

**HANDSCHRIFTLICHE NOTIZEN
ANALYSIS III LEHRAMT
IM WINTERSEMESTER 2022/2023**

PROF. DR. IVAN VESELIĆ

CAVEAT EMPTOR — ES IST, WIE ES IST.

Die vorliegende Datei beinhaltet meine handschriftlichen Notizen, anhand derer ich die Vorlesung Analysis III (für Lehramt) an der TU Dortmund im Wintersemester 2022/2023 gehalten habe. Manchmal bin in der Vorlesung selbst von den Notizen abgewichen, im großen und ganzen hielt ich mich aber recht eng daran. An wenigen Stellen habe ich die Notizen nach der Vorlesung nachbearbeitet.

Es gibt sicherlich eine Reihe von kleineren Fehlern (Schreibfehler, Vorzeichenfehler, etc.). Die Notizen können das eigene Denken und Nachvollziehen der Schritte und Argumente nicht ersetzen. Sie sind als Hilfe gedacht, um Stellen in Ihrem eigenen Manuscript, die lücken- oder fehlerhaft sind, abgleichen zu können. Falls Sie an der TU Dortmund (oder anderem Universitäten der Ruhr-Allianz) eingeschrieben sind, haben Sie die Möglichkeit, sich die Video-Aufnahmen der Vorlesung anzuschauen, die unter Moodle bereitgestellt werden. Im Zweifelsfalle konsultieren Sie die angegebene Literatur.

QUELLEN UND BEZÜGE

In der Vorlesung bezog ich mich insbesondere auf die beiden Skripte [Bru21] und [Kab18], sowie die Bücher [Kab97, Kab99] und zu einem geringeren Maße auf das Buch [Bra10]. Ich bedanke mich bei den Kollegen Rainer Brück und Winfried Kaballo, dass sie mir ihre unveröffentlichten Skripte freundlicherweise zu Verfügung gestellt haben.

Als weitere Literatur können zum Beispiel die anderen im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher nützlich sein.

Ich bedanke mich bei den Assistenten der Vorlesung, Herrn Max Kämper, Frau Friederike Lemming und insbesondere Herrn A. Seelmann.

Den Lesern wünsche ich viel Freude und Erfolg beim Nachvollziehen der Mathematik, die in diesem Manuscript dargestellt wird.

I.V., Dortmund, den 3. Februar 2023

1. INTEGRATION IM $\mathbb{R}^n$

- 1.1. Das Lebesgue-Maß.
- 1.2. Das Lebesgue-Integral.
- 1.3. Konvergenzsätze.
- 1.4. Der Satz von Fubini.
- 1.5. Transformationsformel.

2. VEKTORANALYSIS

- 2.1. Kurvenintegrale und Potentiale.
- 2.2. Integralsätze in der Ebene.
- 2.3. Flächenintegrale.

3. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- 3.1. Wachstumsprozesse.
- 3.2. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.
- 3.3. Differentialgleichungen der klassischen Mechanik.

WIEDERHOLUNG/ZUSAMMENFASSUNG VON KAPITEL 1 UND 2

LITERATUR

- [Bra10] Christian Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. Berlin: De Gruyter Studium, 2010.
- [Bru21] Rainer Brück. *Analysis I–III für Lehramt Gymnasium*, 2021. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [For17a] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [For17b] Otto Forster. *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [FS13] Otto Forster and Thomas Szymczak. *Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [FW17] Otto Forster and Rüdiger Wessoly. *Übungsbuch zur Analysis 1. Aufgaben und Lösungen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.
- [Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.
- [Kab97] Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis II*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [Kab99] Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis III*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- [Kab00] Winfried Kabblo. *Einführung in die Analysis I*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- [Kab18] Winfried Kabblo. *Vorlesung Analysis I / Lehramt*, 2018. TU Dortmund, unpublished manuscript.
- [Koe04a] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Berlin: Springer, 2004.
- [Koe04b] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Berlin: Springer, 2004.
- [Tao16a] Terence Tao. *Analysis I*, volume 37. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.
- [Tao16b] Terence Tao. *Analysis II*, volume 38. Singapore: Springer; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016.

