im Speziall all $\operatorname{dom} T = X$ ergibt sich:

T ist stetig, falls „a) $\Rightarrow$ b) & c)"

abgeschl., „a) & b) $\Rightarrow$ c)"

wobei (a) $x_n \to x$

(b) (Tx_n) konvergiert, etwa $Tx_n \to y$

(c) $Tx = y$

L. 4.5.2 Seien X, Y, D, T wie in 4.5.1.

i) $G(T)$ ist UVR von $X \times Y$ Übg.

ii) T ist abgeschl. (Operator)

$\Leftrightarrow$ $G(T)$ ist abg. UVR in $X \oplus Y$

= Produktraum $X \times Y$ mit Norm

$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Bw

$G(T)$ abgeschl. $\Leftrightarrow$

$(x_n, Tx_n) \to (x,y)$ impliz. $(x,y) \in G(T)$

Der Graph ist eine abgs. Menge

$\Leftrightarrow$

$x_n \to x$, $Tx_n \to y$ impliziert $x \in D$, $Tx = y$

$\Leftrightarrow$ T ist abges. Oper $\square$

D 4. 5. 3 Sei $J \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: J \to \mathbb{K}$.

f absolutstetig $:\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ s.d. für alle $n \in \mathbb{N}$, alle

$a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n$ in J

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \text{ schon } \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

impliziert.

S. 4. 5. 4 (HDI für absolutst. Fkt)

i) Für $f: J \to \mathbb{K}$ abs-st. ex f' f.ü., f' ist intbar über kompakte Intervalle $[s,t] \subset J$

mit $f(t) - f(s) = \int_s^t f' \, \lambda(dx)$ $f' \in L^1[s,t]$

ii) Ist $g: J \to \mathbb{K}$ intb. über jedem komp. Int. $c J$, $a \in J$ bel. fix $f(t) := \int_a^t g \, \lambda(dx)$, so ist

f abs. st, f' existiert f.ü. und $f' = g$ f.ü.

Bsp. 4.5.5 (Differentialoperatoren)

Sei für $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $Tf = f' = \dot{f}$ geeignet.

(a) Sei $X = Y = C[-1,1]$

$D = C^1[-1,1]$

$T : D \subset X \to Y$, $Tx = x'$

Dann ist T abgeschlossen, denn

$x_n \to x$ glm, x diffb.

$\Rightarrow$

$x'_x \to y$ glm, $x' = y$

"Vertauschung von Abl. und glm konv."

(b) $X = Y = L^2[-1,1]$

$T : D = C^1[-1,1] \supset X \longrightarrow Y$, $Tx = x'$

$\Rightarrow T$ ist nicht abgeschlossen wegen (Bsp.)

$x_n(t) = \sqrt{t^2 + 1/n} \longrightarrow x(t) = |t|$ glm

also auch in L^2

$\|x\|_{L^2(-1,1]} \leq \sqrt{2}\ \|x\|_\infty$

$$T x_n(t) = \frac{1}{2}\,\frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1/n}} \longrightarrow \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

pktw

stetig nicht glm unstetig

Offensichtlich ist $x \notin C^1[-1,1] = D$.

Der Defm. Ber $D = \operatorname{dom}(T)$ passt nicht zum Bildraum Y

31. Mai 2023

1. Juni

(c) Sei nun

$T : L^2[-1,1] = X \supset D_0 \longrightarrow Y = X,\ Tx = x'$

mit $D_0 = \{ x \in X \mid \underline{x \text{ ist abs.st.}} \ \&\ x' \in X \}$

$\Rightarrow x' \in L^1[-1,1]$

Bh: T ist abgeschl. : $D_0 \to L^2$

Bw: Seien $x_n \in D_0$, $x, y \in L^2$ mit

$x_n \to x$, $Tx_n \to y$ in L^2

Nach S. 4.5.4:

$x_n \in D_0 \Rightarrow \forall\, t \in [-1,1]: x_n(t) = x_n(-1) + \int_{-1}^{t} x_n'(s)\,ds$

Vgl. mit Stammf. von y:

Für alle $t \in [-1,1]$ gilt:

$$\left| \int_{-1}^{t} x_n' \, ds - \int_{-1}^{t} y \, ds \right| \leq \int_{-1}^{t} |x_n' - y|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |x_n' - y| \cdot 1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left[\int_{-1}^{1} |x_n' - y|^2 \right]^{1/2} \underbrace{\left[\int_{-1}^{1} 1^2 \right]^{1/2}}_{= \sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}\, \| T x_n - y \|_{L^2} \longrightarrow 0$$

nach Ann.

Demnach

$$\sup_{|t| \leq 1} \left| \int_{-1}^{t} x_n'(s) - \int_{-1}^{t} y(s) \right| \xrightarrow[n]{} 0$$

Jetzt fehlt noch die konv. der Integr.

Konstanten, die versch. Stammf. unterscheiden

übg: $(x_n(-1))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyf. in $\mathbb{R}$

Damit ex: $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n(-1)$

Setze: $z(t) = \alpha + \int_{-1}^{t} y(s)\,dx$

„richtige Stammfkt identifiziert"

S. 4.5.4 $\Rightarrow$ z ist abs. stet.

$z'(t) = y(t)$ f.ü.

mit anderen Worten

$$\left[\begin{array}{l} z \in D_0 \\ Tz = y \end{array} \right. \qquad (x) \qquad \left. \right]$$

Bereits gezeigt:

$$\|x_n - z\|_\infty \leq |x_n(-1) - z(-1)| + \sup_{|t| \leq 1} \left| \int^t x_n' - \int^t y \right| \longrightarrow 0$$

insbes $\|x_n - z\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\, \|x_n - z\|_\infty \to 0$

aber auch

$x_n \to x$ in L^2 nach Ann

$\Rightarrow \quad x = z$ in L^2

Zusammen mit (x) $\Rightarrow$ T abgeschl.

L. 4.5.6

Seien X, Y BR, $D \subset X$ UVR,

$T : X \supset D \to Y$ abgeschl.

(a) D ist ein BR unter der

Norm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$

„Graphennorm von T"

(b) $T : (D, \|\cdot\|_T) \longrightarrow Y$ ist stetig

D. h. Abgeschlossen- und Stetigkeit hängen (sehr) vom gewählt. Def.-Bereich und der -"- Norm darauf ab.

(a) Sei $(x_n) \subset D$ Cauchyf bzgl $\|\cdot\|_T$

$\Rightarrow$ (x_n) Cauchyf. bzgl $\|\cdot\|_X$, (Tx_n) bzgl $\|\cdot\|_Y$

X & Y BR $\Rightarrow$ $x = \lim x_n$, $y = \lim Tx_n$ ex.

T abgeschl $\Rightarrow$ $x \in D$, $Tx = y$

$$\Rightarrow \|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - \underbrace{Tx}_{=y}\|_Y$$

$$\longrightarrow 0 \qquad \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ (x_n) konv. bzgl. $\|\cdot\|_T$ zu $x \in D$

(b) T ist sogar 1-Lipschitz:

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|x\|_T. \quad \square$$

Im S. v. d. offenen Abb kann man „stetig (geeignet)" durch abgeschl. ersetz.

<u>S. 4.5.7</u> Seien X, Y BR, $D \subset X$ UVR,

$T: X \supset D \to Y$ abgeschl & surjektiv.

$\Rightarrow$ T ist offen.

Ist T zusätzlich injektiv, so ex T^{-1} und ist stetig.

Bw: L. 4.5.6 $\Rightarrow$ $T: (D, \|\cdot\|_T) \longrightarrow Y$ stet.

S. 4.4.2 $\Rightarrow$ -"- offen

L. 4.4.1:

$$\exists\, \delta > 0 \quad B_\delta^Y(0) \subset T\left(B_1^{\|\cdot\|_T}(0)\right) \subset T\left(B_1^{\|\cdot\|}(0)\right)$$

($D \cup \|\cdot\|_T$, $D \cup \|\cdot\|$)

$\Gamma \|x\| \le \|x\|_T \iff B_1^{\|\cdot\|_T} \subset B_1^{\|\cdot\|}$ $\lrcorner$

Also auch $T: (D, \|\cdot\|) \longrightarrow Y$ offen

Γ Falls T^{-1} existiert ist es stetig $\lrcorner$ □

S. v abgeschlossenen Graphen 4.5.8

Seien X, Y BR, $T: X \to Y$ linear, abges.

$\Rightarrow T \in L(X, Y)$.

Bw: Verw. L 4.5.6 (a) mit $D = X$.

$(X, \|\cdot\|_T)$ ist BR
$(X, \|\cdot\|)$ auch
$\|x\| \leq \|x\|_T$

} k. 4.4.4 ⊗ ⇒ Normen äquivalent

(b) $T: (X, \|\cdot\|_T) \longrightarrow Y$ stetig.

$\uparrow$ Id stetig ⊗

$(X, \|\cdot\|)$

⇒ ursprüngliches T stetig □

Bm. 4.5.9 Summierbarkeitsmethoden

Kann man mithels eines lin. Op. die Konvergenz von Folgen beschleunigen bzw. verallgemeinern? Betrachte unendl. Matrix $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ als lin. Op.

$A: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$(s_i)_i \longrightarrow (\sigma_i)$

mittels

$$\sigma_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} s_j \qquad (\Sigma)$$

z. B. $= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} s_j$ für

für $a_{ij} = \frac{1}{i} \mathbb{1}\{j \leq i\}$

Folge der arith. Mittel $\rightsquigarrow$ Cesaro-Methode

z. B.:

$s = (1, -1, 1, -1, \ldots) \mapsto \sigma = (As) = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

S. v. Toeplitz 4.5.10

Sei $A := (a_{ij})_{i,j} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ wie oben.

Dann äquivalent

(i) Für (s_n) konv. Folge mit Limes s_0

ist $\sigma = As$ — 11 ———————

(iii) A erfüllt die drei Bed:

(a) $\lim_{i \to \infty} a_{ij} = 0 \quad \forall j$

(b) $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$

(c) $\lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 1$ damit Limes gleich.

D. 4.5.11

Sei $\|\cdot\|$ von einem Skalar prod auf VR X induzierte Norm. Ist $(X, \|\cdot\|)$ vollst., so heißt es Hilbertraum.

S. v. Hellinger - Toeplitz 4.5.12

Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear mit $\forall x, y \in \mathcal{H}: \langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$ (sy)

Γ in diesem Fall ist T symmetrisch $\perp$

Dann ist T stetig.

Bw. Das Skalar prod. (übg.)

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ ist stetig.

Zeigen, dass T abgeschl.

Sei $(x_n, Tx_n) \in G(T)$ mit

$(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

dann für $z \in \mathcal{H}$:

$$\langle z, Tx \rangle = \langle Tz, x \rangle = \lim_n \langle Tz, x_n \rangle$$

$$= \lim_n \langle z, Tx_n \rangle = \langle z, y \rangle$$

(Setze $z = Tx - y$ ein:)

$$0 = \langle z, Tx - y \rangle = \| Tx - y \|^2$$

$\Rightarrow \quad y = Tx \quad \Rightarrow \quad G$ abges.

S.v. abg. Graph. $\Rightarrow$ T stetig $\square$.

5. S. v. Hahn - Banach & Implikationen

§ 5.1 Forts. von Funktionalen

Q: X NR. Enthält $L(X, \mathbb{K})$ nur 0?
$= X'$

Werden etwas allg. Aussagen mit .. formulieren.

D. 5.1.1 Sei X ein $\mathbb{K}$-VR und $p: X \to \mathbb{R}$. p heißt sublinear, falls

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{für } \lambda \geq 0,\ x \in X$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

Bsp. 5.1.2 für sublineare Abb.

Normen, Halbnormen

lin Abb. $\ell: X \to \mathbb{R}$, falls X $\mathbb{R}$-VR.

Minkowski funktionale

$\ell: \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(t_n)_n \mapsto \overline{\lim_n}\, t_n$

$$\tilde{\lim} : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (z_n) \longmapsto \overline{\lim_n} |z_n|$$

Zornsches Lemma / Axiom

$\Leftrightarrow$ Auswahlaxiom

Sei $A \neq \emptyset$ Menge, $\leq$ eine partielle Ordnung auf A, d.h. reflexiv, transitiv, antisymmetrisch.

$K \subset A$ heißt <u>Kette</u>, falls für jedes Paar $a, b \in K$ gilt: $a \leq b$ oder $b \leq a$

Ein $a \in A$ heißt <u>obere Schranke</u> von $B \subset A$, falls $b \leq a$ für alle $b \in B$.

Ein $a \in A$ heißt <u>maximales Element</u> falls für jedes $y \in A$ gilt

$$a \leq y \Rightarrow a = y$$

17-11 „a kann nicht über troffen werden"

Achtung: Es mag $y \in A$ geben, die nicht vergleichbar mit. maximalem El a.

Zorn besagt:
Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete nicht-leere Menge in der jede kette eine obere Schranke besitzt. Dann hat A mind. ein maximales Element.

Die üblichen Zermelo - Fraenkel Axiome (über Unendlichkeiten und Mengen) sind konsistent mit ZL, aber auch mit der Negation davon. Sie implizieren keines von Beiden.

Zorn $\Leftarrow$ Auswahlaxiom

$\Rightarrow$
ZF

Achtung: Es mag $y \in A$ geben, die nicht vergleichbar mit maximalem El a.

Zorn besagt:
Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete nicht-leere Menge in der jede kette eine obere Schranke besitzt. Dann hat A mind. ein maximales Element.

Die üblichen Zermelo-Fraenkel Axiome (über Unendlichkeiten und Mengen) sind konsistent mit ZL, aber auch mit der Negation davon. Sie implizieren keines von Beiden.

Zorn $\Leftarrow$ Auswahlaxiom

$\Rightarrow$
ZF

Anwendung vom Zorn:

„über abzählbare Induktion"

An manchen Stellen kann man zusätzlich Separabilität anwenden und damit Zorn durch Induktion bzw. Diagonalisierungstrick ersetzen.

S v. Hahn - Banach 5.1.3

Sei X $\mathbb{R}$-VR, $U \subset X$ UVR, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear, $l: U \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\forall x \in U: \quad l(x) \leq p(x)$$

Dann ex. lineares $L: X \to \mathbb{R}$ mit

$$L|_U = l \quad \text{und} \quad \forall x \in X: l(x) \leq p(x).$$

Bw: (1) Die Aussage gilt falls

$$\dim X/U = 1$$

d.h. müssen l nur in eine Richtung fortsetzen.

Sei also $x_0 \in X \setminus U$ bel

$\Rightarrow \forall x \in X \; \exists!$ Zerlegung $x = u + \lambda x_0$ (0)

$u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Für Parameter $r \in \mathbb{R}$ setze

$$L_r(x) = l(u) + \lambda r$$

Dann ist $L_r : X \longrightarrow \mathbb{R}$ linear und

für $x \in U$: $L_r(x) = l(x) + 0$ ✓

Zu gewährleisten ist $L_r(x) \leq p(x)$ (1)

durch geeign. Wahl von r. Dies werden wir nun durch eine Reihe von (äquival.) Umformungen tun.

