Funktionalanalysis, SoSe 2023

Lösungen für Blatt 03

Aufgabe 1) (a) Sei (f_n) eine Cauchyfolge in ℓ^p. Nach dem ersten Schritt aus der Vorlesung gibt es ein $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ mit $f_n \to f$ punktweise für $n \to \infty$. Wir haben noch zu zeigen, dass $f \in \ell^p$ und dass $f_n \to f$ in ℓ^p für $n \to \infty$.

Sei dazu erneut $\varepsilon > 0$ und $Q \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ für $m, n \geq Q$. Für $m, n \geq Q$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{j=0}^{N} |f_n(j) - f_m(j)|^p \leq \|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon^p,$$

und der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$\sum_{j=0}^{N} |f_n(j) - f(j)|^p \leq \varepsilon^p \qquad \text{für alle} \quad n \geq Q, N \in \mathbb{N}.$$

Mit $N \to \infty$ folgt für $n \geq Q$ wiederum $f_n - f \in \ell^p$ mit $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$. Insbesondere gilt daher $f_n - f \to 0$ in ℓ^p. Für $n \geq Q$ haben wir schließlich $f = f_n - (f_n - f) \in \ell^p$. Es folgt $f_n \to f$ in ℓ^p, was den Beweis abschließt.

(b) Für $f = 0 \in \ell^p$ ist nichts zu zeigen. Sei also $f \in \ell^p \setminus \{0\}$, und betrachte $g := f/\|f\|_p$. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt dann natürlich

$$|g(j)| = \frac{|f(j)|}{\|f\|_p} \leq 1.$$

Dies liefert insbesondere $\|f\|_\infty/\|f\|_p = \|g\|_\infty \leq 1$, was die Behauptung im Falle $q = \infty$ zeigt. Für $q < \infty$ erhalten wir dagegen aus $|g(j)| \leq 1$ und $p < q$ direkt $|g(j)|^q \leq |g(j)|^p$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, und die Reihe über $j \in \mathbb{N}_0$ liefert $\|g\|_q^q \leq \|g\|_p^p = 1 < \infty$, insbesondere $g \in \ell^q$. Es folgt $f = \|f_p\| g \in \ell^q$ und $\|f\|_q/\|f\|_p = \|g\|_q \leq 1$, was die Behauptung zeigt.

(c) Sei $f \in \ell^1$. Nach Teil (b) gilt dann $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$ für alle $p \geq 1$, also insbesondere $\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p$. Andererseits erhalten wir für $p \geq 1$ mit Hilfe von $|f(j)|^p = |f(j)|^{p-1} \cdot |f(j)|$ sofort

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f(j)|^{p-1} \cdot |f(j)| \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|f\|_\infty^{p-1} \cdot |f(j)| \right)^{1/p} = \|f\|_\infty^{1-1/p} \cdot \|f\|_1^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

also $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Insgesamt folgt $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Aufgabe 2) (a) Für $q = \infty$ zeigt die Standardabschätzung für Integrale direkt

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f|^p \, \mu \le \mu(\Omega) \|f\|_{L^\infty}^p < \infty, \quad f \in \mathscr{L}^p(\mu),$$

und damit die Behauptung nach Ziehen der p-ten Wurzel. Sei nun also $q < \infty$. Dann erfüllen $p' := q/p > 1$ und $q' := q/(q-p) > 1$ die Relation $1/p' + 1/q' = 1$. Ferner gilt wegen $pp' = q$ für $f \in \mathscr{L}^q(\mu)$ dann $|f|^p \in \mathscr{L}^{p'}(\mu)$. Mit $1 \in \mathscr{L}^{q'}(\mu)$ (da $\mu(\Omega) < \infty$) folgt also mit Hölder

$$\|f\|_{L^p}^p = \||f|^p \cdot 1\|_{L^1} \le \||f|^p\|_{L^{p'}} \cdot \|1\|_{L^{q'}} = \|f\|_{L^q}^p \cdot \mu(\Omega)^{1/q'} < \infty, \quad f \in \mathscr{L}^q(\mu).$$

Wegen $1/q' = (q-p)/q = 1 - p/q$ zeigt dies die Behauptung nach Ziehen der p-ten Wurzel.