§ 1 Integration im $\mathbb{R}^n$

Ziel: Berechne / Definiere Integral
einer Fkt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto f(x,y)$

Einfachster / fundamentalster Fall:

$f = \mathbb{1}_A$ Indikator fkt. einer Menge A

Bsp: im $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{1}_{[a,b]} \rightsquigarrow \int \mathbb{1}_{[a,b]} dx = b - a$$

im $\mathbb{R}^2$

$$f = \mathbb{1}_{[a,b] \times [c,d]} \rightsquigarrow \int \left(\int \underbrace{\mathbb{1}_{[a,b] \times [c,d]}(x,y)}_{\text{per Fall unters.}} dx \right) dy$$

per Fall unters.
nachrechnen!

$$\stackrel{(\circledast)}{=} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(y)$$

$$= \int \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx \cdot \int \mathbb{1}_{[c,d]}(y) dy = (b-a)(d-c)$$

Fazit: Um Indikatorfunktionen integrieren zu können, müssen wir wissen wie man Flächeninhalte (im $\mathbb{R}^2$) bzw. Volumina (im $\mathbb{R}^3$ oder höheren Dimensionen) berechnet. Bei Rechtecken / Quadern ist dies noch intuitiv klar, wie gerade illustriert. Wir brauchen aber einen Volumenbegriff für allgem. Mengen.

1.1 Das Lebesgue Maß

Für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \leq b_k$ für $k=1, \dots, m$ nennen wir

$$Q := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_m, b_m) = \prod_{k=1}^m [a_k, b_k)$$

einen Quader oder m -dim Intervall (im $\mathbb{R}^m$).

Wir ordnen Q das Volumen oder das Lebesguemaß

$$(1) \quad \lambda(Q) = \prod_{k=1}^m (b_k - a_k)$$

zu.

und schreiben manchmal $\lambda^m(Q) = \lambda(Q)$
um die Dimension zu betonen.

Bsp: $n=2$: $\lambda^2(\overbrace{[a,b] \times [c,d]}^{Q=}) = (b-a)(d-c)$
ist der Flächeninhalt des Rechtecks Q

$$n=3: \lambda^3\left(\underbrace{\bigtimes_{k=1}^3 [a_k, b_k]}_{= \tilde{Q}}\right) = \prod_{k=1}^3 (b_k - a_k)$$

Volumen des Quaders $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^3$

Bez. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m) = \{A \mid A \subset \mathbb{R}^m\}$ die Potenzmenge von $\mathbb{R}^m$. Wir suchen nun:

* Eine möglichst große Klasse
 $\mathcal{U}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ von Teilmengen

und

* eine Abb. $\lambda: \mathcal{U}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, \infty] =$

$$\{0\} \cup (0, \infty) \cup \{\infty\}$$

die folg. Eig. erfüllt:
/Axiome

(A1) Für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^m$ ist
die Formel (1) erfüllt. (d.h. auf
Quadern ist λ schon festgelegt.)

(A2) Für jede Translation $\tau: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\tau(x) = x + a$ um $a \in \mathbb{R}^m$ und jedes $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$
gelten:

$$\tau(M) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \lambda(\tau(M)) = \lambda(M)$$

"Translationsinvarianz"

(A3) Für jede orthogonale Abb. $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
und jedes $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ gelten:

$$g(M) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \lambda(g(M)) = \lambda(M)$$

"Rotations- & Spiegelungsinvarianz"

(A4) Für $M, N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ gelten

$$M \cap N, M \cup N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \quad \text{und}$$

$$\lambda(M \cup N) + \lambda(M \cap N) = \lambda(M) + \lambda(N)$$

"Additivität"

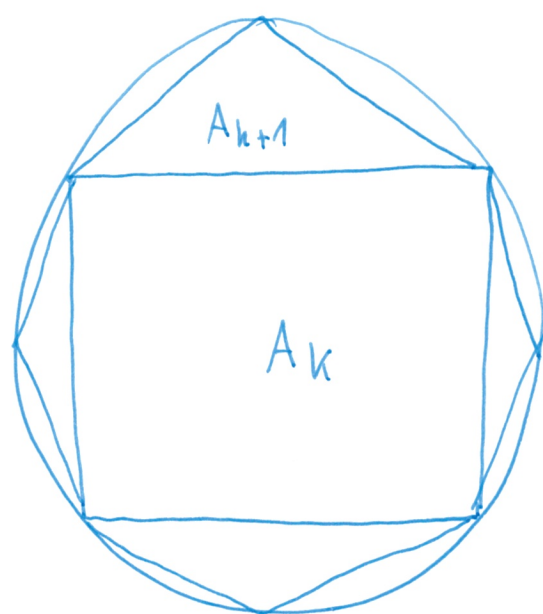
(A5) Ist $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und
sind die Mengen disjunkt, so gelten:

$$A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad \lambda(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k)$$

" σ -Additivität"

Die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt disjunkt, falls
 es für jedes $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ genau ein $j \in \mathbb{N}$
 gibt mit $x \in A_j$.