(1) $\Leftrightarrow \forall u \in U, \lambda \in \mathbb{R}: l(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda x_0)$ (2)

„(0) einsetzen"

(2) ist erfüllt, falls $\lambda = 0$ und $u \in U$ bel., nach Voraussetzung. Für $\lambda > 0$:

$$(2) \overset{\lambda>0}{\iff} \quad \lambda r \le p(u + \lambda x_0) - \ell(u) \text{ für } u \in U$$

$$\iff \quad r \le p\Big(\underbrace{u/\lambda}_{=v} + x_0\Big) - \ell\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \quad \text{-''-}$$

$$\iff \quad r \le \inf_{v \in U} \big[p(v + x_0) - \ell(v) \big]$$

Analog:

$$(2) \overset{\lambda<0}{\iff} \quad \lambda r \le p(u + \lambda x_0) - \ell(u) \text{ für } u \in U$$

$$\iff \quad -r \le p(-u/\lambda - x_0) - \ell\Big(\underbrace{-u/\lambda}_{=w}\Big) \quad \text{-''-}$$

$-1/\lambda > 0$

$$\iff \quad r \ge \sup_{w \in U} \big[\ell(w) - p(w - x_0) \big]$$

Also ex. ein $r \in \mathbb{R}$ s.d. $L_r \le p$ genau dann, wenn die „gap"-Bed

(3) $\forall\, v, w \in U: \ell(w) - p(w - x_0) \le p(v + x_0) - \ell(v)$

er füllt ist, äquivalent:

$$l(w)+l(v) \overset{\text{lin}}{=} l(w+v) \overset{\text{Vor}}{\leq} p(\underbrace{w+v}_{-x_0+x_0}) \overset{\text{sublin}}{\leq}$$

$$\leq p(v+x_0) + p(w-x_0) \qquad (4)$$

Er füllt, wg. Anm. d. Satzes. $\Rightarrow$ (1) bewiesen.

(2) Mit Teil (1) und Zornschem L.

zeigen wir allg. Auss. des S.

Part. geord. Menge ist:

$$A = \{ (V, L_V) \mid V \subset X \text{ UVR mit } U \subset V,$$
$$L_V : V \to \mathbb{R} \text{ lin. mit}$$
$$L_V \leq p|_V \text{ \& } L_V|_U = l \}$$

„Menge aller qualifizierten (part.) Forts. von l"

part. Ordn.:

$$(V, L_V) \leq (W, L_W) \Leftrightarrow V \subset W,\ L_W|_V = L_V$$

Insbes $(U, \ell) \in A \neq \emptyset$

Sei I bel nichtl. Indexmenge und $((V_i, L_{V_i}))_{i \in I}$ eine Kette in A.

Setze: $V := \bigcup_{i \in I} V_i$

$x, y \in V \Rightarrow \exists\, i_x, i_y : x \in V_{i_x}, y \in V_{i_y}$

$\Rightarrow$ $x + y \in$ größerem VR von beiden $\subset V$

$$L_V(x) = L_{V_i}(x) \quad \text{für } x \in V_i$$

Falls sich V_i und V_j überlappen ist L_{V_i} Forts. von L_{V_j} oder umgekehrt.

$\Rightarrow$ L_V ist wohldef. und V UVR von X

Zorn $\Rightarrow$ Es ex ein „unübertreffliches" d.h. „maximales Element von A:

$m = (X_0, L_{X_0})$

Falls $X_0 \neq X$ so ex. $x_0 \in X \setminus X_0$

und wir können (1) anwenden

$\Rightarrow$ es ex. Fortsetzung von L_{X_0}

$\Rightarrow$ m ist übertroffen $\Rightarrow$ ↯

Also $X_0 = X$ und $L = L_{X_0}$

auf ganz X definiert mit gewün. Eig. □

Bm: 5.1.4

(i) Besteht „gap" aus einem Punkt, ist $r \in \mathbb{R}$ eindeutig, d.h. alles Gleichheiten in (4.)

„gap" ist Intervall $\Rightarrow$ r nicht eind

$\Rightarrow$ L —"—

(ii) Analoge Aussage falls für lin. Op. statt Linearform.

(iii) Es gibt Analogon für $\mathbb{C}$-VR. Müssen dann aber ersetz:

$$\forall x \in X \quad \underbrace{\mathrm{Re}\, L(x)}_{\in \mathbb{R}} \leq \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{R}}$$

(iv) X $\mathbb{C}$-VR $\Rightarrow$ X $\mathbb{R}$-VR, dort x & ix lin. unab.

Vorbereitung:

L. 5.15 Sei X ein $\mathbb{C}$-VR.

(a) Sei $\ell : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear, d.h.

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \ell(\lambda x + \mu y) = \lambda \ell(x) + \mu \ell(y)$$
$$x, y \in X$$

Setze $\tilde{\ell}(x) := \ell(x) - i\,\ell(ix)$. Dann

ist $\tilde{\ell} : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear

und $\mathrm{Re}\, \tilde{\ell} = \ell$

(b) Ist $h : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear

18-7 Defn. $\ell = \mathrm{Re}\, h$ und $\tilde{h}$ wie in (a).

Damm: ℓ ist $\mathbb{R}$-linear

& $\tilde{\ell} = h$.

(c) Sei $p: X \to \mathbb{R}$ Halbnorm &

$\ell: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear. Damm

$\forall x \in X: |\ell(x)| \leq p(x) \Leftrightarrow \forall x \in X: |\mathrm{Re}\,\ell(x)| \leq p(x)$

" es reicht Realteil zu kontrollieren "

(d) Ist X NR, $\ell: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lin, stetig

so gilt $\|\ell\| = \|\mathrm{Re}\,\ell\|$

Bw: übg

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & & \\ \mathbb{R} & & \\ & & \\ L(X,\mathbb{C}) & \overset{\mathbb{R}}{L}(X,\mathbb{R}) & \leftarrow \\ \downarrow & \downarrow & \\ \ell & \mathrm{Re}\,\ell & \end{array}$$

Zuordnung: $\ell \longmapsto \mathrm{Re}\,\ell$

ist bijektiv und $\mathbb{R}$-linear.

& isometrisch, falls X mit Norm ausgestattet.

Komplexe Version d. S. v. Hahn-Banach 5.1.6

Sei X $\mathbb{C}$-VR, $U \subset X$ UVR,

$h: U \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, $p: X \to \mathbb{R}$ sublin

mit $\operatorname{Re} h(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$.

Dann ex. $H: X \to \mathbb{C}$ linear mit

$H|_U = h$ und $\forall x \in X: \operatorname{Re} H(x) \leq p(x)$.

„ lin. Forts inkl. Schranke"

Bw. L. 5.1.5 $\Rightarrow$ $\ell = \operatorname{Re} h$ ist $\mathbb{R}$-linear

(b) mit $\ell(x) = \operatorname{Re} h(x) \leq p(x)$ $\forall x \in U$

H.B. 5.1.3 $\Rightarrow$ $\exists$ Fortsetzung $L: X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare

von ℓ mit $L(x) \leq p(x)$ auf X

Setze $H(x) := L(x) - i L(ix)$.

L. 5.1.5 (a) $\Rightarrow$ H $\mathbb{C}$-linear

(b) $\Rightarrow L = \widetilde{\operatorname{Re} H} = H$, d.h. $\operatorname{Re} H|_U = L|_U = \ell = \operatorname{Re} h$

L. 5.1.5 $\Rightarrow$ $H|_U = h$

„ $h(x)$ bzw. $H(x)$ legen $h(ix)$ bzw $H(ix)$ fest "

Des weiteren:

$\forall x \in X: \operatorname{Re} H(x) = L(x) \leq p(x)$ □

Bisher war X nicht normiert.

Da jede Norm sublinear ist, kann ich X mit Norm $\|x\| = p(x)$ ausstatten

S. v. Hahn Banach für NR 5.1.7

Sei X NR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $U \subset X$ UVR

$u': U \to \mathbb{K}$, $u' \in L(U, \mathbb{K})$. Dann ex ist NR

$x': X \to \mathbb{K}$, $x' \in L(X, \mathbb{K})$ mit

$x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$

Bw: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Setze $p(x) := \|u'\| \cdot \|x\| = \|\|x\|\|$ ist Norm

$\Rightarrow$ p sublinear

S. 5.1.3 $\Rightarrow$ es ex Fortsetzung

$x' : X \to \mathbb{R}$ lin, $x'|_u = u'$, $\forall x \in X : x'(x) \leq p(x)$

Dann auch

$$-x'(x) = x'(-x) \leq p(-x) = \|u'\| \cdot \|-x\| = p(x)$$

somit

$$|x'(x)| \leq \underbrace{\|u'\| \cdot \|x\|}_{p(x)} \quad \text{für alle } x \in X$$

d.h. $\|x'\| \leq \|u'\|$

Komplement. Umgl.:

$$\|u'\| = \sup_{u \in B_1^U} |u'(u)| = \sup_{u \in B_1^U} |x'(u)|$$

$$\leq \sup_{x \in B_1^X} |x'(x)| = \|x'\|$$

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Übg mit S. 5.1.6 & L.5.1.5. $\square$

Bm. 5.1.8 Nullfolgen

(a) $Id: c_0 \to c_0$ linear, $|||c_0||| = 1$

Aber: $\nexists\, T \in L(\ell^\infty, c_0)$ mit $T|_{c_0} = Id$

Dagegen haben wir gesehen, dass zu

$T \in L(U, \underset{BR}{Y})$ $\quad U \subset \underset{NR}{X}$ UVR

eind. Forts. $\overline{T} \in L(\overline{U}, Y)$ mit

$\|\overline{T}\| = \|T\|$ bes. (S. 2.2.5)

7. Juni

(b) Sei $e_1, \dots, e_d$ Basis von $\mathbb{R}^d$

und $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^{d'} \cong \mathbb{R}^d$

$$\varepsilon_j(x) = \langle x, e_j \rangle$$

18-12 Dann legen Werte $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_d(x)$
x schon fest.

Letztes Mal: Hahn-Banach: 14.6.2023

X NR, $U \subset X$ UVR, $u \in U' = L(U, \mathbb{K})$

$\Rightarrow \exists x' \in X' = L(X, \mathbb{K})$ mit $x'|_U = u'$ & $\|x'\| = \|u'\|$ (normgleiche Fortsetzung)

Achtung:
- Fortsetzung i.A. nicht eindeutig
- Für Operatoren (statt Funktionale) muss es keine stetige (geschweige denn normgleiche) Fortsetzung geben.

Sei $v_1, \dots, v_d$ Basis von $\mathbb{K}^d$, $\varepsilon_j \in (\mathbb{K}^d)' = L(\mathbb{K}^d, \mathbb{K})$ mit $\varepsilon_j(x) = \langle x, v_j \rangle$.
Dann ist jedes $x \in \mathbb{K}^d$ schon durch die Werte $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_d(x)$ eindeutig festgelegt.
Ähnlich allg.: Es sei im folgenden stets X NR über $\mathbb{K}$.

Kor. 5.1.9 X NR, $x \in X \setminus \{0\} \Rightarrow \exists x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ & $x'(x) = \|x\|$.

Insb. trennt X' die Punkte v. X, d.h. zu $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, ex. $x' \in X'$ mit $x'(x_1) \neq x'(x_2)$.

Bew. Betrachte $u' : \operatorname{Span}\{x\} \to \mathbb{K}$ mit $u'(\lambda x) := \lambda \|x\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
Dann u' linear & stetig; setze normgleich zu $x' \in X'$ fort.
mit $\|u'\| = 1$ & $u'(x) = \|x\|$ □

Zusatz: Betrachte speziell $x = x_1 - x_2$.
Insbesondere sehen wir, dass $X' \neq \{0\}$ (sofern $X \neq \{0\}$). (X' reichhaltig; Probleme über Vektoren werden auf Probleme über Skalare zurückgespielt)

Kor. 5.1.10 X NR, $x \in X \Rightarrow \|x\| = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |x'(x)| = \max_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |x'(x)|$

Bew. „$\geq$" klar; „$\leq$" ist klar für $x = 0$ und folgt für $x \neq 0$ aus Kor. 5.1.9. □

Man vergleiche dies mit $\|x'\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |x'(x)|$ $\forall x' \in X'$ (a priori kein, max')

Kor. 5.1.11 ~~X NR~~, $U \subsetneq X$ abg. UVR, $x \in X \setminus U$

$\Rightarrow \exists x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ & $x'(x) \neq 0$

Bew. Betrachte $\omega : X \longrightarrow X/U$ (NR), $y \mapsto [y] = y + U$

$\rightsquigarrow$ ω linear & stetig mit $\|\omega(y)\|_{X/U} \leq \|y\|_X$ $\forall y \in X$; außerdem $\omega|_U = 0$ & $\omega(x) \neq 0$ ($x \notin U$)

Kor. 5.1.9 $\Rightarrow \exists \ell \in (X/U)'$ mit $\|\ell\| = 1$ & $\ell(\omega(x)) = \|\omega(x)\|_{X/U} > 0$

$\rightsquigarrow x' := \ell \circ \omega \in X'$ erfüllt $x'|_U = 0$ & $x'(x) = \ell(\omega(x)) > 0$. □

Kor. 5.1.12 ~~X NR~~ Sei, $U \subset X$ UVR. Dann sind äquivalent:

(i) U dicht in X;

(ii) Falls $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$, so $x' = 0$.

Bew.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Klar (eind. stetige Fortsetzung v. U auf $\overline{U} = X$).

(ii) $\Rightarrow$ (i): ~~Mit Kor. 5.1.11, denn~~ Mit $x'|_U = 0$ ist auch $x'|_{\overline{U}} = 0$. Jetzt Kor. 5.1.11. □

§5.2 Anwendungen

Dualraum & Bidualraum

Erinnerung: $\ell^1 \cong (c_0)'$ via $T_1 : \ell^1 \longrightarrow (c_0)'$, $(T_1 x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ $\forall x = (x_k) \in \ell^1$, $y = (y_k) \in c_0$

(auch für $y \in \ell^\infty$ sinnvoll)

(Blatt 6, A3)

Satz 5.2.1 $T : \ell^1 \longrightarrow (\ell^\infty)'$, $(Tx)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, $x = (x_k) \in \ell^1$, $y = (y_k) \in \ell^\infty$,

ist isometrisch, aber nicht surjektiv.

Bew. Isometrie wie bei T_1.

T nicht surjektiv: Betrachte $u' \in c'$ mit $u'(x) = \lim x$, $x \in c$ (Grenzwert $\lim x$, konv. Folgen c)

$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Rightarrow} \exists x' \in (\ell^\infty)'$ mit $x'|_c = u'$

Gäbe es $x = (x_k) \in \ell^1$ mit $x' = Tx$, so $x_k = x'(e_k'') = \lim e_k = 0$ $\forall k$, d.h. $x = 0$ ↯ □ 2

Tatsächlich kann es gar keinen Isomorphismus zwischen ℓ^1 & $(\ell^\infty)'$ geben.
Erinnere dazu: ℓ^1 separabel, ℓ^∞ nicht separabel.

