Funktionalanalysis, SoSe 2023

Lösungen für Blatt 07

Aufgabe 1) (a) Zunächst bildet jedes T_h sicherlich nach $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ ab und ist sogar bijektiv, denn eine Inverse ist in Form von T_{-h} gegeben. Insbesondere ist jedes T_h surjektiv. Es bleibt also nur zu zeigen, dass T_h isometrisch ist. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ mit $p < \infty$ folgt dies über den Transformationssatz für Integrale mit der Transformation $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto y := x - h$ anhand der Rechnung

$$\|T_h f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h)|^p \, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \, \lambda(\mathrm{d}y) = \|f\|_{L^p}^p.$$

Für $p = \infty$, d.h. $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda)$, gilt für ein $C \geq 0$ sicherlich genau dann $|f| \leq C$ fast überall in $\mathbb{R}^d$, wenn $|f(\cdot - h)| \leq C$ fast überall in $\mathbb{R}^d$. Dies zeigt

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| = \text{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x-h)| = \|T_h f\|_{L^\infty}.$$

(b) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $p < 0$. Wir können wegen $T_{z+h} = T_h T_z$ für alle $z, h \in \mathbb{R}^d$ (Trafoformel!) ohne Einschränkung $z = 0$ annehmen (sonst betrachte $T_z f$ statt f). Sei $\varepsilon > 0$. Wir wissen, dass der Raum $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ liegt (vgl. Präsenzaufgabe zu Blatt 4). Wir können also $g \in C_c\mathbb{R}^d$ wählen mit $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. Nach Definition ist der Träger $\operatorname{supp} g$ von g kompakt, also gibt es $R > 0$ mit $\operatorname{supp} g \subset B_R(0)$. Auf dem Kompaktum $\overline{B_R(0)}$ ist g automatisch gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\delta \in (0, R)$ mit

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(B_{2R}(0))^{1/p}} \tag{1}$$

für $x, y \in \overline{B_R(0)}$ mit $|x - y| < \delta$. Tatsächlich gilt letzteres sogar für *alle* $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $|x - y| < \delta$: Falls hierbei $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$, so gilt (1) mit $g(x) = 0 = g(y)$, und falls $x \in B_R(0)$ und $y \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$ (umgekehrt analog), so gibt es ein $z \in \partial B_R(0)$ mit $|x - z| \leq |x - y| < \delta$ (etwa auf der direkten Verbindungsgeraden zwischen x und y). Mit $g(y) = 0 = g(z)$ gilt dann $|g(x) - g(y)| = |g(x) - g(z)|$, und (1) folgt wegen $x, z \in \overline{B_R(0)}$ auch für diese x, y. Insbesondere zeigt dies, dass g auf ganz $\mathbb{R}^d$ gleichmäßig stetig ist.

Für $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|x| \geq 2R > R + \delta$ gilt sicherlich $|x - h| > R$, solange $|h| < \delta$. Wegen $\operatorname{supp} g \subset B_R(0)$ haben wir damit $\operatorname{supp}(T_h g) \subset B_{2R}(0)$, falls $|h| < \delta$. Der Träger von g wird unter der Translation also zwar verschoben, kann für kleines $|h|$ aber den etwas größeren Ball $B_{2R}(0)$ nicht verlassen. Mit Hilfe von (1) folgt nun

$$\begin{aligned} \|T_h g - g\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-h) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_{B_{2R}(0)} |g(x-h) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon^p}{\lambda(B_{2R}(0))} \cdot \lambda(B_{2R}(0)) = \varepsilon^p \end{aligned}$$

für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \delta$. Per Dreiecksungleichung unter Berücksichtigung von Teil (a) liefert dies schließlich

$$\begin{aligned}\|T_h f - f\|_{L^p} &\leq \|T_h f - T_h g\|_{L^p} + \|T_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= 2\|g - f\|_{L^p} + \|T_h g - g\|_{L^p} < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,\end{aligned}$$

solange $|h| < \delta$, was die Behauptung zeigt.

Für $p = \infty$ ist die Aussage aus (b) falsch. Zum Beispiel für $f = \mathbb{1}_{(0,1)}$ (für $d = 1$) und beliebiges $h > 0$ sieht man nämlich sofort, dass $T_h f = \mathbb{1}_{(h,1+h)}$ und somit $|T_h f(x) - f(x)| = 1$ für alle $x \in [1, 1+h)$, also $\|T_h f - f\|_{L^\infty} \geq 1$.