Motivation für σ -Additivität



Approximiere die Fläche des Kreises durch
 Flächen von Polygonen. Dabei erhält
 man das $k+1$. Polygon durch hinzu
 fügen von disjunkten Dreiecken.

Leider ist es unmöglich auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$
 eine Abb. λ zu definieren, die die Axiome
 1-5 (A1) - (A5) erfüllt.

Also müssen wir einen Kompromiss machen:

Entweder

(a) wir behalten die Axiome (A1)-(A5) bei, wählen aber $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ echt kleiner als $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

oder

(b) wir verzichten auf einen Teil der Axiome und definieren dann doch eine

Abb. $\lambda_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$

In der Tat werden wir zuerst (b) verwirklichen um dann für (a) eine passende Klasse $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ zu identifizieren.

Def 1.1.1 Zu beliebigem $A \subset \mathbb{R}^n$ setze

$$\lambda_*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid \text{alle } Q_k \text{ sind Quader und } A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\}$$

und nenne es äußeres Maß von A

Beachte: letzte Bed immer erfüllbar, da

$$\bullet \quad A \subset \mathbb{R}^M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]^d \quad \uparrow \text{Quader}$$

$\bullet \quad \lambda_*(A)$ kann alle Werte in $[0, \infty]$ annehmen (Übg.)

Die so defn. Abb. $\lambda_*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^M) \rightarrow [0, \infty]$ ist nicht σ -additiv (vgl. A5), aber zumindest σ -subadditiv, d.h. für alle $A_1, A_2, A_3, \dots \subset \mathbb{R}^M$ gilt:

$$(2) \quad \lambda_* \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_*(A_k)$$

Wir „erzwingen“ nun die σ -Additivität durch Selektion der passenden Teilmengen:

D. 1.1.2 $M \subset \mathbb{R}^M$ heißt Lebesgue-messbar

(oder L -messbar oder messbar) : $\Leftrightarrow$

für alle Quader $Q \subset \mathbb{R}^M$ gilt

$$\boxed{1-7} \quad (3) \quad \lambda_*(Q) = \lambda_*(Q \cap M) + \lambda_*(Q \setminus M)$$

System aller solcher Mengen M bez. wir
(ab jetzt) mit $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ und

$$\lambda(M) := \lambda_*(M), \quad M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

als Lebesgue Maß von M .

(2) nennt man auch Quaderbedingung. Dabei
gilt wg. Subadditivität (2) bereits

$$\lambda_*(Q) \leq \lambda_*(Q \setminus M) + \lambda_*(Q \cap M),$$

d.h. statt (3) reicht es

$$(4) \quad \lambda_*(Q) \geq \lambda_*(Q \setminus M) + \lambda_*(Q \cap M)$$

zu fordern.

S. 1.1.3 Das Mengensystem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ der
L-messb. Mengen ist eine σ -Algebra, d.h.
er füllt folgende Bed.

$$(i) \quad \mathbb{R}^m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

$$\overline{1-8} \quad (iii) \quad A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \text{ für } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

S. 1.14 Das Lebesgue Maß $\lambda : \mathcal{M}(\mathbb{R}^M) \rightarrow [0, \infty]$ erfüllt:

(a) λ gehorcht den Axiomen (A1) - (A5)

(b) $A, B \subset \mathbb{R}^M$, A offen, B abgesch. $\Rightarrow A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(c) Ist $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^M)$ mit $\lambda(A) < \infty$, so

$$\lambda(A) = \sup \{ \lambda(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt} \}$$

(d) Ist $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^M)$, so gilt

$$\lambda(A) = \inf \{ \lambda(U) \mid U \supset A, U \text{ offen} \}$$

(e) Ist $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^M)$ und $\varepsilon > 0$, so ex.

U offen und B abgesch. mit $B \subset A \subset U$

$$\text{und } \lambda(U \setminus B) < \varepsilon$$

"Differenz klein"



1-9 Es gibt keine andere Abb. $\tilde{\lambda} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^M) \rightarrow [0, \infty]$

das. alle (A1) - (A5) erfüllt. D.h. das Lebesgue
ist durch diese Axiome eind. bestimmt.

Frage: Vielleicht erfüllen ja alle $M \subset \mathbb{R}^n$
die Quader-Bedingung, dann wäre ja
 $\mu(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$?