Satz 5.2.2 X ~~NR~~, X' separabel $\Rightarrow$ X separabel

Bew. Mit X' auch $S := \{x' \in X' : \|x'\| = 1\} \subset X'$ separabel, d.h. $\exists \{x'_k : k \in \mathbb{N}\} \subset S$ dicht in S

Wähle $x_k \in X$, $\|x_k\| = 1$, mit $|x'_k(x_k)| \geq \frac{1}{2}$ und betrachte $U := \operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Zeige U dicht in X: Sei $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$. Wäre $x' \neq 0$, so o.B.d.A. $\|x'\| = 1$, d.h. $x' \in S$.

Wähle dann $j \in \mathbb{N}$ mit $\|x' - x'_j\| \leq \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq |x'_j(x_j)| \overset{x'|_U = 0}{=} |x'_j(x_j) - x'(x_j)| \leq \|x'_j - x'\| \cdot \|x_j\| \leq \frac{1}{4} \lightning$$

Also $x' = 0$ $\overset{\text{Kor. 5.1.12}}{\Rightarrow}$ U dicht, also X separabel. □

Def. 5.2.3 $X'' := (X')' = L(X', \mathbb{K})$ heißt Bidualraum von X.

Beachte: Wie X' ist auch X'' Banachraum.

Satz 5.2.4 Zu $x \in X$ sei $i_X x : X' \to \mathbb{K}$ gegeben durch $(i_X x)(x') := x'(x)$, $x' \in X'$.
Dann ~~ist über~~ vermittelt $x \mapsto i_X x$ eine Isometrie $i_X : X \to X''$.

Bew. Übung

Dualitätsabb. od. kanonische Einbettung

Es gilt $X \cong \operatorname{Ran} i_X \subset X''$. Ferner ist mit X'' auch $\overline{\operatorname{Ran} i_X}^{\|\cdot\|_{X''}} \subset X''$ BR, in dem $\operatorname{Ran} i_X$ nach Konstr. dicht liegt. Dies liefert einfache explizite Konstruktion einer Vervollständigung v. X im folgenden Sinne:

Kor. 5.2.5 Jeder normierte Raum ist isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraums.

Trennung konvexer Mengen (geometr. Version v. Hahn-Banach)

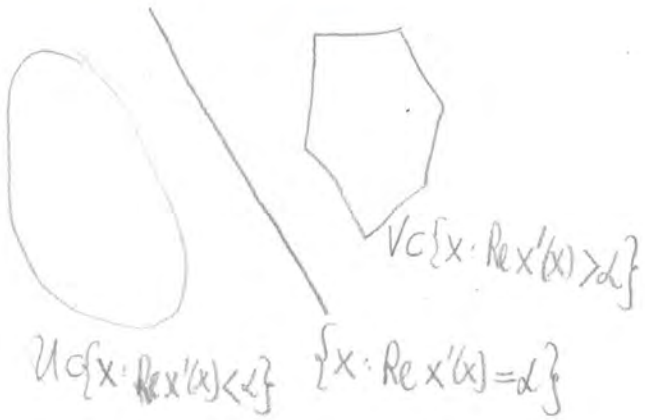
Erinnerung: $U \subset X$ konvex $:\Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in U \quad \forall x, y \in U,\ 0 \le \lambda \le 1$

Trennungsproblem: Seien $U, V \subset X$ konvex. Gibt es $x' \in X' \setminus \{0\}$ mit

$$\sup_{x \in U} x'(x) \le \inf_{x \in V} x'(x) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

bzw.

$$\sup_{x \in U} \operatorname{Re} x'(x) \le \inf_{x \in V} \operatorname{Re} x'(x) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{C})\ ?$$



Def. 5.2.6 Sei $A \subset X$.

$p_A : X \to [0, \infty]$, $p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in A\}$ heißt Minkowskifunktional.
(↑ muss nicht linear sein!)

A heißt absorbierend, wenn $p_A(x) < \infty \quad \forall x \in X$.

Bsp: $A = B_1(0) \Rightarrow p_A(x) = \|x\| \quad \forall x \in X$.

Lemma 5.2.7 Sei $U \subset X$.

(a) Falls $B_\varepsilon(0) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$, so $p_U(x) \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\| \quad \forall x \in X$.
Insb.: U absorbierend, falls $0 \in U^\circ$.

(b) U konvex & $0 \in U^\circ \Rightarrow p_U$ sublinear

(c) Falls U offen & konvex mit $0 \in U$, so $U = p_U^{-1}([0,1))$.

Bew. (a) klar.

(b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x) \quad \forall \lambda \ge 0,\ x \in X$ ist klar.

~~Falls $p_U(x) = \infty$ od. $p_U(y) = \infty$, so ist $p_U(x+y) \le p_U(x) + p_U(y)$ klar. Sei also $p_U(x), p_U(y) < \infty$~~

Seien nun $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda \le p_U(x) + \varepsilon$, $\frac{x}{\lambda} \in U$ &
$\mu \le p_U(y) + \varepsilon$, $\frac{y}{\mu} \in U$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{y}{\mu} \overset{U \text{ konvex}}{\in} U \Rightarrow p_U(x+y) \le \lambda + \mu \le p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$$

ε bel. $\Rightarrow$ Beh.

(c) Falls $p_U(x)<1$, so ex. $\lambda<1$ mit $\frac{x}{\lambda}\in U$

$\overset{0\in U}{\underset{\&\ U \text{ konvex}}{\Rightarrow}}$ $x=\lambda\cdot\frac{x}{\lambda}+(1-\lambda)\cdot 0\in U$, also $p_U^{-1}([0,1))\subset U$. [verwendet keine Offenheit]

Falls umgekehrt $p_U(x)\geq 1$, so $\frac{x}{\lambda}\in X\setminus U$ $\forall\lambda<1$ $\Rightarrow$ $x=\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{x}{\lambda}\in \overset{\text{abgeschl.}}{X\setminus U}$, also $U\subset p_U^{-1}([0,1))$.

Ende 14.6. □

Lemma 5.28 Sei $V\subset X$ konvex & offen mit $0\notin V$

$\Rightarrow \exists x'\in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(x)<0$ $\forall x\in V$. ($x'\neq 0$)

Bew. Sei $x_0\in V$. Setze $y_0:=-x_0$ & $U:=\{v-x_0 : v\in V\}$

$\Rightarrow$ U offen & konvex mit $0\in U$, $y_0\notin U$ [Translation ist Homöomorphismus]

$\overset{\text{Lem. 5.2.7}}{\Rightarrow}$ $p_U: X\to[0,\infty)$ sublinear mit $p_U(y_0)\geq 1$. ($y_0\notin U$)

Auf $Y:=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{y_0\}$ betrachte $y': Y\to\mathbb{R}$ mit $y'(ty_0)=tp_U(y_0)$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ y' $\mathbb{R}$-linear

Für $t\leq 0$ ferner $y'(ty_0)\leq 0\leq p_U(ty_0)$, und für $t>0$ ist $y'(ty_0)=p_U(ty_0)$, insgesamt also

$y'(y)\leq p_U(y)$ $\forall y\in Y$ $\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Rightarrow}$ $\exists \ell: X\to\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear mit $\ell|_Y=y'$ & $\ell\leq p_U$; insbesondere

$\ell(y_0)=y'(y_0)=p_U(y_0)\geq 1$.

Weiter

$|\ell(x)|=\max\{\ell(x),\ell(-x)\}\leq\max\{p_U(x),p_U(-x)\}\overset{\text{Lem. 5.2.7 mit } B_\varepsilon(0)\subset U}{\leq}\frac{1}{\varepsilon}\|x\|$ $\forall x\in X$ $\rightsquigarrow$ ℓ stetig

Für $x\in V$ schließlich $u:=x-x_0\in U$ $\rightsquigarrow$ $\ell(x)=\ell(u)+\underbrace{\ell(x_0)}_{=-\ell(y_0)}\leq p_U(u)-1\overset{\text{Lem. 5.2.7 } (u\in U)}{<}0$.

Für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ nun fertig mit $x'=\ell$.

Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ wähle $x'\in X'$ mit $\operatorname{Re}x'=\ell$ gemäß Lem. 5.1.5. □

Bem. 5.2.9 Ohne „V offen" muss Lemma 5.2.8 nicht gelten [$\ln\ (X_n,\|\cdot\|)=(d,\|\cdot\|_\infty)$ über $\mathbb{R}$ abbrechende Folgen

betrachte $V=\{(x_n)\in d\setminus\{0\} : x_N>0$ für $N=\max\{k: x_k\neq 0\}\}$

V konvex mit $0\notin V$, aber nicht offen.

Ang. $\exists x'\in d'$ mit $x'|_V<0$. Setze x' stetig nach $c_0=d$ fort

$\overset{\ell^1\cong(c_0)'}{\Rightarrow}$ $\exists (t_n)\in\ell^1$ $x'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_nx_n$ $\forall x=(x_n)\in d$]

Falls $t_k \geq 0$ für ein k, so $x'(e_k) = t_k \geq 0$, obwohl $e_k \in V$ ↯

Falls $t_n < 0$ $\forall n$, so $x = -\frac{t_2}{t_1} e_1 + e_2 \in V$, aber $x'(x) = -\frac{t_2}{t_1} t_1 + t_2 = 0$ ↯

Satz 5.2.10 (Hahn–Banach, Trennungsversion I)

$V_1, V_2 \subset X$ konvex mit V_1 offen & $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \exists x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$ $\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ $(x' \neq 0)$

Bew. $V := \{v_1 - v_2 : v_j \in V_j\}$ konvex und wg. $V = \bigcup_{v_2 \in V_2} \overbrace{\{v_1 - v_2 : v_1 \in V_1\}}^{\text{offen}}$ auch offen.

Ferner $0 \notin V$, da $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\overset{\text{Lem. 5.2.8}}{\Rightarrow} \exists x' \in X'$ mit $\underbrace{\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2)}_{= \operatorname{Re} x'(v_1) - \operatorname{Re} x'(v_2)} < 0$ $\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$

□

Satz 5.2.11 (Hahn–Banach, Trennungsversion II)

$V \subsetneq X$ abg. & konvex, $x \in X \setminus V \Rightarrow \exists x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\} =: \sup$

Insb. ex. $\varepsilon > 0$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(v)$ $\forall v \in V$ $(x' \neq 0)$

„x kann von V strikt getrennt werden"

Bew. $\exists r > 0$: $\underbrace{B_r(x)}_{=: U \text{ (offen \& konvex)}} \cap V = \emptyset$ $\overset{\text{Satz 5.2.10}}{\Rightarrow}$ $\exists x' \in X'$: $\underbrace{\operatorname{Re} x'(\overbrace{x+u}^{\in U})}_{= \operatorname{Re} x'(x) + \operatorname{Re} x'(u)} < \operatorname{Re} x'(v)$ $\forall u \in B_r(0)$ $\forall v \in V$

$\Rightarrow \operatorname{Re} x'(x) + \underbrace{\sup_{\|u\| < r} \operatorname{Re} x'(u)}_{= \|\operatorname{Re} x'\| \cdot r = \|x'\| \cdot r > 0} \leq \inf_{v \in V} \operatorname{Re} x'(v)$.

□

Schwache Konvergenz

Def. 5.2.12

Eine Folge (x_n) in X heißt schwach konvergent gg. $x \in X$, wenn

$\lim_{n \to \infty} x'(x_n) = x'(x)$ $\forall x' \in X'$.

Notation: $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{w}$ (engl. „weak") x bzw. $w\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = x$; manchmal auch $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

Da X' nach Kor. 5.1.9 Punkte trennt, ist ein schwacher Limes (falls existent) stets eindeutig.

Bsp. 5.2.13

(a) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x \not\Longleftarrow \Longrightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$

(b) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ in $c_0 \iff \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t_k \quad \forall (\lambda_k)_k \in \ell^1$ $(\ell^1 \cong (c_0)')$

$\|$ $\|$
$(t_k^{(n)})_k$ $(t_k)_k$

Insb. $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$ in c_0 $\wedge$ (aber $e_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$, da $\|e_n\|_\infty = 1 \ \forall n$)

$\|$
$(\delta_{n,k})_k$, da $\ell^1 \subset c_0$

(c) Analog $(\ell^p)' \cong \ell^q$, $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 < q \le \infty, \frac{1}{\infty} := 0)$

via $T_q : \ell^q \to (\ell^p)'$, $(T_q x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t_k$, $x = (\lambda_k) \in \ell^q$, $y \in (t_k)_k \in \ell^p$ (Hölder!)

Demnt:

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ in ℓ^p $(1 \le p < \infty) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t_k^{(n)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t_k \quad \forall (\lambda_k)_k \in \ell^q$

Insb. $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$ in ℓ^p $\forall 1 < p < \infty$ (dann $\ell^q \subset c_0$)

(d) Ähnlich: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty \rightsquigarrow (L^p(\Omega))' \cong L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} f$ in $L^p(\Omega) \iff \int_\Omega g f_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega g f \, d\lambda \quad \forall g \in L^q(\Omega)$

Bem. In ℓ^1 gilt: auch $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$ (Lemma v. Schur)

Insb. $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$ in ℓ^1.

Lemma 5.2.14 Sei $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$. Dann:

(a) $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(b) (x_n) ist beschränkt.

Bew. (a) $x = 0$ klar; $x \neq 0 \Rightarrow$ v. Hahn-Banach: $\exists x' \in X' : \|x'\| = 1$ & $x'(x) = \|x\|$.

Dann: $|x'(x_n)| \le \|x'\| \cdot \|x_n\| = \|x_n\| \ \forall n$, auch für TFen $\Rightarrow$ Beh.

$\downarrow$
$|x'(x)| = \|x\|$ (b) Übung (vgl. Blatt 11, A2(b)). $\square$

Beobachte: $S := \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 = 1\}$ abg., $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$ in ℓ^2, aber $\forall 0 \notin S$. ☹

Satz 5.2.15

Sei $V \subset X$ abg. & konvex. Ist dann $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x \in X$ in X, so $x \in V$.

(V „schwach abgeschl.")

Bew. Ang. $x \in X \setminus V$ $\overset{\text{Satz 5.2.11}}{\Longrightarrow}$ $\exists x' \in X'$ & $\varepsilon > 0$: $\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \inf_{v \in V} \operatorname{Re} x'(v)$

Insb. $\operatorname{Re} x'(\underbrace{x_n - x}_{\to 0}) \geq \varepsilon$ $\forall n$ ↯ zu $x_n \xrightarrow{w} x$. □

Haben beschränkte Folgen schwach konvergente Teilfolgen?
Nicht immer! (siehe ℓ^1)
In sogenannten reflexiven Räumen ist das aber richtig:

Satz 5.2.16 Ist X reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente TF.

Def. 5.2.17 X heißt reflexiv, wenn die kanonische Einbettung $i_X : X \to X''$ surjektiv ist.

