

Funktionalanalysis, SoSe 2023

Lösungen für Blatt 11

Aufgabe 1) (a) Wir zeigen zunächst gemäß Hinweis, dass die Graphennormen $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T+S}$ äquivalent sind. Dazu beobachten wir für $x \in D_T$ einerseits

$$\begin{aligned}\|x\|_{T+S} &= \|x\|_X + \|(T+S)x\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y \\ &\leq (a+1)\|x\|_X + (b+1)\|Tx\|_Y \leq (1 + \max\{a, b\})\|x\|_T.\end{aligned}$$

Umgekehrt haben wir

$$\|Tx\|_Y \leq \|(T+S)x\|_Y + \|Sx\|_Y \leq a\|x\|_X + b\|Tx\|_Y + \|(T+S)x\|_Y,$$

und Umstellen nach $\|Tx\|_Y$ liefert

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq \left(1 + \frac{a}{1-b}\right)\|x\|_X + \frac{1}{1-b}\|(T+S)x\|_Y.$$

Also sind $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T+S}$ in der Tat äquivalent.

Da T nach Voraussetzung abgeschlossen ist, ist $(D_T, \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum, und mit der Äquivalenz der Normen ist dann ebenso $(D_T, \|\cdot\|_{T+S})$ ein Banachraum. Ist also (x_n) eine Folge in D_T mit $x_n \rightarrow x \in X$ und $(T+S)x_n \rightarrow y \in Y$, dann ist (x_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{T+S}$ und somit konvergent. Es gilt also $x \in D_T$ und $(T+S)x = y$, d.h. auch $T+S$ ist abgeschlossen.

(b) Wir betrachten den Hilfsoperator $S_0 := S|_{D_T}: D_T \rightarrow Y$ mit $S_0x = Sx$ für alle $x \in D_T$ und zeigen, dass S_0 als Operator von $(D_T, \|\cdot\|_T)$ nach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ stetig ist. Da beide Räume vollständig sind, genügt es dazu nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Abgeschlossenheit zu zeigen. Sei also (x_n) eine Folge in $D_T \subset D_S$ mit $x_n \rightarrow x \in D_T$ bezüglich $\|\cdot\|_T$ und $Sx_n = S_0x_n \rightarrow y \in Y$ bezüglich $\|\cdot\|_Y$. Da S nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt $Sx = y$, und wegen $x \in D_T$ dann auch $S_0x = Sx = y$. Also ist S_0 abgeschlossen, nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen also stetig, d.h. es existiert $C > 0$ mit

$$\|Sx\|_Y = \|S_0x\|_Y \leq C\|x\|_T \quad \text{für alle } x \in D_T.$$

Dies zeigt die Behauptung mit $a = b = C$.

Aufgabe 2) (a) Es ist leicht zu sehen, dass für jedes $x \in X$ die Abbildung $i_X x: X' \rightarrow \mathbb{K}$ linear ist, und wegen $|(i_X x)(x')| = |x'(x)| \leq \|x'\| \|x\|$ für alle $x' \in X'$ auch stetig; es gilt also $i_X x \in X''$. Nach Korollar 5.1.9 aus Hahn-Banach gibt es ferner ein $x' \in X'$ mit $\|x'\| \leq 1$ und $x'(x) = \|x\|$ (wobei $x' = 0$ falls $x = 0$ und sonst sogar $\|x'\| = 1$), also $|(i_X x)(x')| = |x'(x)| = \|x\|$. Insgesamt gilt also $\|i_X x\| = \|x\|$. Damit ist die Abbildung $i_X: X \rightarrow X''$ wohldefiniert, offensichtlich linear und isometrisch.

Alternativ zu Korollar 5.1.9 kann man auch mit Korollar 5.1.10 arbeiten, welches direkt die Identität

$$\|x\| = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |x'(x)| = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |(i_X x)(x')| = \|i_X x\|$$

liefert.

