Funktionalanalysis, SoSe 2023

Erinnerungen aus früheren Vorlesungen

Im Folgenden werden ein paar Begriffe und Sätze aus früheren Vorlesungen, insbesondere aus dem Bereich der Analysis, in aller Kürze wiederholt. Dies soll für eine gemeinsame Stoffgrundlage sorgen und Ihnen bei der Bearbeitung des ersten Übungsblattes helfen. Es ist empfehlenswert, sich noch einmal von der Gültigkeit der hier getroffenen Aussagen zu überzeugen.

Metrische Räume

Sei (M, d_M) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Ein Punkt $x \in A$ heißt *innerer Punkt* von A , wenn für ein $r > 0$ der r -Ball $B_r(x) = \{y \in M : d_M(x, y) < r\}$ ganz in A enthalten ist, d.h. $B_r(x) \subset A$. Die Menge der inneren Punkte von A heißt *Inneres von A* und wird mit A° notiert. Die Menge A heißt *offen* (in M), wenn $A^\circ = A$, und sie heißt *abgeschlossen* (in M), wenn $M \setminus A$ offen ist. Letzteres lässt sich über Folgen charakterisieren: A ist genau dann abgeschlossen in M , wenn für jede in M konvergente Folge (x_k) aus A der Grenzwert bereits in A liegt (d.h. aus $x_k \rightarrow x$ in (M, d_M) mit $x_k \in A$ für alle k folgt $x \in A$). Die Menge A heißt *beschränkt*, wenn Sie in einem (geeignet gewählten) Ball enthalten ist, d.h. wenn es ein $x \in M$ und ein $r > 0$ gibt mit $A \subset B_r(x)$.

Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt* von A , wenn

$$B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap (M \setminus A) \quad \text{für alle } r > 0$$

gilt. Der *Rand* ∂A von A ist die Menge aller Randpunkte von A . Es gilt dann $A^\circ = A \setminus \partial A$, und der *Abschluss* $\bar{A}$ von A ist definiert durch $\bar{A} := A \cup \partial A$.

Ein Punkt $x \in M$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge (x_k) in M , wenn es eine Teilfolge $(x_{k_j})_j$ von $(x_k)_k$ gibt, die gegen x konvergiert. Ein Punkt $x \in M$ gehört genau dann zum Abschluss $\bar{A}$ einer Menge $A \subset M$, wenn er Häufungspunkt einer Folge aus A ist. Eine Folge in M heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

Stetigkeit

Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N) heißt *stetig* in einem Punkt $a \in M$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ gibt mit

$$d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta.$$

Äquivalent kann dies auch über Folgen formuliert werden (*Folgenstetigkeit*): Für jede in (M, d_M) gegen a konvergente Folge (x_k) konvergiert die Bildfolge $(f(x_k))$ in (N, d_N) gegen $f(a)$.

Die Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *stetig* (auf M), wenn f in jedem Punkt $a \in M$ stetig ist. Dies kann auch topologisch formuliert werden: Für jede in (N, d_N) offene Menge U ist das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in (M, d_M) .