Bem. X reflexiv $\overset{\not\Leftarrow !}{\Longrightarrow}$ $X \cong X''$, (insb. X BR)

Bsp. 5.2.18

(1) $X = \ell^1$ nicht reflexiv: $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$, $(\ell^1)'' \cong (\ell^\infty)' \not\cong \ell^1$ (vgl. Satz 5.2.2)

(2) $X = c_0$ nicht reflexiv: Mit $(c_0)' \overset{T_1}{\cong} \ell^1$, $(\ell^1)' \overset{T_\infty}{\cong} \ell^\infty$ zeigt man
~~$i_{c_0} : c_0 \to \ell^\infty$, $i_{c_0}(x) = x$ (also $\operatorname{Ran} i_{c_0} = c_0$)~~ $(i_{c_0} x) \circ T_1 = T_\infty x$ $\forall x \in c_0$

(3) Ähnlich: $X = \ell^p$, $1 < p < \infty$, ist reflexiv mit ~~$i_{\ell^p} = \mathrm{id}_{\ell^p} : \ell^p \to \ell^p$~~ $(\ell^p)' \overset{T_q}{\cong} \ell^q$, $(\ell^q)' \overset{T_p}{\cong} \ell^p$
$(i_{\ell^p} x) \circ T_q = T_p x$ $\forall x \in \ell^p$

(4) Auch $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, reflexiv.

(5) Endlichdim. Räume sind reflexiv, da dann $\dim X = \dim X' = \dim X''$.

Satz 5.2.19

(a) X reflexiv, $U \subset X$ abg. $\Longrightarrow$ U reflexiv.

(b) Falls X BR: X reflexiv $\Longleftrightarrow$ X' reflexiv.

~~[Ohne Beweis (siehe Werner, Satz III.3.4)]~~

Bem. Damit auch ℓ^∞ nicht reflexiv, da $c_0 \subset \ell^\infty$ abg., nicht reflexiv.

Ende 15.6.

Satz 5.2.20

Falls X reflexiv ($X \cong X''$ reicht): X separabel $\Longleftrightarrow$ X' separabel.

Bew. „$\Leftarrow$" nach Satz 5.2.2; „$\Rightarrow$": $\underset{\substack{\shortparallel \\ (X')'}}{X''} \overset{\cong}{\cong} X$ separabel $\overset{\text{Satz 5.2.2}}{\Longrightarrow}$ X' separabel. $\square$

Beweisskizze Satz 5.2.16

Sei (x_n) beschr., $Y := \overline{\operatorname{Span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset X$ ist separabel & reflexiv (Satz 5.2.19(a))

$\overset{\text{Satz 5.2.20}}{\Longrightarrow}$ Y' separabel, also $Y' = \overline{\{y'_k : k \in \mathbb{N}\}}$

Diagonaltrick: $\exists$ TF $(x_{n_j})_j$: $(y'_k(x_{n_j}))_j$ konv. $\forall k$

Über Dichtheit & $M := \sup_n \|x_n\| < \infty$: $(y'(x_{n_j}))_j$ konv. $\forall y' \in Y'$ (zeige C.F.)

$\rightsquigarrow$ $\ell : Y' \longrightarrow \mathbb{K}$, $y' \longmapsto \lim_{j\to\infty} y'(x_{n_j})$ wohldef., linear & stetig (mit $\|\ell\| \leq M$), d.h. $\ell \in Y''$

$\overset{Y \text{ reflexiv}}{\Longrightarrow}$ $\exists x \in Y$ $\ell = i_X x$ $\rightsquigarrow$ $y'(x) = \ell(y') = \lim_{j\to\infty} y'(x_{n_j})$ $\forall y' \in Y'$ (hier erst schwacher Grenzwert konstruiert)

Für $x' \in X'$ ist $x'|_Y \in Y'$, also auch $x'(x) = \lim_{j\to\infty} x'(x_{n_j})$, d.h. $x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{w} x$ in X. $\square$

Bew. Satz 5.2.19 (a)

Sei $u'' \in U''$. Def. $x'' \in X''$ durch $x''(x') := u''(x'|_U) \quad \forall x' \in X'$

X reflexiv $\Rightarrow \exists\, x \in X: i_X x = x''$. Zeige: $x \in U$ (①) & $i_U x = u''$ (②)

zu ①: Wäre $x \in X \setminus U$, so ex. $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ & $x'(x) \neq 0$ (Kor. 5.1.11)

Aber: $x'(x) = x''(x') = u''(x'|_U) = 0$ ↯ Also $x \in U$.

zu ②: Sei $u' \in U'$. Wähle $x' \in X'$ mit $x'|_U = u'$

$\Rightarrow (i_U x)(u') = u'(x) = x'(x) = x''(x') = u''(x'|_U) = u''(u')$.

(b) ohne Beweis (siehe Werner, Satz III.3.4)

□

ja

Bsp. 5.2.3 (c) $\cancel{\forall}\, p \in [1, \infty)$
$\exists$

21. Juni 23
Mittwoch

Reflexiv:

$i_X : X \to X''$, $(i_X x)(x') = x'(x)$ ist surj.

d.h. bijektive Isometrie

S. 5.2.19

(a) X reflexiver NR, $U \subset X$ abg UVR
$\Rightarrow U$ -||- (Übg)

(b) Für BR X gilt:
X reflexiv $\Leftrightarrow$ X' reflexiv (o. B.)

S. 5.2.20

Sei X reflexiver NR, dann:

X separabel $\underset{\substack{\Leftarrow \\ 5.2.2}}{\Leftrightarrow}$ X' separabel

Aber ℓ^1 $\ell^\infty = (\ell^1)'$

separabel nicht separabel

Also Auss. 5.2.20 i. A. falsch ohne Ann. der Reflexivität.

<u>Bw</u> „⇒" X reflexiv ⇒ $i_X : X \to X''$ „"

bij. Isometrie

⇒ X'' isomorph zu X, damit separabel

$\|$

$(X')'$ $\overset{5.2.2}{\Rightarrow}$ X' separabel □

Bw vom S. 5.2.16 ist nun vorbereitet

$(x_m)_m$ beschr F. im reflexiven NR X

$\Rightarrow \exists$ TF $(x_{m_j})_j$ und $x \in X$ mit $x_{m_j} \overset{w}{\to} x$

$Y := \overline{\operatorname{span}\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}}$ ist abg. sepr. UVR

$\overset{5.2.19}{\Rightarrow}$ Y reflexiv

$\overset{5.2.20}{\Rightarrow}$ auch Y' separabel, damit darstellbar $Y' = \overline{\{y'_k \mid k \in \mathbb{N}\}}$

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$$

$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}$: $(y_k'(x_n))_n$ beschr im $\mathbb{K}$

$$\sup_n |y_k'(x_n)| \leq \sup_n \|y_k'\| \, \|x_n\| \leq M \sup_n \|y_k'\| < \infty$$

besitzt insbes konvergente TF (in $\mathbb{K}$).

Mit Diagonalfolgentrick kann man sogar TF $(x_{n_j})_j \subset (x_n)_n$ extrahieren mit

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ ist $(y_k'(x_{n_j}))_j$ konv. in $\mathbb{K}$

insbes Cauchy

Bh: $(y'(x_{n_j}))_j$ ist Cauchy-F f. jedes $y' \in Y'$

Bw: $\exists$ Index l mit $\|y' - y_l'\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |\underbrace{y'(x_{n_j}) - y_\ell'(x_{n_j})}_{} + y_\ell'(x_{n_j}) - y_\ell'(x_{n_k}) + y_\ell'(x_{n_k}) - y'(x_{n_k})|$$

$$\leq \|y' - y_\ell'\| \, \|x_{n_j}\|$$

$$\leq 2\varepsilon M + \underbrace{|y_\ell'(x_{n_j}) - y_\ell'(x_{n_k})|}_{< \varepsilon \text{ für } j,k \geq N(\ell)}$$

$$\leq (2M+1)\,\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$$

$\mathbb{K}$ vollst $\Rightarrow \exists \lim_{j\to\infty} y'(x_{n_j}) =: \ell(y')$

für jedes $y' \in Y'$

$\ell : Y' \to \mathbb{K}$ wohldef, linear, beschr

da $|\ell(y')| \leq \sup_j \|x_{n_j}\| \, \|y'\| \leq M \|y'\|$

$\Rightarrow \ell \in Y''$

Y reflexiv, also ex Urbild $x \in Y$ mit

$i_X(x) = \ell$ (Kandidat für w-Limes)

$$y'(x) \overset{5.2.4}{=} \left(i_X(x)\right)(y') \overset{\text{Fkt.}}{=} \ell(y') \overset{\text{Dfn}}{=} \lim_j y'(x_{nj})$$

für alle $y' \in Y'$.

Für bel $x' \in X'$ gilt:

$x'|_Y \in Y'$ also

$$x'(x) \overset{x \in Y}{=} x'|_Y(x) = \lim_j x'|_Y(x_{nj})$$

$$= \lim_j x'(x_{nj})$$

Das ist gerade $x_{nj} \xrightarrow{w} x$ für $j \to \infty$ □

6 Hilberträume

§ 6.1 Motivation

Wir haben bereits verschiedene Abstandsbegriffe, insbesondere Normen und zugehörige Banachräume kennengelernt, viele von denen Funktionenräume.

Bsp. von Normen auf geeigneten Funktionenräumen

$\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{C^k}$

und entsp. Konvergenzbegriffen

uniform ...

Uniforme Konvergenz ist

natürlich im Kontext von stetigen Fkt., weil sie diese Eigensch. bewahrt, vgl. auch S. v. Arzela-Ascoli, Weierstraß-Approx-Satz.

Wir zeigen anhand eines Bsps., dass für andere Zwecke uniform Konvergenz (und auch nicht pktw., oder Konv. bzgl $\|\cdot\|_{1^\alpha}, \|\cdot\|_{C^k}$) nicht natürlich ist, sondern andere Strukturen „passen".

Fourierreihen

Dfn 6.1.1

Seien $a_k, b_j, c_\ell \in \mathbb{C}$

$k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0$

Dann nennen wir eine Fkt der Form

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right] \tag{1}$$

ein trigonometrisches Polynom und

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt \right] \tag{2}$$

Fourierreihe. Letztere ist wie bei skalaren Reihen und Potenzreihen als ein Symbol für die Folge d. Partialsummen zu verstehen, wobei die Konvergenz (welche?) noch zu klären ist.

Mithilfe Eulerscher Formel ist

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell e^{i\ell k} \tag{3}$$

eine äquivalente Darst. von (2), wobei die Koeffizienten folgendermaßen umgerechnet werden:

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$c_\ell = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_\ell - i b_\ell), & \ell \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} a_0, & \ell = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-\ell} + i b_{-\ell}), & \ell \in (-\mathbb{N}) \end{cases}$$

konv. die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$, d.h.

die Folge der part-Σ

$$\mathbb{N}_0 \ni m \longmapsto \left(t \mapsto s_m(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt} \right)$$

glm, so ist die als Limes

dfn. Funktion $f: t \longmapsto \sum_{\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$,

die stetig & 2π - periodisch ist, d.h.

$f \in$

$C_{2\pi} = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid$

f ist 2π-periodisch$\}$

Für jedes feste $t_0 \in \mathbb{R}$ ist $C_{2\pi}$ (isometrisch) isomorph (mittels Restriktion bzw. period. Forts.) zu

$$C_{2\pi}(t_0 - \pi, t_0 + \pi) = \{ f \in C[t_0 - \pi, t_0 + \pi] : f(t_0 + \pi) = f(t_0 - \pi) \}$$

Für $f \in L^1[-\pi, \pi]$ ist

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

eine (wohldef) komplexe Zahl und

heißt k-ter <u>Fourierkoeffizient</u> von f.

Damit können wir $f \in L^1[-\pi, \pi]$ einer (zunächst formalen) Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$$

zuordnen / assoziieren, wobei $\sim$ weder Konvergenz noch Gleichheit behauptet (vgl. Taylorentwicklung von $g(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cos(t^2 x)\, dt$, Cauchy-W-Dichte)

Für $f \in \mathcal{L}^1[t_0 - \pi, t_0 + \pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $g = T_{2\pi k} f : [t_0 + (2k-1)\pi, t_0 + (2k+1)\pi] \to \mathbb{C}$

$g(x) = f(x - 2\pi k)$ die Translation

und $\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{2\pi k} f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

die periodische Fortsetzung. Die Werte an den Randpunkten $t_0 \pm \pi$ spielen für Int.v. - Fkt keine Rolle

L^1

da $t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ abz. damit Nullm ist.

Wie bei Taylorreihen stellen sich die Fragen:

i. Konvergiert die zu $f \in L^1[-\pi, \pi]$ assoz. Fourierreihe?

ii. In welcher Topologie? Bzgl. -"- Konvergenzbegriff?

iii. Wenn ja, gegen welche Grenzfkt?

Um (einige) Antworten zu formulieren brauchen wir noch:

Notation 6.1.2

a) Sei $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $f : B_r(t) \to \mathbb{C}$. Existieren die beiden Limiten

$$f(t^+) = f(t+0) := \lim_{s \searrow t} f(s)$$

$$f(t^-) = f(t-0) := \lim_{s \nearrow t} f(s)$$

so setzt

$$f^*(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

b) Für $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$s_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$$ Wert d. p-Σ. in t

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} s_j(f,t)$$ Wert des

arithmetischen Mittels der partial-
Σ im Punkt t.

Satz 6.1.3 von Dini - Fejer - Lipschitz

Sei $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die
period. Forts. und $t \in \mathbb{R}$.

a) $f \in C_{2\pi} \Rightarrow \| f - \sigma_n(f) \|_\infty \to 0$

b) Es ex die Grenzwerte $f(t+0)$ &
$f(t-0)$. $\Rightarrow \sigma_n(f,t) \longrightarrow \frac{\tilde{f}^*(t)}{}$

c) Es ex $\alpha \in (0,1]$, $r > 0$, $C > 0$
mit $\forall\, s \in (0,r)$: $|\tilde{f}(t \pm s) - \tilde{f}(t \pm 0)|$

$\leq C|s|^\alpha$

$\Rightarrow S_n(f,t) \longrightarrow \tilde{f}^*(t)$

Bw - Methoden Drücke die lin Op.

$f \longmapsto S_n(f)$, $f \longmapsto \sigma_n(f)$,

als Integraloperatoren, zeige Konvergenz (im geeign. Sinne) gegen Identitäts operator für $n \to \infty$ durch Analyse der zugehörigen Integralkerne

Fazit:

Input & Output korrespondieren nicht natürlich miteinander.

c) pktw. konv $\Leftarrow$ Hölder-Bd.

a) & b) natürliche Konvergenz aussage aber nicht für „richtigen Approximanden".

Wer den ganz natürlichen Konvergenzaussage kennen lernen, aber in anderem

Konvergenzbegriff und anhand
von geometrisch-algebraischem
Input (in die Analysis)

§ 6.2 Orthogonalität

D. 6.2.1

Sei X ein $\mathbb{K}$-VR und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X. Dann heißt $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä Hilbert-raum. Ist X mit Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig, dann Hilbert raum, abgekürzt HR.

Bm / 6.2.2

Wdh. $\forall\, x, y \in$ PräHilbertraum X

Cauchy - Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$x \longmapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$ ist Norm

$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ ist stetig

$\uparrow$

$X \times X$

Dfn 6.2.1

Für $x, y \in X$, $A, B \subset X$ definiere

x orthogonal zu y, $\not\in x \perp y$,

$:\Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0$

x orthogonal zu A, $x \perp A$,

$:\Leftrightarrow \forall\, y \in A: \quad x \perp y$

A orthogonal zu B, $A \perp B$,

$:\Leftrightarrow \forall\, y \in A, x \in B: \quad x \perp y$

$A^\perp := \{ x \in X \mid x \perp y \text{ für alle } y \in A \}$

heißt Orthogonalraum von A

und ist abges UVR von X (übg)

$\{0\}^\perp = X, \quad X^\perp = \{0\}, \quad A \subset (A^\perp)^\perp$

$A \subset B \Rightarrow \quad B^\perp \subset A^\perp$

$A^\perp = \overline{A}^\perp, \quad A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp = \overline{\operatorname{span} A}$

In einem Prä Hilbertraum enth. die Norm schon Information über das Skalarp.