Nein! Vitali zeigte, dass $A \subset \mathbb{R}$ mit
 $A \notin \mu(\mathbb{R})$ existiert.

Brauchen Tools, um Lebesguem. von Mengen
zu berechnen oder abzuschätzen. Erster
Schritt:

D. 1.15 Ein $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge,
falls $\lambda_*(M) = 0$. (*)

Bm 1.1.6

(a) Ausgeschrieben bedeutet (*):

$\forall \varepsilon > 0$ ex. Folge Q_k von Quadern ($k \in \mathbb{N}$)
mit $M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < \varepsilon$

(b) Ist $N \subset M$ und M Nullmenge, so auch N , da wir (a) mit $N \subset M \subset \bigcup_k Q_k$ nutzen können

(c) A priori haben wir in 1.1.5 nicht gefordert, dass M L -messbar ist. Allerdings:

Ist Q Quader und M Nullmenge, dann auch $Q \cap M \subset M$ Nullmenge, also $\lambda_*(Q \cap M) = 0$.

Dann gilt

$$\lambda_*(Q) \geq \lambda_*(Q \setminus M) + 0$$

$$= \lambda_*(Q \setminus M) + \lambda_*(Q \cap M)$$

also (4)!

Jede Nullmenge ist also automatisch messbar.

Bsp. 1.1.7. (a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $N_k \subset \mathbb{R}^m$ Nullmenge. Ist $M \subset \bigcup_k N_k$, so ist

M auch Nullmenge.

Denn: Wähle $\varepsilon > 0$ bel.

Dann ex. nach B. 1.1.6 zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $Q_k^1, Q_k^2, Q_k^3, \dots$ von Quadern, s. d. $N_k \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_k^m$ und $\sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k^m) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Die Familie $\{Q_k^m \mid k, m \in \mathbb{N}\}$ ist eine abz. Menge von Quadern, also eine Folge von Quadern. Desweiteren gelten:

$$* \quad M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subset \bigcup_k \left(\bigcup_m Q_k^m \right)$$

und

$$* \quad \sum_k \sum_m \lambda(Q_k^m) < \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon$$

(b) Für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^m$ gilt

offensichtlich $\{a\} \subset [a_1 + \varepsilon) \times \dots \times [a_m + \varepsilon)$,

somit $\lambda_*(\{a\}) \leq \varepsilon^m$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Also ist ein einzelner Pkt. eine Nullmenge

(a) $\Rightarrow$ Jede abz. Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ ist Nullm.

$\Rightarrow \mathbb{Q}^m$ ist Nullm. in $\mathbb{R}^m$

(c) Es gibt auch Nullm., die überabz. sind, z. B.:

Setze $E_0 := [0, 1]$

entferne daraus $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, d.h. mittleres Drittel,

erhalte $E_1 := E_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Setze analog $E_2 := E_1 \setminus \left((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \right)$

$$= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

und weiter

$$E_{k+1} := E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j} \right)$$

2-2 wobei $I_{k,j}$ ein offenes Intervall der

Länge 3^{-k-1} ist.

E_k ist Vereinigung von 2^k kompakten Interv.
der Länge 3^{-k} .

$$C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

heißt Cantor - Menge oder Cantorsches
Diskontinuum (Georg F.L. Ph. Cantor)

Wie groß ist C ?

Es enth. die Endplt. der entfernten
offenen Interv.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \dots$$

und 0 und 1. $\Rightarrow C$ ist nicht endlich

C ist Nullmenge denn:

2-3 $C \subset E_k$ und $\lambda_*(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ für jedes k

$$\Rightarrow \lambda_*(C) \leq \inf_k \lambda_*(E_k) = 0$$

C ist überabzählbar, denn

Binär- bzw. dyadische Darst. triadische Darstellung von $s \in [0,1]$

(vgl. Ama II, Ende kapit. 4)

$$s = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{x_j}{3^j}$$

Wie bei Dezimalbrüchen können wir bei einer abbrechenden triadischen Darstellung

$$s = \frac{x_1}{3} + \dots + \frac{x_{N-1}}{3^{N-1}} + \frac{1}{3^N}$$

stets schreiben

$$= \frac{x_1}{3} + \dots + \frac{x_{N-1}}{3^{N-1}} + 0 + \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{2}{3^{N+m}}$$

So wie bei Dezimalbrüchen gilt

2-4

 $0,1 = 0,09999$

Wählen wir diese Darst., so gilt

(*) $\left[\begin{array}{l} s \in C \Leftrightarrow \text{in der triad. Darst.} \\ \text{kommt die Ziffer 1 nicht vor} \\ \Leftrightarrow \text{alle Mittelstücke wurden} \\ \text{entfernt} \end{array} \right.$

$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ [&] (&) [&] \end{array}$

Die Abbildung

$$\Phi : C \rightarrow [0, 1]$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x_k}{3^k} \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{2^k} \quad \text{mit } a_k = x_k \cdot \frac{1}{2}$$

Folge (x_k) wie in (*), d.h. $x_k \in \{0, 2\}$

ist bijektiv & $[0, 1]$ ist überabz.