(b) Sei zunächst $M \subset X$ beschränkt. Dann gilt offensichtlich

$$\sup_{x \in M} |x'(x)| \leq \|x'\| \sup_{x \in M} \|x\| < \infty \quad \text{für alle } x' \in X',$$

d.h. $x'(M) \subset \mathbb{K}$ ist für alle $x' \in X'$ beschränkt.

Sei umgekehrt $x'(M) \subset \mathbb{K}$ für jedes $x' \in X'$ beschränkt. Dann gilt

$$\sup_{x \in M} |(i_X x)(x')| = \sup_{x \in M} |x'(x)| < \infty \quad \text{für alle } x' \in X'.$$

Da X' ein Banachraum ist, liefert das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit zusammen mit Teil (a) dann

$$\sup_{x \in M} \|x\| = \sup_{x \in M} \|i_X x\| < \infty,$$

d.h. $M \subset X$ ist beschränkt.

(c) Sei zunächst $M \subset X'$ beschränkt. Dann gilt offensichtlich

$$\sup_{x' \in M} |x'(x)| \leq \|x\| \sup_{x' \in M} \|x'\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X,$$

d.h. $\{x'(x) : x' \in M\} \subset \mathbb{K}$ ist für alle $x \in X$ beschränkt.

Sei umgekehrt $\{x'(x) : x' \in M\} \subset \mathbb{K}$ für jedes $x \in X$ beschränkt. Dann gilt

$$\sup_{x' \in M} |x'(x)| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Da X nach Voraussetzung ein Banachraum ist, liefert das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit dann

$$\sup_{x' \in M} \|x'\| < \infty,$$

d.h. $M \subset X'$ ist beschränkt.

Aufgabe 3) Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $u'_n : U \rightarrow \mathbb{K}$ durch $u'_n(x) := y_n$, wo $(y_k)_k = Sx$; $u'_n(x)$ ist also gerade das n -te Folgenglied von Sx . Mit S ist dann offensichtlich auch u'_n linear und wegen

$$|u'_n(x)| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |u'_k(x)| = \|Sx\|_\infty \leq \|S\| \|x\| \quad \text{für alle } x \in U$$

auch stetig mit $\|u'_n\| \leq \|S\|$. Wir wählen mit Hahn-Banach eine normgleiche Fortsetzung $x'_n \in X'$, d.h. $x'_n|_U = u'_n$ und $\|x'_n\| = \|u'_n\| \leq \|S\|$. Dann gilt

$$\sup_n |x'_n(x)| \leq \|S\| \|x\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X,$$

und wir können schließlich $T: X \rightarrow \ell^\infty$ durch $Tx := (x'_n(x))_n$ definieren. T ist dann wohldefiniert, offensichtlich linear und erfüllt sowohl $\|Tx\|_\infty \leq \|S\|\|x\|$ für alle $x \in X$ (d.h. $\|T\| \leq \|S\|$), als auch $T|_U = S$. Letzteres liefert automatisch $\|T\| \geq \|S\|$, insgesamt also $\|T\| = \|S\|$. Damit ist T eine gesuchte Fortsetzung von S .

Präsenzaufgabe) Wir erinnern an die elementare Abschätzung (Youngsche Ungleichung) $2ab \leq a^2 + b^2$ für reelle Zahlen $a, b \geq 0$. Ersetzen wir hierin a und b durch $a/\sqrt{\delta}$ bzw. $b\sqrt{\delta}$, $\delta > 0$, erhalten wir

$$2ab = 2\left(\frac{a}{\sqrt{\delta}}\right)(\sqrt{\delta}b) \leq \frac{a^2}{\delta} + \delta b^2 \quad \text{für alle } a, b \geq 0, \delta > 0. \quad (1)$$