L. 6.2.3

Ist $\|\cdot\|$ die Norm des Prä HR X, so ist das SP gegeben durch:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

falls $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]$$

falls $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Bw.: Übg.

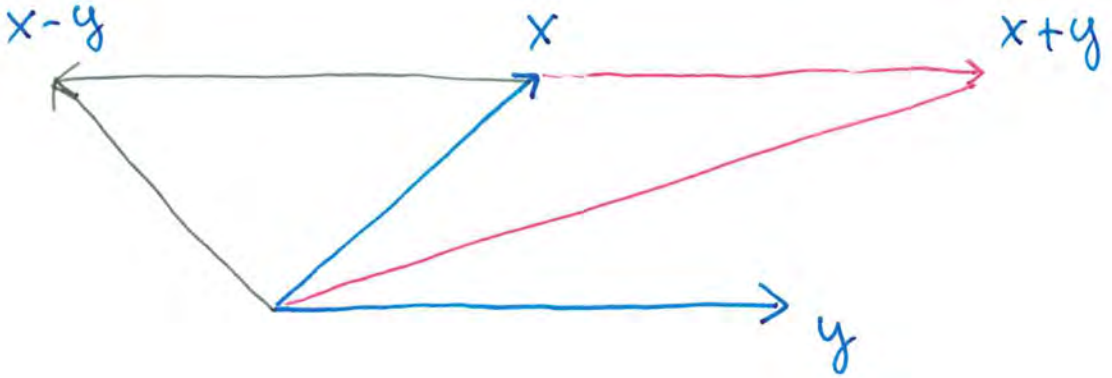
L. 6.2.4 Parallelogrammgl.

Sei X ein NR. Dann

$\|\cdot\|$ stammt von einem Skalarp. $\Leftrightarrow$

$\forall\, x, y \in X$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$



Bw „$\Rightarrow$" Übg.

„$\Leftarrow$" im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

"

L 6.2.3 motiviert zu setzen:

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left[\, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right] \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \langle x, x \rangle = \frac{1}{4}\, \|2x\|^2 = \|x\|^2 \quad \checkmark$$

Z.z., dass $(*)$ alle Eigs. des inneren P. erfüllt. Symmetrie ist offensichtlich

Additivität

Für $x_1, x_2, y \in X$ gilt m.V.

$$\| x_1 + x_2 + y \|^2 = 2\| x_1 + y \|^2 + 2\| x_2 \|^2 - \| (x_1 + y) - x_2 \|^2$$

$$=: \alpha$$

aber auch

$$\| x_1 + (x_2 + y) \|^2 = 2\| x_2 + y \|^2 + 2\| x_1 \|^2 - \| x_2 + y - x_1 \|^2$$

$$=: \beta$$

damit auch

$$\| x_1 + x_2 \pm y \|^2 = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

analog berechnet man mit $y \mapsto -y$

$$= \| x_1 \pm y \|^2 + \| x_2 \|^2 + \| x_2 \pm y \|^2 + \| x_1 \|^2$$

$$- \frac{1}{2} \left[\| x_1 - x_2 \pm y \|^2 + \| -x_1 + x_2 \pm y \|^2 \right]$$

Mit (*) also

$$= -(x_1 - x_2 + y)$$

$$\langle x_1 + x_2 , y \rangle = \frac{1}{4} \left[\| x_1 + x_2 + y \|^2 - \| x_1 + x_2 - y \|^2 \right]$$

gleiche

$$= \frac{1}{4} \left[\| x_1 + y \|^2 + \| x_2 + y \|^2 - \| x_1 - y \|^2 - \| x_2 - y \|^2 \right]$$

Terme heben sich auf

$$\overset{(*)}{=} \langle x_1 , y \rangle + \langle x_2 , y \rangle$$

Homogenität:

Für $\lambda = n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle \lambda x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

für $\lambda \in \{0, -1\}$ ebenfalls, direkt aus (*)

Damit schon für $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Ist $\lambda = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$, $n, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so

$$k \langle \lambda x, y \rangle = \langle \underbrace{k \cdot \lambda}_{k \cdot \frac{n}{k} = n} x, y \rangle = \langle n x, y \rangle = k \cdot \lambda \langle x, y \rangle$$

Da $x \longmapsto \|x\|$ stetig ist mit (*)

auch $X \ni x \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$

und $\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto \underline{\langle \lambda x, y \rangle} \in \mathbb{R}$ stetig

ebenso $\lambda \longmapsto \underline{\lambda \langle x, y \rangle}$

Übereinstimmung für $\lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Definitheit folgt aus Normeigens

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$$

$$\| \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$0$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nutzte entsp. Formel in L 6.2.3. □

K 6.2.5

(a) Ein NR X ist Prä HR $\Leftrightarrow$ alle 2-dim UVR von X sind Prä HR.

(b) X Prä HR, $V \subset X$ UVR $\Rightarrow$ V Prä HR

(c) X Prä HR $\Rightarrow$ Vervollständigung $\hat{X}$ von X ist HR

Bw von (c)

X Prä HR $\Rightarrow$ $\| \|$ erfüllt Parallelogr. auf X

$\| \|$ stetig $\Rightarrow$ ——— $\|$ ——— $\hat{X}$

S 6.2.4 $\Rightarrow$ $\hat{X}$ ist HR

Bsp. 6.2.6

(a) Für abzb. M ist

$\ell^2(M, \mathbb{K})$ HR mit

$$\langle s, t \rangle = \sum_{m \in M} s(m)\,\overline{t(m)}$$

konv. wg. Cauchy-Schw.

(b) Für Maßraum (Ω, Σ, μ) ist

$L^2(\Omega)$ HR mit

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\,\bar{g}\,\mu$$

Insbes für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messb & $\mu = \lambda$ Lebesguemaß oder

$\mu = w\,\lambda$, wobei $w: \Omega \to [0, \infty)$ messb eine Gewichts- / Dichtefkt ist,

z. B. $w(x) = e^{-x^2}$

(c) Allgem. als (a) sei nun $M \neq \emptyset$ bel. Menge und μ das Zählmaß auf M,

$$\mu(A) = \#A \quad \text{für} \quad A \subset M$$

Setze

$$\ell^2(M) := L^2(M, \mathcal{P}(M), \mu)$$

$$= \{ f : M \longrightarrow \mathbb{K} \mid f(s) \neq 0 \text{ für höchstens abz. viele } s \in M \text{ & } \sum_{s \in M} |f(s)|^2 < \infty \}$$

Interpr. $M_f := \{ s \in M \mid f(s) \neq 0 \}$

$$\Rightarrow \sum_{s \in M} |f(s)|^2 = \sum_{s \in M_f} |f(s)|^2$$

Wert un abh. von Reihenf. wg. absoluter Konvergenz

$$\langle f, g \rangle := \sum_{s \in M} f(s) \overline{g(s)} = \sum_{s \in M_f \cap M_g} f(s) \overline{g(s)}$$

induziert $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ und

macht $\ell^2(M)$ zu HR.

(d) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto e^{i\lambda s}$,

$X = \operatorname{span}\{ f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Dann ist

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s) \overline{g(s)} \, ds$$

wohldef und ein Skalarp. auf X

Die Vervollst $AP^2(\mathbb{R})$ von X ist

ein <u>nicht-separabler</u> HR

da $\|f_\lambda - f_\nu\| = \sqrt{2}$ für $\lambda \neq \nu \in \mathbb{R}$

AP von „almost periodic"

$AP^2(\mathbb{R}) \cong \ell^2(\mathbb{R})$ isometrisch isomorph

Bsp. (c)

22-10

(e) $C^k[a,b]$ mit Skalar prod.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{k} \int_a^b f^{(j)}(s)\, \overline{g^{(j)}(s)}\, ds$$

ist ein Prä HR mit Norm $\| \cdot \|_{W^{k,2}}$

Dessen Ver vollst ist demnach ein HR bez mit $W^{k,2}[a,b]$.

(f) X, Y HR und $T : X \supset D \to Y$ abgs

$\Rightarrow$ Graphennorm auf D

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

Siehe Korrektur

erfüllt Parallelogrammgl.

D vollst unter dieser Norm, L. 4.5.6

$\Rightarrow$ $(D, \|\cdot\|_T)$ ist HR

(g) Bsp. 4.5.5 impliziert also:

$$D_0 = \{ f \in L^2[-1,1] =: X \mid f \text{ absolut st. d. } f' \in X \}$$

ist HR mit Norm

$$\|f\|_T = \left(\int_{-1}^{1} \left[|f(s)|^2 + |f'(s)|^2 \right] ds \right)^{1/2}$$

und Skalar pr.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{1} \int_{-1}^{1} f^{(j)}(s) \overline{g^{(j)}(s)} \, ds$$

22. Juni

Approximationssatz 6.26

Sei X HR, $A \subset X$ abgs & konvex.

Dann ex. zu jedem $x \in X$ genau eine „Bestapproximation" in A, d.h.

genau ein $y \in A$ mit

$$\|x - y\| = d(x, A) := \min \{ \|x - a\| : a \in A \}$$

Nicht wahr: ohne Vollständigkeit

ohne Orthogonalität

Prähilbertraum oder Banachr. reicht nicht!

Konstruktion zu Bsp. 6.2.6 (4)

Seien X, Y HR und $T : X \supset D \to Y$ ein abgeschlossener Operator, sowie

$$|||x||| := \left[\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2 \right]^{1/2}$$

Dies ist eine Norm auf X, die die Parallelogrammgl. erfüllt. Sie ist äquivalent zu der im L. 4.5.6 eingeführten Graphennorm

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

Nach L. 4.5.6 ist D vollst. unter Norm $\|\cdot\|_T$ also auch unter $|||\cdot|||$.

$\Rightarrow$ $(D, |||\cdot|||)$ ist ein HR

23. Juni 2023

Konstruktion zu Bsp. 6.2.6 (4)

Seien X, Y HR und $T : X \supset D \to Y$ ein abgeschlossener Operator, sowie

$$|||x||| := \left[\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2 \right]^{1/2}$$

Dies ist eine Norm auf X, die die Parallelogrammgl. erfüllt. Sie ist äquivalent zu der im L. 4.5.6 eingeführten Graphennorm

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

Nach L. 4.5.6 ist D vollst. unter Norm $\|\cdot\|_T$, also auch unter $|||\cdot|||$.

$\Rightarrow$ $(D, |||\cdot|||)$ ist ein HR

23. Juni 2023

(e) $C^k[a,b]$ mit Skalar prod.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{k} \int_a^b f^{(j)}(s)\, \overline{g^{(j)}(s)}\, ds$$

ist ein Prä HR mit Norm $\| \cdot \|_{W^{k,2}}$

Dessen Ver vollst ist demnach ein HR bez mit $W^{k,2}[a,b]$.

(f) X, Y HR und $T : X \supset D \to Y$ abgs

$\Rightarrow$ „Graphennorm" auf D

$$\|x\|_T = \left[\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2 \right]^{1/2}$$

erfüllt Parallelogramm gl.

D vollst unter dieser Norm, L. 4.5.6

$\Rightarrow$ $(D, \|\cdot\|_T)$ ist HR

(g) Bsp. 4.5.5 impliziert also:

$D_0 = \{ f \in L^2[-1,1] =: X \mid f$ absolut st. & $f' \in X \}$

ist HR mit Norm

$$\|f\|_T = \left(\int_{-1}^{1} \left[|f(s)|^2 + |f'(s)|^2 \right] ds \right)^{1/2}$$

und Skalar pr.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{1} \int_{-1}^{1} f^{(j)}(s) \overline{g^{(j)}(s)} \, ds$$

22. Juni

Approximationssatz 6.2.~~7~~

Sei X HR, $A \subset X$ abgs & konvex.

Dann ex. zu jedem $x \in X$ genau eine „Bestapproximation" in A, d.h.

genau ein $y \in A$ mit

$$\|x - y\| = d(x, A) := \min \{ \|x - a\| : a \in A \}$$

Nicht wahr: ohne Vollständigkeit

ohne Orthogonalität

Prähilbertraum oder Banachr. reicht nicht!

Bw:

Nach Dfn. von $d(x, A)$ ex Folge $(y_n) \subset A$ mit $\|x - y_n\| \longrightarrow d(x, A)$

Ersetze in Parallelogramm gl.

$$x \longrightarrow x - y_m$$

$$y \longrightarrow x - y_m, \text{ dann } \|y_m - y_n\|^2$$

$$= \|x - y_n - (x - y_m)\|^2$$

$$= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|^2$$

$$= \text{——} \| \text{——} - 4\|x - \underbrace{\tfrac{1}{2}(y_n + y_m)}_{\in A \text{ konvex}}\|^2$$

$$\geq d(x, A)^2$$

$$\leq \text{——} \| \text{——} - 4\, d(x, A)^2 \longrightarrow 0$$

gemäß der Wahl der Folge (y_n)

Also ist $(y_n)_n$ Cauchyf.

X vollst $\Rightarrow \exists y \in X : y_n \longrightarrow y$

A abgs $\Rightarrow y \in A$

Zur Eindeutigkeit:

Sind $y, z \in A$ mit $\|x-y\| = \|x-z\| = d(x,A)$

setze $(y_n)_n = (y, z, y, z \dots)$ in obige

Ungl. ein $\Rightarrow$

$$\|y-z\|^2 \leq 2\underbrace{\|x-y\|^2}_{d(x,A)^2} + 2\underbrace{\|x-z\|^2}_{d(x,A)^2} - 4d(x,A)^2 = 0$$

$\Rightarrow y = z$.

L. 6.2.8

$x, y \in X$

Sei A konvex, $A \subset X$, X Prä-HR

Dann äquivalent

(i) $\|x-y\| = \inf_{a \in A} \|x-a\|$

(ii) $\mathrm{Re} \langle x-y, a-y \rangle \leq 0$ für alle $a \in A$.