(b) Die Definition von r liefert $1 = (1-\theta)r/p + \theta r/q = 1/p' + 1/q'$ mit $p' := p/((1-\theta)r)$ und $q' := q/(\theta r)$. Im Falle von $q = \infty$ haben wir hierbei $q' = \infty$ und $p' = 1$, und falls $q < \infty$ gilt $p', q' \in (1, \infty)$. In jedem Fall gilt $r \in (1, \infty)$, sowie $(1-\theta)rp' = p$ und $\theta r q' = q$. Für $f \in \mathscr{L}^p(\mu) \cap \mathscr{L}^q(\mu)$ folgt nach Hölder also

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^r}^r &= \||f|^r\|_{L^1} = \||f|^{(1-\theta)r} \cdot |f|^{\theta r}\|_{L^1} \\ &\le \||f|^{(1-\theta)r}\|_{L^{p'}} \cdot \||f|^{\theta r}\|_{L^{q'}} = \|f\|_{L^p}^{(1-\theta)r} \cdot \|f\|_{L^q}^{\theta r} < \infty;\end{aligned}$$

man beachte hierbei, dass tatsächlich $\||f|^{\theta r}\|_{L^{q'}} = \|f\|_{L^q}^{\theta r}$ sowohl für $q < \infty$ als auch für $q = \infty$. Die Behauptung folgt nun nach Ziehen der r-ten Wurzel.

Aufgabe 3) (a) Wir zeigen zunächst, dass $|||\cdot|||$ wohldefiniert ist, d.h. dass der definierende Ausdruck für $|||[x]|||$ nicht von der Wahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[x]$ abhängt. Seien also $x, y \in X$ mit $[x] = [y]$, d.h. wir haben $z := x - y \in V$. Dann gilt $V = z + V$ (als Mengen) und somit

$$\inf\{\|x - u\| : u \in V\} = \inf\{\|x - (z + u)\| : u \in V\} = \inf\{\|y - u\| : u \in V\}.$$

Also ist $|||\cdot|||$ in der Tat wohldefiniert.

Es gilt offensichtlich $|||[x]||| \ge 0$ für alle $[x] \in X/V$, und wegen $0 \in V$ gilt $0 \le |||[0]||| \le \|0\| = 0$, also $|||[0]||| = 0$. Für $\lambda \ne 0$ haben wir ferner $\lambda V = V$ (als Mengen) und somit

$$|||\lambda[x]||| = |||[\lambda x]||| = \inf\{\|\lambda x - v\| : v \in V\} = \inf\{\|\lambda x - \lambda v\| : v \in V\} = |\lambda| |||[x]|||$$

für alle $[x] \in X/V$. Es bleibt nur noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien dazu $x, y \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann nach Definition des Infimums $u, v \in V$ mit $\|x - u\| \le |||[x]||| + \varepsilon$ und $\|y - v\| \le |||[y]||| + \varepsilon$. Mit $u + v \in V$ folgt

$$\begin{aligned}|||[x] + [y]||| &= |||[x + y]||| \le \|(x + y) - (u + v)\| \le \|x - u\| + \|y - v\| \\ &\le |||[x]||| + |||[y]||| + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da aber $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies die Dreiecksungleichung für $|||\cdot|||$, womit letzteres tatsächlich eine Halbnorm auf X/V ist.

(b) Sei $0 = |||[x]||| = \inf\{\|x - v\| : v \in V\}$. Dann gibt es eine Folge (v_k) in V mit $\|x - v_k\| \to 0$ für $k \to \infty$. Da V nach Voraussetzung abgeschlossen ist, gilt dann aber $x \in \overline{V} = V$, also $[x] = [0] = 0 \in X/V$. Somit ist $|||\cdot|||$ dann eine Norm.

(c) Gemäß Aufgabe 2 von Blatt 2 haben wir zu zeigen, dass jede absolut konvergente Reihe in X/V konvergiert. Sei also $([x_k])$ eine Folge in X/V mit $\sum_{k=1}^{\infty} |||[x_k]||| < \infty$. Wir wählen nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Element $v_k \in V$ mit $\|x_k - v_k\| \leq |||[x_k]||| + 2^{-k}$. Dann gilt offensichtlich auch $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - v_k\| < \infty$, und da X nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - v_k)$ nach Aufgabe 2 von Blatt 2 in X, d.h. es gibt $y \in X$ mit $\|y - \sum_{k=1}^{n}(x_k - v_k)\| \to 0$ für $n \to \infty$. Damit folgt aber auch

$$|||[y] - \sum_{k=1}^{n}[x_k]||| = |||[y] - \sum_{k=1}^{n}[y_k]||| = |||[y - \sum_{k=1}^{n} y_k]||| \leq \|y - \sum_{k=1}^{n} y_k\| \to 0$$

für $n \to \infty$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}[x_k]$ konvergiert also in X/V, was zu zeigen war.