Da $D \subset C([0, 1]) \subset L^\infty([0, 1])$, gilt offensichtlich $D \subset D_h$ mit

$$\|M_h f\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^2} \|f\|_\infty \quad \text{für alle } f \in D, \quad (2)$$

und im weiteren Verlauf genügt es $\|f\|_\infty$ für $f \in D$ abzuschätzen. Wir gehen hierzu ähnlich wie im Beweis von Satz 1.4.1 (a) zu den elementaren Sobolev-Abschätzungen vor. Mit der Inklusion $C^1([0, 1]) \subset D$ betrachten wir dazu zunächst $f \in C^1([0, 1])$ reellwertig. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung für f^2 liefert dann die Existenz eines $\xi \in [0, 1]$ mit

$$\int_0^1 f^2(t) dt = f^2(\xi).$$

Weiter folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für f^2 für alle $x \in [0, 1]$ dann

$$f^2(x) = f^2(\xi) + \int_\xi^x (f^2)'(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt + \int_\xi^x 2f(t)f'(t) dt,$$

mit (1) für alle $x \in [0, 1]$ und alle $\delta > 0$ also

$$\begin{aligned} f^2(x) &\leq \int_0^1 f^2(t) dt + \int_0^1 2|f(t)||f'(t)| dt \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 f^2(t) dt + \delta \int_0^1 (f'(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Für komplexwertiges $f \in C^1([0, 1])$ beachten wir $|f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2$ und $|f'|^2 = (\operatorname{Re} f')^2 + (\operatorname{Im} f')^2 = ((\operatorname{Re} f)')^2 + ((\operatorname{Im} f)')^2$, wenden Obiges auf die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ getrennt an und erhalten

$$\|f\|_{L^\infty}^2 \leq \|\operatorname{Re} f\|_{L^\infty}^2 + \|\operatorname{Im} f\|_{L^\infty}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|f\|_{L^2}^2 + \delta \|f'\|_{L^2}^2,$$

also

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{1/2} \|f\|_{L^2} + \sqrt{\delta} \|f'\|_{L^2}$$

für alle $f \in C^1([0, 1])$ und alle $\delta > 0$. Im Hinblick auf (2) wählen wir nun $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so, dass $\sqrt{\delta}\|h\|_{L^2} \leq \varepsilon$. Mit $f' = Tf$ liefert dies dann schließlich

$$\|h\|_{L^2}\|f\|_\infty \leq C_\varepsilon\|f\|_{L^2} + \varepsilon\|Tf\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in C^1([0, 1]) \quad (3)$$

mit

$$C_\varepsilon := \|h\|_{L^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_\varepsilon}\right)^{1/2}.$$

Mit (2) bleibt nur noch, (3) auf alle $f \in D$ auszudehnen. Wir erreichen dies durch ein einfaches Approximationsargument: Sei $f \in D$. Nach Voraussetzung gibt es dann $g = f' = Tf \in L^2([0, 1])$ mit

$$f(y) - f(x) = \int_{[x, y]} g \, \lambda \quad \text{für alle } 0 \leq x < y \leq 1.$$

Wir wählen eine Folge (g_n) in $C([0, 1])$ mit $g_n \rightarrow g$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ (setze dazu g durch 0 auf $\mathbb{R}$ fort und beachte die Präsenaufgabe von Blatt 4) und definieren $f_n \in C^1([0, 1])$ durch

$$f_n(x) := f(0) + \int_0^x g_n(t) \, dt, \quad x \in [0, 1].$$

Man sieht sofort, dass $f'_n = g_n \rightarrow g' = Tf$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$, und dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{[0, 1]} |g_n - g| \, \lambda \leq \|g_n - g\|_{L^2} \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

also $\|f_n - f\|_\infty \leq \|g_n - g\|_{L^2}$, insbesondere $f_n \rightarrow f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{L^2}$. Aus (3) für f_n erhalten wir

$$\|h\|_{L^2}\|f_n\|_\infty \leq C_\varepsilon\|f_n\|_{L^2} + \varepsilon\|f'_n\|_{L^2}$$

für alle n , und der Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ zeigt schließlich (3) für $f \in D$, was den Beweis mit (2) abschließt.