Bw: Übg

Bm 6.2.9 (0)

Pythagoras: $y \perp z \in X$ HR $\Rightarrow \|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

Bm 6.2.9

(a) Im Approximationssatz wird

$X \ni x \longmapsto y \in A$ eindeutig.

zugeordnet. Wir bez. diese Zuord.

mit $P : X \longrightarrow A$. Offensichtlich

gilt $P(a) = a$ für $a \in A$ und

damit $P\,P(x) = P(x)$, d.h. P ist

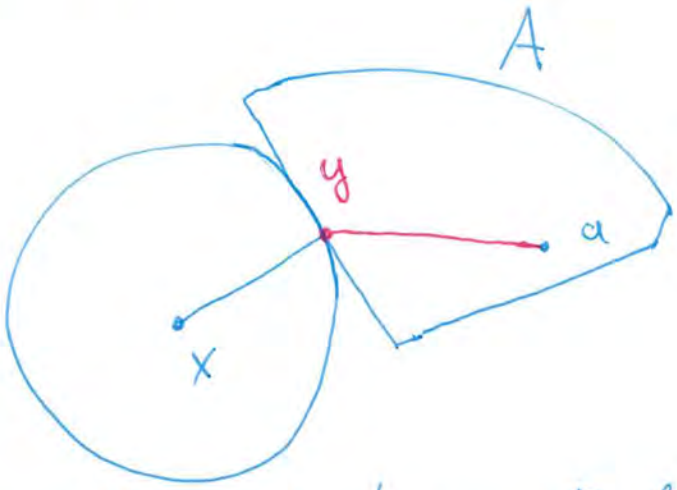
ein Projektor

idempotent bzw. (eine Projektion)

(b) L. 6.2.8 besagt, dass der Winkel

zw. $x - y$ und $a - y$ stets

stumpf ist.



Besonders interes. Fall: $A \subset X$ abg. UVR

(c) Direkte Summe

Für NR X & Y und $p \in [1, \infty]$ def.m

$$(x, y) \longmapsto \|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left[\|x\|^p + \|y\|^p\right]^{1/p}, & p < \infty \\ \max\{\|x\|, \|y\|\}, & p = \infty \end{cases}$$

Norm auf direkter Summe

$X \oplus Y$

Alle diese Normen sind äquivalent

Falls X & Y vollst $\Rightarrow X \oplus_p Y$ vollst

Projektionssatz 6.2.10

Sei X HR, $U \subset X$ abgs. UVR.

a) Jedes $x \in X$ läßt sich eindeutig schreiben als $x = y + z$ mit $y \in U$, $z \in U^\perp$.

y heißt orthogonale Projektion auf U

$X = U \oplus_2 U^\perp$

b) Die Abb. $P_U : X \to X$ vom X auf U

$x \mapsto y$

ist linear & idempotent, genannt

orthogonaler Projektor ⊗, erfüllt

$\|P_U\| \leq 1$ $= 1$, falls $U \neq \{0\}$

$\ker P_U = U^\perp$

$Id - P_U : X \to X$ ist orth. Proj. von X auf $U^\perp$

$\|Id - P_U\| \leq 1$ $= 1$, falls $U \neq X$

Bw (a) Existenz d. Zerlegung

Zu $x \in X$ wähle gemäß 6.2.7 „Bestapproximation" $y \in A = U$ &

setzt $z := x - y$.

Z.z.: $z \in U^\perp$, d.h. $\forall u \in U : \langle u, z \rangle = 0$

Falls $u = 0$ $\Rightarrow$ klar

Falls $u \neq 0$:

Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\underset{\in U}{y} + \lambda \underset{\in U}{u} \in U \Rightarrow$

$$d(x, U)^2 \leq \inf_{w \in U} \|x - \underbrace{(y + \lambda u)}_{w}\|^2 = \|z + \lambda u\|^2$$

ausmul
$$= \|z\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda \langle z, u\rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2$$

kürzester Abst.
$$= d(x, U)^2 \quad \text{---------- } \| \text{ ----------}$$

Setze $\lambda = \dfrac{\langle u, z\rangle}{\|u\|^2}$ ein. $\Rightarrow$

$$0 \leq -2\,\mathrm{Re}\,\frac{|\langle z, u\rangle|^2}{\|u\|^2} + \frac{|\langle u, z\rangle|^2}{\|u\|^2} = -\frac{|\langle z, u\rangle|^2}{\|u\|^2}$$

$$\leq 0$$

$\Rightarrow \langle z, u\rangle = 0$

Eindeutigkeit

Sei auch $y' + z' = x$ mit $y' \in U$
$z' \in U^\perp$.

Damm: $y - y' \in U$

$z - z' \in U^\perp$

$y + z = x = y' + z'$

also:

$y - y' = z - z' \in U \cap U^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow y = y'$ & $z = z'$ jetzt ——

Pythagoras $\Rightarrow$

$$\underset{\vee|}{\|x\|^2} = \|y+z\|^2 \overset{y \perp z}{=} \underset{\vee|}{\|y\|^2} + \underset{\vee|}{\|z\|^2} \quad (*)$$

$$\underset{\vee|}{\|x\|^2} \quad \underset{0}{\underset{\vee|}{\|y\|^2}} \quad \underset{0}{\underset{\vee|}{\|z\|^2}}$$

$\Rightarrow$ sogar $\underline{X = U \oplus_2 U^\perp}$

b) Linearität von P_U

Für $v, w \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, da $U^\perp$ UVR

$$\lambda v - \lambda P_U(v) + \mu w - \mu P_U(w) \in U^\perp$$

$$U \ni \overset{+}{\lambda} P_U(v) \quad \overset{+}{\mu} P_U(w) = P_U(\lambda v + \mu w)$$

$23-8 = \lambda v + \mu w$ wg. eind. Zerlegung

$\operatorname{Ran} P_U \subset U$ da $u \in U \Rightarrow P_U(u) = u$

$\Rightarrow \operatorname{Ran} P_U = U$

$y = P_U(x) = 0 \Leftrightarrow x = y + z \in U^\perp$

$\Rightarrow \ker P_U = U^\perp$

(*) $\Rightarrow \|P_U(x)\| \leq 1$

$\|(Id - P_U)(x)\| \leq 1$

$0 \neq u \in U \Rightarrow P_U(u) = u \Rightarrow |||P_U||| = 1$

$0 \neq v \in U^\perp \Rightarrow (Id - P_U)(v) = v \Rightarrow |||Id - P_U||| = 1$

Damit $(Id - P_U)(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in U \\ x & \text{für } x \in U^\perp \\ \text{(Z)} & \text{allgem.} \end{cases}$

aus Teil a)

Projektor, sogar orthogonal gemäß Zerlegung aus Teil a)

$\Rightarrow$ Linearität wie bei P_U. □

Kor 6.2.11

Sei X HR, $A \subset X$, $U \subset X$ UVR.

a) $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}(A)}$ ist kleinster abgs. UVR, der A enthält

b) $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span}(A)} = X$, d.h. A totale Teilm. von X

c) $$(U^\perp)^\perp = \overline{U}$$

B.w. Übg

Bm 6.2.12

Sind $U, V \subset X$ UVR eines HR X mit $U \cap V = \{0\}$ so ist

$$U \oplus V = \{ u+v \mid u \in U, v \in V \}$$

UVR d. direkte Summe, d.h. Zerlegung ... eindeutig.

Für UVR $U, V \subset X$ mit $U \perp V$ gilt offenes. $U \cap V = \{0\}$ und bzgl. der (Einschränkungen der) Norm von X gilt

$$U \oplus_2 V \subset X$$

Gilt $W = U \oplus_2 V$ so schreiben wir auch $U = W \ominus_2 V$ für das orthogonale Komplement von V in W. Speziell für $W = X$ gilt dann $V^\perp = W \ominus_2 V$.

Kor 6.2.13 Sei X HR.

a) Sind $U, V \subset X$ orthogonale UVR, so:

$U \oplus_2 V$ abgs $\Leftrightarrow$ U & V abgs. BWiS

b) Sind $U \subset V$ abgs. UVR von X, so $\exists!$ abgs. UVR $W \subset V$ mit $V = U \oplus_2 W$.

Bsp. 6.2.14

a) Sind $a < b < c \in \mathbb{R}$, dann

$$L^2(a,c) = L^2(a,b) \oplus_2 L^2(b,c)$$

mit Identifizierung

$$\{ f \in L^2(a,c) \mid f \equiv 0 \text{ auf } (a,c] \}$$

b) Teilräume von $X = L^2(-a,a)$

der geraden $L^2_g(-a,a) = \{ f \in X \mid f(x) = f(-x) \text{ f.ü.} \}$

& ungeraden $L^2_u(-a,a) = \{ f \in X \mid f(x) = -f(-x) \text{ f.ü.} \}$

Funktionen. Jedes $f \in X$ hat eind.

Zerlegung $f = f_g + f_u$

$f_g \in L^2_g$, $f_u \in L^2_u$

nämlich

$$f_{g,u}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) \pm f(-x) \right]$$

Also $X = L^2_g \oplus_2 L^2_u$

Bei a) & b) haben wir jeweils die übl. Skalarpr. & Normen auf den Räumen

Vgl. auch Fourierreihe Dfn 6.1.1

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right]$$

gerader Anteil — ungerader A.

Darstellungss. von Frechet-Riesz 6.2.15

Sei X HR. Dann $\phi : X \to X'$ ist

$$y \longmapsto \langle \cdot, y \rangle$$

bijektiv, isometrisch & konjugiert linear, d.h. $\phi(\lambda y) = \bar{\lambda}\, \phi(y)$.

Anders formuliert: $\forall\ x' \in X'\ \exists!\ y \in X$ mit $x'(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in X$ & $\|x'\| = \|y\|$

BW

$$\phi(\lambda y)(x) = \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle = \overline{\lambda}\, \phi(y)(x)$$

$$|\phi(y)(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\phi(y)\| \leq \|y\| \qquad \text{für alle } y \in X$$

$$x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \quad \phi(y)(x) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\|$$

$$\Rightarrow \|\phi(y)\| = \|y\| \quad \text{insbes } \phi \text{ isometrisch}$$

$$\text{-"- injektiv.}$$

Surjektivität

Sei $x' \in X'$ bel., $\neq 0 \quad \|x'\| = 1$.

$U = \ker x' \subset X$,

$x' \neq 0 \Rightarrow U$ hat Kodimension 1

$$\Rightarrow \quad X = U \oplus_2 U^\perp$$

mit einem dimensionalen $U^\perp \cong X/U \cong \operatorname{Ran} x' = \mathbb{K}$,

dass als $U^\perp = \operatorname{span}\{y\}$

mit einem $y \in X, y \neq 0$ dargest.

werden kann. OE Normierung $x'(y)=1$

$[\ x'(y) \neq 0$, wg $y \perp \operatorname{kern} x']$

$\Rightarrow$ Es ex eind Zerlegung für $x \in X$

$$x = \underset{\substack{\rotatebox{-90}{$\in$} \\ U}}{u} + \underset{\substack{\rotatebox{-90}{$\in$} \\ \mathbb{K}}}{\lambda} y \in U \oplus_2 U^\perp$$

$$\Rightarrow \quad x'(x) = \overset{0}{\cancel{x'(u)}} + \lambda x'(y) = \lambda$$

und $\langle x, y \rangle = \langle \lambda y, y \rangle = \lambda \|y\|^2$

Also $\phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right)(x) = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|^2} \right\rangle = \lambda$

damit $\phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = x'$

$\Rightarrow$ ϕ ist surjektiv.

Zusatz: Wg. der gez Isometrie von ϕ gilt

$$\frac{1}{\|y\|} = \left\| \frac{y}{\|y\|^2} \right\| \overset{\text{ISOM}}{=} \left\| \phi\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) \right\| = \|x'\| \overset{\text{Ann.}}{=} 1$$

Also $\frac{y}{\|y\|^2} = y$ überall: $\underline{\phi(y) = x'}$ □
insbes

Kor. 6.2.16 Sei X HR, $(x_n)_n \subset X$.

a) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x \in X \iff \forall y \in X : \langle x_n - x, y\rangle \to 0$

b) X ist reflexiv

c) Ist (x_n) beschränkt,
so enth. es schw. konvg. Teil F.

Bw:

a) $x_n \xrightarrow{w} x \iff \forall\, l \in X' : l(x_n - x) \to 0$

$\iff \forall y \in X : \langle x_n - x, y\rangle \to 0$
$l = \phi(y)$

b) Auf X' definiert

$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle_{X'} = \langle y, x\rangle_X$, da

ϕ bijektiv ist ist das dasselbe wie

$$\langle l, \tilde{l} \rangle_{X'} = \langle \phi^{-1}(\tilde{l}), \phi^{-1}(l) \rangle$$

für $l, \tilde{l} \in X'$

ein Skalarprodukt mit dem X' ein HR ist.

Also kann man S. 6.2.15 auf X' anwenden und erhält, bijektives, isometrisches & konjug. lin

$$\psi : X' \longrightarrow X''$$

Dann gilt für kanon. Einbettung

$$i_X = \psi \circ \phi : X \to X'',$$

ist insbes bijektiv.

c) Wende S. 5.2.16 auf reflexiven Raum X an. □

24-5 Auss. c) kann verschärft werden:

S. v. Banach - Saks 6.2.17

Sei $(x_n)_n$ beschr Flg im HR X.

Dann ex TF $(y_k)_k \subset (x_n)_n$ & $y \in X$

mit

(a) $y_k \xrightarrow{w} y$

(b) $\| y - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k \| \longrightarrow 0$

arithmetische Mittel.

vgl. mit $\|\cdot\|_\infty$ Konvergenz für a.M. bei Fourierreihe von $f \in C_{2\pi}$

Bw Tatsächlich werden wir TF von TF extrahieren.

K. 6.2.16 (c) $\Rightarrow$ (x_n) enth. schw konv. TF gegen ein $y \in X$. OE bez. TF wieder mit (x_n). Durch Übergang zu $(x_n - y)_n$

können wir o.E. $y = 0$ annehmen

(Linearität $l(x_n - y) = l(x_n) - l(y) \to 0$

29. Juni 2023

Setze $M = \sup \|x_n\| < \infty$, $y_1 := x_1$

$x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow \langle x_n, y_1 \rangle \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \exists\ n_2 > 1$ mit $|\langle x_{n_2}, y_1 \rangle| < 1$

Setze $y_2 := x_{n_2}$.

Wg $\langle x_n, y_2 \rangle \to 0$ $\exists\ n_3 > n_2$ mit

$|\langle x_{n_3}, y_2 \rangle| < \frac{1}{2}$ & $|\langle x_{n_3}, y_1 \rangle| < \frac{1}{2}$

Setze $y_3 := x_{n_3}$ ...

Induktiv erhalte TF (y_k) mit

$|\langle y_{k+1}, y_\ell \rangle| < \frac{1}{k}$ für $\ell = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$

Insbes: $\sum_{\ell=1}^{k-1} |\langle y_{k+1}, y_\ell \rangle| < 1$

und dann

$$\sum_{k=2}^{m} \sum_{\ell=1}^{k-1} |\langle y_k, y_\ell \rangle| < m - 1$$

für $m \in \mathbb{N}$. Damit: Δ-Ungl.

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k \right\|^2 \leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} |\langle y_k, y_\ell \rangle|$$

$$= \frac{1}{m^2} \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{m} \|y_k\|^2}_{\leq m \cdot M^2} + 2 \sum_{k=2}^{m} \sum_{\ell=1}^{k-1} |\langle y_k, y_\ell \rangle| \right]$$

$$\leq m \cdot M^2 + 2(m-1)$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad m \to 0.$$

Wg:

$$y - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (y_k - y)$$

folgt sofort Aussage im allg. Fall $y \neq 0$.

□

§ 6.3 Orthonormalsysteme

Wdh: X NR, $T \subset X$ heißt **total** $:\Leftrightarrow$

$$\overline{\operatorname{span} T} = X$$

Ab jetzt im § 6.3:

X Prä HR, A bel. Menge, $S = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset X$

Dfn 6.3.1

S ist Orthonormalsystem (abg. ONS)

$:\Leftrightarrow$ für $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ ist $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$

S ist maximales ONS (mONS) $:\Leftrightarrow$

Ist $T \subset X$ ONS mit $T \supset S$, so ist $T = S$.