Aufgabe 2) (a) Zunächst halten wir noch einmal fest, dass das Produkt von invertierbaren Elementen aus $\mathcal{A}$ natürlich stets wieder invertierbar ist. Insbesondere kann ein Produkt also nur dann nicht invertierbar sein, wenn mindestens ein Faktor nicht invertierbar ist.

Sei nun $\tau \in \sigma(R_x(\lambda))$ für ein $\lambda \in \rho(x)$. Dann ist $\tau \neq 0$, da $R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ nach Definition selber invertierbar ist mit Inverse $\lambda e - x$ (also $0 \notin \sigma(R_x(\lambda))$). Wir betrachten $\mu := \lambda - 1/\tau$ (womit $\tau = (\lambda - \mu)^{-1}$) und zeigen $\mu \in \sigma(x)$. In der Tat wäre anderenfalls $\mu e - x$ invertierbar, also auch

$$\tau(\mu e - x)R_x(\lambda) = \big((\tau\lambda - 1)e - \tau x\big)R_x(\lambda) = \big(\tau(\lambda e - x) - e\big)R_x(\lambda) = \tau e - R_x(\lambda),$$

im Widerspruch zu $\tau \in \sigma(R_x(\lambda))$.

Sei umgekehrt $\tau = (\lambda - \mu)^{-1}$ mit $\mu \in \sigma(x)$ und $\lambda \in \rho(x)$ (insb. $\lambda \neq \mu$). Wäre nun $\tau e - R_x(\lambda)$ invertierbar, so auch

$$(\lambda - \mu)\big(\tau e - R_x(\lambda)\big)(\lambda e - x) = (\lambda e - x) - (\lambda - \mu)e = \mu e - x,$$

im Widerspruch zu $\mu \in \rho(x)$.

(b) Sei $e - xy$ invertierbar. Im Spezialfall $\|x\|\|y\| < 1$ hätten wir mit der Identität $(yx)^k = y(xy)^{k-1}x$, $k \in \mathbb{N}$ (Induktion) anhand der Neumannschen Reihe

$$(e - yx)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(yx)^k = e + y\left(\sum_{k=1}^{\infty}(xy)^{k-1}\right)x = e + y(e - xy)^{-1}x,$$

und der letzte Ausdruck ist auch ohne die Annahme $\|x\|\|y\| < 1$ sinnvoll. Wir raten daher $(e - yx)^{-1} = e + y(e - xy)^{-1}x$. In der Tat sieht man sofort, dass $(e - yx)y = y(e - xy)$, und somit

$$(e - yx)\big(e + y(e - xy)^{-1}x\big) = (e - yx) + y(e - xy)(e - xy)^{-1}x = (e - yx) + yx = e,$$

und analog $(e + y(e - xy)^{-1}x)(e - yx) = e$.

Die umgekehrte Implikation folgt daraus ebenso mit vertauschten Rollen von x und y.

(c) Für $\lambda \neq 0$ gilt $\lambda e - xy = \lambda(e - \lambda^{-1}xy)$ sowie $\lambda e - yx = \lambda(e - \lambda^{-1}yx)$. Nach (b) ist dabei $(e - \lambda^{-1}xy)$ genau dann invertierbar wenn $e - y(\lambda^{-1}x) = e - \lambda^{-1}yx$

invertierbar ist. Damit ist $\lambda e - xy$ genau dann invertierbar, wenn $\lambda e - yx$ es ist. Dies zeigt $\rho(xy) \setminus \{0\} = \rho(yx) \setminus \{0\}$, also auch $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$.

Dass der Punkt 0 tatsächlich ausgeschlossen werden muss, sieht man zum Beispiel anhand des Links- und Rechtsshifts auf ℓ^p: Für

$$S_+ \colon (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{und} \quad S_- \colon (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

als Operatoren aus der Banachalgebra $L(\ell^p)$ gilt offensichtlich $S_- S_+ = \mathrm{id}_{\ell^p}$, insbesondere $0 \in \rho(S_- S_+)$, aber $S_- e_1 = 0$ (mit $e_1 = (1, 0, \dots)$) und somit $S_+ S_- e_1 = 0$ und $0 \in \sigma(S_+ S_-)$.