S ist Orthonormalbasis $:\Leftrightarrow$

$X = \overline{\operatorname{span} S}$, d.h. S total in X

L. 6.3.2

a) S ONS $\Rightarrow$ S linear unabh.

b) S ONB $\Rightarrow$ S m ONS

c) " $\Leftarrow$ " falls X HR

Bw: Übg

Bsp. 6.3.3

a) Im $\ell^2(A)$ (z. B. $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$) ist

$S = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ mit $e_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ONB

b) Im $L^2((0,1), \mathbb{C})$ ist S mit

$e_\alpha = e_n : x \longmapsto e^{2\pi i n x}$ ONB

Denn Weierstraß-Approx. S. für period.

Fkt $\Rightarrow$ S ist total bzgl $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow$ — " — $\|\cdot\|_2$

Rechnung ergibt $\langle e_m, e_k \rangle = \delta_{m,k}$

$$S_g = \{ c_m \mid m \in \mathbb{N}_0 \}, \quad c_m : X \mapsto \sqrt{2} \cos(2\pi m x)$$

$$S_u = \{ s_m \mid m \in \mathbb{N} \}, \quad s_m : X \mapsto \sqrt{2} \sin[2\pi m x]$$

sind jeweils ONS.

$S_g \cup S_u$ ist ONB von $L^2((0,1), \mathbb{K})$

c) Im $X = AP^2(\mathbb{R})$ ist $S = \{ f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ ONS

Q: In welchem Sinne kann man einen Vektor in X nach einer ONB entwickeln?

#

Vektorraumbasis, d.h. algebraische Basis

S. 6.3.4

Seien $S = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ONS im X, $(c_n)_n \subset \mathbb{K}$, $(\alpha_n)_n$ Folge in A ohne Wiederholungen (d.h. $n \mapsto \alpha_n$ injektiv) und $x_m := \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}$. Dann gelten

a) $(x_m)_m$ konvergiert in $X \Rightarrow (x_m)$ cauchy F

$\Leftarrow$ falls X HR

$\iff (c_n) \in \ell^2$

b) Ist (x_m) konverg. mit Limes

$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_{\alpha_n}$ so gelten:

$$c_n = \overline{\langle e_{\alpha_n}, y \rangle} = \langle y, e_{\alpha_n} \rangle$$

$$\|y\|^2 = \sum_n |c_n|^2$$

$\forall x \in X$: $\langle x, y \rangle$

$$\langle y, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_{\alpha_n} \rangle \langle e_{\alpha_n}, x \rangle$$

BW a)

$(x_m)_m$ Cauchy-F. $\Leftrightarrow$ Es gilt

$$0 \longleftarrow \|x_k - x_m\|^2 = \Big\| \sum_{n=m+1}^{k} c_n e_{\alpha_n} \Big\|^2 = \sum_{n=m+1}^{k} |c_n|^2$$

für $k, m \to \infty$

nach Pythagoras

$\Longleftrightarrow$ $(c_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ wg. Vollständigk.

b)

$$c_n = \langle c_n e_{\alpha_n}, e_{\alpha_n} \rangle$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ stet.

$$= \lim_{m \to \infty} \Big\langle \sum_{j=1}^{m} c_j e_{\alpha_j}, e_{\alpha_n} \Big\rangle \quad \text{ab } m \geq n$$

$$= \langle y, e_{\alpha_n} \rangle$$

$\|\cdot\|$ stet

$$\|y\|^2 = \lim_{m \to \infty} \Big\| \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n} \Big\|^2$$

Pythagoras

$$= \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 \overset{\text{Dfn}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

Für bel. $x \in X$

$$\langle y, x \rangle = \left\langle \sum_{n}^{\infty} c_n e_{\alpha_n}, x \right\rangle$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left\langle \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}, x \right\rangle$$

$$\| \quad \langle y, e_{\alpha_n} \rangle$$

$$= \lim_{m} \sum_{n=1}^{m} \langle y, e_{\alpha_n} \rangle \langle e_{\alpha_n}, x \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \quad \text{---} \; \| \; \text{---}$$

□

Bm 6.3.5

Alle $p_\alpha \geq 0$ & $\sum_{\alpha \in A} p_\alpha < \infty$

$\Rightarrow A_p := \{ \alpha \in A : p_\alpha \neq 0 \}$ ist abz.

Bw: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $A_{p,n} = \{ \alpha \mid \frac{1}{n} \leq p_\alpha \}$

$$\Rightarrow \quad A_\rho = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\rho,n}$$

Wäre A_ρ über abz, dann auch ein A_{ρ,n_0}

damit $\sum_{\alpha \in A} p_\alpha \geq \sum_{\alpha \in A_{\rho,n_0}} p_\alpha \geq \sum \frac{1}{n_0} = \infty$

↑ über abz

Entwicklungssatz 6.3.6

a) $S = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ONS in X, $x \in X$ bel:

$$\Rightarrow \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Besselsche Ungl.

Insbesondere ist

$$A_x := \{ \alpha \mid \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0 \} \text{ abzählbar.}$$

b) Sei S ONS. Dann: S ONB $:\Leftrightarrow$

$\forall x \in X$ gilt: $\sum_{\alpha \in A_x} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = \|x\|^2$

Parsevalsche Gl.

In diesem Falle gilt $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$

$= \sum_{\alpha \in A_x} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$ für jede Summationsreihenfolge

(unbedingt konvergente Reihe)

c) Ist $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ONS im HR X,

so ist $\sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$ orthogonale Projektion von x auf

$U = \overline{\text{span } S}$

BW

a) Ist $y = \sum_{m=1}^{M} c_m e_{\alpha_m} \in \text{span } S$, so

(1)

$$\|x - y\|^2 \overset{\text{bim F}}{=} \|x\|^2 - 2\,\text{Re} \sum_{m=1}^{M} c_m \langle e_{\alpha_m}, x \rangle + \underbrace{\sum_{m=1}^{M} |c_m|^2}_{= \|y\|^2}$$

$$\overset{\text{bim F}}{=} \|x\|^2 - \sum_{m=1}^{M} |\langle x, e_{\alpha_m} \rangle|^2 + \underbrace{\sum_{m=1}^{M} |c_m - \langle x, e_{\alpha_m} \rangle|^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \quad \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n}\rangle|^2$$

gilt auch für ∞ konv. Σ $y = \Sigma c_n e_{\alpha_n}$

Wann steht $=$?

Bei festem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ist $\|x-y\|$ am kleinsten, genau wenn $c_n = \langle x, e_{\alpha_n}\rangle$

In diesem Fall:

(2) $$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n}\rangle|^2$$

also

$$\sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n}\rangle|^2 = \|x\|^2 - \|x-y\|^2 \leq \|x\|^2$$

Supremum über endliche $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset A$ liefert Besselsche Ungl. Da $\|x\|^2 < \infty$,

$\Downarrow$ Bm 6.3.5 Abzählbark. von

A_x.

b) „⇒"

Ist $\overline{\text{span } S} = X$, so ex. $\forall \varepsilon > 0$ ein endl. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset A$ & $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$ mit

$$\|x - y\|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad y = \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}$$

// Bessel

$$\|x\|^2 - \sum_{1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n} \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|^2 \underset{\text{BU}}{\geq} \sum_{1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n} \rangle|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2$$

Supremum über endliche $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset A$ liefert Parsevalgl.

„⇐"

Ist $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ eine <u>bel.</u> Abzählung von A_x, setzen wir $y_m = \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_{\alpha_n} \rangle e_{\alpha_n}$

$$\Rightarrow \|x - y_m\|^2 \overset{(2)}{=} \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n}\rangle|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{>0}$ wg. Parseval

d.h. absolut konv. ($\Leftrightarrow$ unbed. konv.)

Es gilt also Norm konvergenz

$$x = \lim_{m\to\infty} y_m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_n}\rangle e_{\alpha_n}$$

für jede Abz. $= \sum$ — " —

$\Rightarrow$ unabh. v. Reihenfolge $\alpha \in A_x$

$= \sum$ — " —

$\alpha \in A$

da nur Nullen $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$ addiert

Insbes ist S total.

c) Sei $y := \sum_{\alpha \in A_x} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$

$= \sum_{n=1}^{\infty}$ — " — wie in b)

$$\Rightarrow \quad \|x-y\|^2 \overset{(2)}{=} \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$$

(2) f. unendl. Σ

$$\leq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_n} \rangle|^2$$

$$\leq \| x - \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n} \|^2$$

↙ nach (1) für bel $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$

Also:

$$\|x-y\| \leq \inf \{ \|x-z\| : z \in \operatorname{span} S \}$$

$$= \min \{ \|x-z\| : z \in \overline{\operatorname{span} S} = U \}$$

da $y \in U$

$\Rightarrow$ $y = P_U x$ ist Proj vom x auf U □

[Gram - Schmidsche Ortonormalisierung]

5.6.3.7

Sei $F = \{ x_n \mid n \in N \} \subset X$, $N \subset \mathbb{N}$.

25-14 a) $\exists$ ONS $S = \{ e_n \mid n \in N \}$ mit

$\overline{\text{Span } S} = \overline{\text{Span } F}$ und

b) Ist F lin. unabh., so kann S so gew. werden, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

In diesem Fall kann man e_n als

$$e_n = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\, x_n$$ schreiben.

Koeffizienten $c_{n,j}$ werden eind. festg. durch Forderung $c_{n,n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bw. OE F lin. unabh.

$\Rightarrow x_1 \neq 0$ $\Rightarrow x_2 - \lambda e_1 \neq 0$

Setze: $e_1 := \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

$$e_2 := \frac{x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1}{\| x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 \|} \Rightarrow e_2 \perp e_2$$

induktiv:

$$e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}, \quad f_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j \rangle e_j$$

$\neq 0$ wg. lin unab.

$\Rightarrow$ $S = \{e_n\}_n$ ist ONS und

$\forall n \in \mathbb{N}$: $e_n \in \operatorname{span}\{x_1, \dots x_n\}$

$x_n \in \operatorname{span}\{e_1, \dots e_n\}$

Insbes: $\overline{\operatorname{span} S} = \overline{\operatorname{span} F}$ □

Mi 5. Juli — Do 6. Juli 2023

S 6.3.8 Äquivalenzen Sei X HR, $S \subset X$ ONS.

Dann äquivalent:

(i) S ONB

(ii) $x \in X$, $x \perp S \Rightarrow x = 0$

(iii) $X = \overline{\operatorname{span} S}$

induktiv:

$$e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}, \quad f_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j \rangle e_j$$

$\neq 0$ wg. lin unab.

$\Rightarrow$ $S = \{e_n\}_n$ ist ONS und

$\forall n \in \mathbb{N}$: $e_n \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

$x_n \in \operatorname{span}\{e_1, \dots e_n\}$

Insbes: $\overline{\operatorname{span} S} = \overline{\operatorname{span} F}$ □

Mi 5. Juli — Do 6. Juli 2023

S 6.3.8 Äquivalenzen

Sei X HR, $S \subset X$ ONS

Dann äquivalent:

(i) S ONB

(ii) $x \in X$, $x \perp S \Rightarrow x = 0$

(iii) $X = \overline{\operatorname{span} S}$

Bsp. 6.3.7 ½

Wendet man Gram Schmidt auf

$$x_n : [-1,1] \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto t^n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

in $X = L^2[-1,1]$ an erhält man

$$e_n(t) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(t)\,,$$

wobei

$$P_n : [-1,1] \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (t^2-1)^n$$

die Legendre-Polynome sind.

Weierstraß-Approx-S

$\Rightarrow$ (x_n) total in $C[-1,-1]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow$ ——— " ——— $\|\cdot\|_{L^2}$

$\Rightarrow$ (e_n) ——— " ———

wg $\operatorname{span}\{e_n : n\} = \operatorname{span}\{x_n : n\}$

Also ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ONB in X

(iv) $\forall\, x \in X: \quad x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e$

$\forall\, x, y \in X$

(v) $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$

(vi) $\forall\, x \in X: \quad \|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2$

Bw: Übg

K. 6.3.9 Existenz von ONB

a) Jeder separable Prä HR X besitzt (endl. o. abz.) ONB & jedes ONS kann zu einer ONB ergänzt werden

b) Jeder HR besitzt ONB

c) Im — II — kann jedes ONS S zu ONB ergänzt werden

d) Sind S_1, S_2 ONB im Prä HR X,

so ex. bij. $\varphi: S_1 \to S_2$. Die Kardinalität des ONB ist die HR-Dimension von X : $\dim X$

e) F ür abges. UVR Y, Z eines HR X gilt:

$$Y \cap Z^\perp = \{0\} \Rightarrow \dim Y \leq \dim Z$$

$$Y \cap Z^\perp = \{0\} = Y^\perp \cap Z \Rightarrow \dim Y = \dim Z$$

Bw:

a) Gram - Schmidt

b) Zorn

c) Sei (nach b) T eine ONB vom HR $S^\perp \Rightarrow S \cup T$ ist ONB vom X

d) ① Falls $\# S_1 = m \Rightarrow X$ m-dimensional

26-3 $\Rightarrow \# S_2 = m$

Legitime Argumentation, da im endl-dim Fall

"Hilbertraum basis" = Vektorraum basis"

② Falls $\# S_1 \geq \# \mathbb{N}$:

Zu $e \in S_1$ setze $K(e) := \{\varepsilon \in S_2 \mid \langle e, \varepsilon \rangle \neq 0\}$

$\Rightarrow \# K(\varepsilon) \leq \# \mathbb{N}$ wg. 6.3.6 a)

S_1 total $\Rightarrow \bigcup_{e \in S_1} K(\varepsilon) = S_2$

$\Rightarrow \# S_2 \leq \sum_{e \in S_1} \# K(\varepsilon) \leq \# S_1 \cdot \# \mathbb{N}$

$\leq \# S_1$

Andererseits: $\# S_2 \geq \# \mathbb{N}$ (wg ①)

Analog w.o. $\Rightarrow \# S_1 \leq \# S_2$.

e) Im endl-dim Fall: Löse Gl. Syst.

Im unendl.-dim Fall: ähnlich wie d). □

k 6.3.10

S ONB des HR $X \Rightarrow X \cong \ell^2(A) \cong \ell^2(S)$.

Bw: $S = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$

Für $x \in X$ dfn $Tx \in \ell^2(A)$ durch

$$(Tx)(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle$$

$\Rightarrow T: X \longrightarrow \ell^2(A)$ linear

Parseval: T isometrisch (insbes Tx tats. in $\ell^2(A)$)

Surjektivität:

Für $(c_\alpha)_{\alpha \in A} \in \ell^2(A)$ ist $x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha$

ein El. aus X (vgl. Bw. S. 6.3.6 (b) „$\Leftarrow$")

mit $Tx = (c_\alpha)$. □

Insbesondere

H separabler HR $\Rightarrow$ $H \cong \ell^2(\mathbb{N})$

$L^2[0,1] \cong \ell^2(\mathbb{N})$ S.v. Fischer-Riesz

6.3.3 bis

Bsp. 6.3.11

a) $\{e_\alpha : \beta \mapsto \delta_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \in A}$ ONB von $\ell^2(A)$

vgl. K. 6.3.10

b) Weierstraß besagte, dass

$S_g \cup S_u$ total, also ONB im

$L^2((0,1), \mathbb{K})$, analg für

$S = (e_n : t \mapsto e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{N}_0}$

im $L^2((0,1), \mathbb{C})$

S. 6.3.6: Jedes $f \in L^2(0,1)$ läßt

sich darstellen als

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle f, e_n \rangle e_n$$

d.h. $\| f - \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n \|_{L^2} \xrightarrow[N]{} 0$

konvergenz im quadratischen Mittel.

Dabei

$$\langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(t)\, e^{2\pi i n t}\, dt$$

$$= \hat{f}(n)$$

[Andere Normierung als in §6.1]

Damit haben wir einen natürlichen Konvergenzbegriff für Fourierreihen gefunden.

c) Nach def von

$AP^2(\mathbb{R})$ ist $= \overline{\operatorname{span}\{f_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}}$

§ 6.4 Fouriertransformation

Notation 6.4.1

Für $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ setze:

$$x\xi = \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j \,, \quad x^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2$$

$$|x| = \left[\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right]^{1/2}$$

$C_0(\mathbb{R}^d) = \{ g \in C(\mathbb{R}^d) \mid \forall \varepsilon > 0 : \{x : |g(x)| \geq \varepsilon\} \text{ kompakt} \}$

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen setze

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi \in \underbrace{C^\infty(\Omega)}_{\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)} : \underbrace{\operatorname{supp} \varphi}_{\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}} \text{ kompakt} \}$$

φ heißt glatte Fkt mit kompaktem Träger.

L. 6.4.2

$\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$.

Bw: Übg

D. 6.4.3

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ defn. Funktion

$$\mathcal{F}f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}, \quad \xi \longmapsto [2\pi]^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$\mathcal{F}f$ heißt Fouriertransformierte von f

$\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}f$ ist linear, heißt Fouriertransformation

Prüfe nach: $(\mathcal{F}f)(\xi)$ tatsächlich wohldef

$\xi \mapsto (\mathcal{F}f)(\xi)$ messbar.

S. 6.4.4

a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^d) :=$

$\{ g \in C(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, \varepsilon > 0$ ist

$\{ x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| \geq \varepsilon \}$ kompt $\}$

b) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ ist beschr. Op.

mit $\|\mathcal{F}\| \leq [2\pi]^{-d/2}$ $\|f\|_{L^1}$

BW $|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq [2\pi]^{-d/2} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx}$

also $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

mit Norm $\leq [2\pi]^{-d/2}$

Noch z.z: $\mathcal{F}f$ stetig & verschwindet im Unendlichen

Sei (ξ^k) Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $\xi^k \to \xi$

exp stetig $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^d: \underbrace{|e^{-ix\xi^k} - e^{-ix\xi}|}_{\to 0}$

$$|(\mathcal{F}f)(\xi^k) - (\mathcal{F}f)(\xi)| \leq [2\pi]^{-d/2} \int \underbrace{|f|}_{\leq 2|f| \in L^1} dx$$

intb. Majorante.

$\longrightarrow 0$ nach dominierter Konvergenz.
$k \to \infty$

Damit $\mathcal{F}f$ stetig.

Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist

reicht es noch z.z:

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d): \lim_{|\xi| \to \infty} |(\mathcal{F}f)(\xi)| = 0$$

Denn: Ist $g \in L^1$ und $f_\varepsilon \in \mathcal{D}$ mit

$\|f_\varepsilon - g\|_{L^1} < \varepsilon$ so

$$\|\mathcal{F}g - \mathcal{F}f_\varepsilon\|_\infty \leq [2\pi]^{-d/2} \|f_\varepsilon - g\|_{L^1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{[2\pi]^{d/2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{|\xi| \to \infty} |\mathcal{F}g(\xi)| \leq \lim |\mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)| + \frac{\varepsilon}{[2\pi]^{d/2}}$$

$$\| \quad 0$$

Nun $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $R > 0$, $|\xi| > R$ & (*)

$\Rightarrow \exists$ koord. ξ_j mit $|\xi_j| > \frac{R}{\sqrt{d}}$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}f(\xi)| = \left| \frac{-1}{[2\pi]^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi_j} dx \right| \quad \text{(part. Int.)}$$

$$\leq [2\pi]^{-d/2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^1} \frac{\sqrt{d}}{R} \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

Benutzten: $f \in \mathcal{D}$ diffb $\to$ part. Int.

supp f kompakt $\subset B_R$ (*) $\to$ keine Randterm.

□

26-11

Suchen dichten UVR von L^1 der umfangreicher als $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ist.

D. 6.4.5

(a) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ <u>schnell fallend</u> $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^d: \quad \lim_{|x| \to \infty} x^\alpha f(x) = 0 \qquad (xx)$$

wobei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall\, \beta \in \mathbb{N}_0^d \text{ ist } D^\beta f \text{ schnell fallend} \}$$

wobei $D^\beta f = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot D_d^{\beta_d} f$

$(xx) \Leftrightarrow \lim_{|x| \to \infty} |x|^m f(x) = 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \lim_{|x| \to \infty} P(x) f(x) = 0$ für alle Polyn. $P: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow \forall\, m \in \mathbb{N}: \; |f(x)| \leq \text{const}_m \, (1 + |x|^m)^{-1}$

Für $f \in C^\infty$:

$f \in \mathcal{S} \iff \forall\, m \in \mathbb{N}_0,\ \beta \in \mathbb{N}_0^d$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(1 + |x|^m\right) \left|D^\beta f(x)\right| < \infty$$

Bh: $\mathcal{S} \subset L^p$ für $p \in [1, \infty)$.

Bw: Für $m p - (d-1) > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{c}{1+|x|^m}\right)^p dx$$

$$= c^p \, \underbrace{\omega_{d-1}}_{= |S^{d-1}|} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+r^m}\right)^p r^{d-1} \, dr < \infty$$

$f \in \mathcal{S} \Rightarrow x^\alpha f \in \mathcal{S}$ und $D^\alpha f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

L. 6.4.6 Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gelten

(a) $\mathcal{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

$D^\alpha(\mathcal{F} f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F} f$

wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

<u>Bw</u> (a)

$$D^\alpha (\mathcal{F} f)(\xi) = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \underbrace{[2\pi]^{-d/2}}_{c} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$\overset{(xxx)}{=} c \int f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\, c \int f(x)\, x^\alpha\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\, \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)$$

(xxx) mit S. über dominierte Konv.

und Majorante $x^\alpha f \in \mathcal{S} \subset L^1$ □

(b) Übg.:

part. Intg. mit verschwindenden Randt.

ähnl. wie 6.4.4 (a).

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\, \xi^\alpha\, \mathcal{F} f$

wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Bw (a)

$$D^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \underbrace{[2\pi]^{-d/2}}_{c} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$\overset{(xxx)}{=} c \int f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\, c \int f(x)\, x^\alpha\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\, \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)$$

(xxx) mit S. über dominierte Konv.

und Majorante $x^\alpha f \in \mathcal{S} \subset L^1$ □

(b) Übg.:

part. Intg. mit verschwindenden Randt.

ähnl. wie 6.4.4 (a).

Lem besagt ins besondere

$$f \xmapsto{\mathcal{F}} \mathcal{F}f$$

Ableitung — Multiplikation

Differentialop. — —||— — sop.

Vgl.

diagonalisierb. Matrix A $\xrightarrow{\text{Unitär}}$ $UAU^{-1} = D$ diagonal

kann manche Eigens des Op. direkt ablesen

L. 6.4.7

$$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Bw: Verw. L. 6.4.6

$(a) \Rightarrow \mathcal{F}g \in C^\infty$

Noch z.z.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \quad \left| \xi^\alpha D^\beta (\mathcal{F}g)(\xi) \right| \longrightarrow 0 \quad (|\xi| \to \infty)$$

$$|\mathcal{F}(D^\alpha x^\beta g)(\xi)| \overset{(b)}{=} |\xi^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi)|$$

$D^\alpha f \in \mathcal{F} \subset L^1$ (underbrace: $= D^\alpha f$)

$\in C_0$ 5.6.4.4

$f = x^\beta g$

$$\overset{(a)}{=} |\xi^\alpha D^\beta (\mathcal{F}g)(\xi)| \longrightarrow 0 \quad (|\xi| \to \infty)$$

□

Aus konzeptioneller & technischer Motivation schauen wir uns nun

W-Dichte der Gauß-Vert

$$[2\pi]^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx = 1, \quad g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

an.

Notation: $g_a(x) = g(ax), \quad a > 0$

L. 6.4.8

(i) $(\mathcal{F}\gamma)(\xi) = e^{-\xi^2/2} = \gamma(\xi)$

„ Eig-Fkt zu EW = 1 "

(ii) $(\mathcal{F}\gamma_a)(\xi) = \frac{1}{a^d}(\mathcal{F}\gamma)\left(\frac{\xi}{a}\right)$

$\overset{(i)}{=} \frac{1}{a^d}\gamma\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a^d}\gamma_{\frac{1}{a}}(\xi)$

Bw (i)

Sei $d=1$:

$\gamma' = -\xi e^{-\xi^2/2}$, d.h. γ löst

gDgl. $y' + xy = 0$

mit $y(0) = 1$

} AWP

Ins bes on dere

$0 \overset{\text{linear}}{=} \mathcal{F}(y' + x\gamma) \overset{6.4.6}{=} i\xi\mathcal{F}\gamma + \left(\frac{1}{-i}\mathcal{F}\gamma\right)'$

$$\Rightarrow \quad (\mathcal{F}\gamma)' + \xi(\mathcal{F}\gamma) = 0$$

und $(\mathcal{F}\gamma)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, e^{0} \, dx$

$= 1$ wg. Norm.,

also auch Lsg. d. AWP.

Lsg eind. $\Rightarrow \quad \mathcal{F}\gamma = \gamma$

Für $d > 1$

$$(\mathcal{F}\gamma)(\xi) = [2\pi]^{-d/2} \int_{\mathbb{R}} dx_1 \ldots \int_{\mathbb{R}} dx_d \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d} \left(e^{-x_j^2/2} \, e^{-i x_j \xi_j} \right)$$

$$= e^{-\xi_1^2/2} \cdot \ldots \cdot e^{-\xi_d^2/2} = \gamma(\xi)$$

$d-1$-dim Fall iterativ

L. 6.4.9 Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$: $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$

($\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$ L 6.4.7)

(ii) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist bij &

$\forall x$: $(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = [2\pi]^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, e^{+ix\xi}\, d\xi$ (x)

(iii) $\forall\, f, g \in \mathcal{S}$:

$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$

insb. $\| \mathcal{F}f \|_{L^2} = \| f \|_{L^2}$

Bw

(i) Der direkte Zugang, das $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ Integral $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x)$ nach Dfn zu berechnen, führt auf Integrierbarkeitsprobleme. Deshalb bedienen wir

uns der Abschneidefkt

$$\varphi(ax) = e^{-\frac{a^2x^2}{2}} \xrightarrow{a \to 0} 1$$

Schritt (1)

$$\forall f, g \in \mathcal{S}: \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f)(x)\, g(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} c \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi\, g(x)\, dx$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, (\mathcal{F}g)(\xi)\, d\xi$$

$$\langle \mathcal{F}f, \bar{g} \rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}g} \rangle \qquad (xx)$$

Fubini ist gerechtfertigt, da

$\mathbb{R}^{2d} \ni (x, \xi) \mapsto f(\xi)\, g(x)\, e^{-ix\xi}$

beschr & schnell fallend $\Rightarrow$ int.b.

(2) Für $a > 0$ und $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ wollen wir $g(x) = e^{-ix\xi_0} \varphi(ax)$ in (1) einsetzen. Berechne dazu

$$(\mathcal{F} g)(\xi) = [2\pi]^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi_0} \underbrace{\varphi(ax)}_{=\varphi_a(x)} e^{-ix\xi} dx$$

$$= (\mathcal{F} \varphi_a)(\xi + \xi_0)$$

$$= \frac{1}{a^d} (\mathcal{F} \varphi)\left(\frac{\xi + \xi_0}{a}\right)$$

Eins. in (1) Nun $a \to 0$

$$c \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\mathcal{F} f)(x)}_{\leq |\mathcal{F} f|} e^{-ix\xi_0} \underbrace{\varphi(ax)}_{\to 1} dx$$

$$= c \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \underbrace{\frac{1}{a^d}}_{=u} (\mathcal{F}\varphi)\left(\frac{\xi + \xi_0}{a}\right)$$

$$= c \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(au - \xi_0)}_{\to f(-\xi_0),\ f \text{ stetig}} \underbrace{\varphi(u)}_{\leq \|f\|_\infty \cdot \varphi(\cdot)} du$$

Lebesgue-S. ü. dominierte Konv:

$$c \int (\mathcal{F}f)(x)\, e^{-ix\xi_0}\, dx = c \int_{\mathbb{R}^d} f(-\xi_0)\, g(u)\, du$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \text{ Normierung}$$

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(\xi_0) \qquad\qquad = f(-\xi_0) \cdot 1$$

(ii) $\mathcal{F}^4 = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \Rightarrow \mathcal{F}$ bij., $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$

$\Rightarrow (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = [\mathcal{F}^2(\mathcal{F}f)](x) = (\mathcal{F}f)(-x)$

d.h. Vorzeichenwechsel im Exponenten.

(x)

Letzte Aussage folgt aufgrund (xx) □

Bm. 6.4.10

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ lin, bij., $\|\cdot\|_{L^2}$ - Isom.

$\Rightarrow \exists!$ lin & stet Forts.

$\mathcal{F}_2 : L^2 \longrightarrow L^2$ ($\cap$ dicht)

Fourier - (Plancharel-)
Transformation

ebenfalls $\|\cdot\|_{L^2}$ - Isom. &

$$\forall f, g \in L^2 : \langle \mathcal{F}_2 f, \mathcal{F}_2 g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$$

Achtung:

(i) $\mathcal{F}_2$ abstrakt durch Forts dfn.

Für „schlechte" $f \in L^2$ muss Intg.

$$\int f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$ nicht ex.

(ii) Für $f \in \mathcal{S}$ ist $\mathcal{F} f$ eine Fkt

$f \in L^2$ $\mathcal{F}_2 f$ Fkt-klasse

27-9 Fakt (i) kann teilw „geheilt" werden

S. 6. 4. 11

(a) $f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow$

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = [2\pi]^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

(b) $f \in L^2 \Rightarrow$ L^2 - Norm konv.

$$\mathcal{F}_2 f = \lim_{R \to \infty} g_R$$

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = \text{l.i.m}\ [2\pi]^{-d/2} \int_{B_R} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

Limes im Mittel

mit: $g_R(\xi) = [2\pi]^{-d/2} \int_{B_R(0)} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$

Haben 2 Approx. kennengelernt: Hier

$$\mathbb{1}_{B_R} \xrightarrow[R \to \infty]{} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$$

vorher

$$g_a \xrightarrow[a \to 0]{} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$$