Bemerkung: Dieses Beispiel mit Shiftoperatoren zeigt auch, dass in Banachalgebren eine Linksinverse keine Rechtsinverse sein muss (und umgekehrt). Ferner ist S_+ injektiv, aber nicht surjektiv, und S_- ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 3) (a) Wir schreiben abkürzend $a := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le \|x\| < \infty$. Offensichtlich gilt $\liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \ge a$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[N]{\|x^N\|} \le a + \varepsilon$, also $\|x^N\| \le (a+\varepsilon)^N$. Mittels Division mit Rest schreiben wir für $n \in \mathbb{N}$ nun $n = kN + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}_0$, $r < N$. Mit der Submultiplikativität der Norm gilt dann

$$\|x^n\| = \|x^{kN+r}\| \le \|x^N\|^k \cdot \|x^r\| \le (a+\varepsilon)^{kN} \cdot \|x\|^r.$$

Ziehen der n-ten Wurzel liefert

$$\begin{aligned} \|x^n\|^{1/n} &\le (a+\varepsilon)^{\frac{kN}{n}} \|x\|^{\frac{r}{n}} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-\frac{r}{n}} \|x\|^{\frac{r}{n}} \\ &\le (a+\varepsilon)\Big(1 + \frac{\|x\|}{a+\varepsilon}\Big)^{\frac{r}{n}} \le (a+\varepsilon)\Big(1 + \frac{\|x\|}{a+\varepsilon}\Big)^{\frac{N}{n}}. \end{aligned}$$

Hierbei konvergiert der letzte Faktor für $n \to \infty$ gegen 1, so dass wir die Ungleichung $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le a + \varepsilon$ erhalten. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le a$. Es gilt also tatsächlich $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = a$.

(b) Hier liegt leider ein *Fehler in der Aufgabenstellung* vor: Gedacht war per Induktion zu zeigen, dass $\|x^{2k}\| = \|x\|^{2k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, woraus mit Teil (a) dann sofort die Behauptung folgen würde. Die Voraussetzungen der Aufgabe sind für den Induktionsschritt jedoch leider nicht ausreichend. Tatsächlich ist die Aussage in der Form falsch, wie man bereits anhand der Banachalgebra der 3×3 Matrizen über $\mathbb{K}$ mit der von der euklidischen Norm auf $\mathbb{K}^3$ erzeugten Operatornorm sehen kann: Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt $\|A\| = 1$ und $\|A^2\| = 1 = \|A\|^2$, aber $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 3$, also $r(A) = 0$.

Für die vorgesehene Aussage bräuchte man $\|y^2\| = \|y\|^2$ nicht nur für $y = x$, sondern für alle $y = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dies gilt etwa für *normale* Elemente einer sogenannten C^*-*Algebra*, siehe [Werner, Lemma IX.3.3], insb. für $n \times n$ Matrizen, die normal (oder sogar hermitesch) im üblichen Sinne sind; man vergleiche [Werner, Satz VI.1.7] und auch [Werner, Lemma IX.2.10].

(c) Zunächst gilt natürlich für alle $f \in C([0,1])$, dass

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \int_0^1 2t \, \mathrm{d}t = \|f\|_\infty,$$

also $\|T\| \leq 1$. Die spezielle Wahl $f \equiv 1$ zeigt dann sogar $\|T\| = 1$.

Wir zeigen nun per Induktion, dass $T^k = (2/3)^{k-1}T$, $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen, und im Induktionsschritt $k \mapsto k+1$ sehen wir für $f \in C([0,1])$ und $s \in [0,1]$, dass

$$\begin{aligned}
(T^{k+1}f)(s) = (T(T^k f))(s) &= \int_0^1 2st(T^k f)(t) \, \mathrm{d}t = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-1} \int_0^1 2st(Tf)(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-1} \int_0^1 2t^2 \int_0^1 2s\tau f(\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t \\
&= \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-1} (Tf)(s) \int_0^1 2t^2 \, \mathrm{d}t = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k} (Tf)(s),
\end{aligned}$$

wobei die Induktionsvoraussetzung im letzten Schritt der ersten Zeile verwendet wurde. Damit gilt also insbesondere $\|T^k\| = (2/3)^{k-1}\|T\|$, und mit Teil (a) folgt schließlich $r(T) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|} = \frac{2}{3} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3\|T\|}{2}} = \frac{2}{3} < \|T\|$.

Präsenzaufgabe) (a) Nach der Cauchy-Hadamard Formel gilt für den Konvergenzradius $\rho > 0$ bekanntlich $1/\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Wurzelkriterium). Mit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\|x^n\|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \frac{r(x)}{\rho} < 1,$$

liefert wiederum das Wurzelkriterium, dass die Reihe in $\mathcal{A}$ absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\|x^n\| < \infty.$$

Da die Banachalgebra nach Definition vollständig ist, folgt die Behauptung dann aus Aufgabe 2 von Blatt 2.

(b) Es gilt $(e + \frac{x}{k})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{x}{k}\right)^j$; mit $ex = x = xe$ zeigt man dies völlig analog zum Binomischen Lehrsatz im skalaren Fall. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big\| \Big(e + \frac{x}{k}\Big)^k - \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} \Big\| &\leq \sum_{j=0}^k \Big| \binom{k}{j} \frac{1}{k^j} - \frac{1}{j!} \Big| \|x\|^j = \sum_{j=0}^k \frac{\|x\|^j}{j!} - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\|x\|^j}{k^j} \\
&= \sum_{j=0}^k \frac{\|x\|^j}{j!} - \Big(1 + \frac{\|x\|}{k}\Big)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

wobei wir das skalare Resultat und

$$\frac{1}{j!} - \binom{k}{j}\frac{1}{k^j} = \frac{1}{j!}\Big(1 - \frac{k!}{(k-j)!k^j}\Big) = \frac{1}{j!}\Big(1 - \frac{k \cdot \ldots \cdot (k-j+1)}{k^j}\Big) \geq 0$$

verwendet haben. Mit der Definition von $\exp(x)$ zeigt dies schon die Behauptung.

(c) Wegen $xy = yx$ gilt der Binomische Lehrsatz $(x+y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j}$; dies zeigt man wieder genau wie im skalaren Fall, wobei die Voraussetzung $xy = yx$ wesentlich ist (siehe unten). Ähnlich wie beim Beweis der skalaren Regel für das Cauchyprodukt erhalten wir daraus

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k\right)\left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!}y^l\right) = \sum_{j=0}^n \sum_{k+l=j} \frac{1}{k!l!}x^k y^l + \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{\substack{k+l=j\\k,l\leq n}} \frac{1}{k!l!}x^k y^l \tag{2}$$

mit

$$\sum_{k+l=j} \frac{1}{k!l!}x^k y^l = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k y^{j-k} = \frac{1}{j!}(x+y)^j$$

und in ähnlicher Weise

$$\left\|\sum_{\substack{k+l=j\\k,l\leq n}} \frac{1}{k!l!}x^k y^l\right\| \leq \frac{1}{j!}(\|x\| + \|y\|)^j.$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (2) konvergiert für $n \to \infty$ wegen $\sum_{j=n+1}^{2n}(\|x\| + \|y\|)^j/j! \to 0$ also gegen 0, während der erste Summand auf der rechten Seite von (2) nach Definition gegen $\exp(x+y)$ konvergiert. Andererseits konvergiert die linke Seite von (2) nach den üblichen Grenzwertsätzen für Produktfolgen (diese gelten natürlich auch in $\mathcal{A}$ mit dem üblichen Beweis) gegen $\exp(x)\exp(y)$. Die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes; dieser Grenzwert stimmt wegen $x + y = y + x$ natürlich auch mit $\exp(y)\exp(x)$ überein.

Ohne die Voraussetzung $xy = yx$ muss weder die behauptete Identität, noch die im obigen Beweis verwendete Form des Binomischen Lehrsatzes gelten. Dies sieht man am einfachsten anhand von geeigneten 2×2 Matrizen: Betrachte etwa

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x + y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$x^2 = x, \quad y^2 = 0 = yx, \quad xy = y, \quad (x+y)^2 = x + y.$$

Insbesondere gilt $2xy \neq xy + yx \neq 2yx$, so dass der Binomische Lehrsatz in obiger Form hier bereits für $k = 2$ nicht gilt. Mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ sehen wir weiter

$$\exp(x) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^\infty \frac{x}{k!} = \mathbb{1} + (\exp(1) - 1)x, \quad \exp(x+y) = \mathbb{1} + (\exp(1) - 1)(x+y),$$

sowie

$$\exp(y) = \mathbb{1} + y,$$

so dass auch

$$\exp(x)\exp(y) \neq \exp(x+y) \neq \exp(y)\exp(x).$$