$\Rightarrow C$ ist auch überabzählbar. (s.u.)

Erinnerung: 1.1.8 Definition

Eine Menge M heißt

abzählbar $\Leftrightarrow \exists$ bij. Abb. $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow M$

2-5 überabz. $\nexists$

Cardinality

It can be shown that there are as many points left behind in this process as there were to begin with, and that therefore, the Cantor set is uncountable. To see this, we show that there is a function f from the Cantor set $\mathcal{C}$ to the closed interval $[0,1]$ that is surjective (i.e. f maps from $\mathcal{C}$ onto $[0,1]$) so that the cardinality of $\mathcal{C}$ is no less than that of $[0,1]$. Since $\mathcal{C}$ is a subset of $[0,1]$, its cardinality is also no greater, so the two cardinalities must in fact be equal, by the Cantor–Bernstein–Schröder theorem.

To construct this function, consider the points in the $[0,1]$ interval in terms of base 3 (or ternary) notation. Recall that the proper ternary fractions, more precisely: the elements of $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cdot 3^{-\mathbb{N}_0}$, admit more than one representation in this notation, as for example $\frac{1}{3}$, that can be written as $0.1_3 = 0.1\overline{0}_3$, but also as $0.0222\dots_3 = 0.0\overline{2}_3$, and $\frac{2}{3}$, that can be written as $0.2_3 = 0.2\overline{0}_3$ but also as $0.1222\dots_3 = 0.1\overline{2}_3$.^[10] When we remove the middle third, this contains the numbers with ternary numerals of the form $0.1xxxx\dots_3$ where $xxxx\dots_3$ is strictly between $0000\dots_3$ and $2222\dots_3$. So the numbers remaining after the first step consist of

- Numbers of the form $0.0xxxx\dots_3$ (including $0.022222\dots_3 = 1/3$)
- Numbers of the form $0.2xxxx\dots_3$ (including $0.222222\dots_3 = 1$)

This can be summarized by saying that those numbers with a ternary representation such that the first digit after the radix point is not 1 are the ones remaining after the first step.

The second step removes numbers of the form $0.01xxxx\dots_3$ and $0.21xxxx\dots_3$, and (with appropriate care for the endpoints) it can be concluded that the remaining numbers are those with a ternary numeral where neither of the first *two* digits is 1.

Continuing in this way, for a number not to be excluded at step n , it must have a ternary representation whose n th digit is not 1. For a number to be in the Cantor set, it must not be excluded at any step, it must admit a numeral representation consisting entirely of 0s and 2s.

It is worth emphasizing that numbers like 1 , $\frac{1}{3} = 0.1_3$ and $\frac{2}{9} = 0.21_3$ are in the Cantor set, as they have ternary numerals consisting entirely of 0s and 2s: $1 = 0.222\dots_3 = 0.\overline{2}_3$, $\frac{1}{3} = 0.0222\dots_3 = 0.0\overline{2}_3$ and $\frac{2}{9} = 0.20222\dots_3 = 0.20\overline{2}_3$. All the latter numbers are “endpoints”, and these examples are right limit points of $\mathcal{C}$. The same is true for the left limit points of $\mathcal{C}$, e.g. $\frac{2}{3} = 0.1222\dots_3 = 0.1\overline{2}_3 = 0.2\overline{0}_3$ and $\frac{8}{9} = 0.21222\dots_3 = 0.21\overline{2}_3 = 0.22\overline{0}_3$. All these endpoints are *proper ternary fractions* (elements of $\mathbb{Z} \cdot 3^{-\mathbb{N}_0}$) of the form $\frac{p}{q}$, where denominator q is a power of 3 when the fraction is in its irreducible form.^[9] The ternary representation of these fractions terminates (i.e., is finite) or — recall from above that proper ternary fractions each have 2 representations — is infinite and “ends” in either infinitely many recurring 0s or infinitely many recurring 2s. Such a fraction is a left limit point of $\mathcal{C}$ if its ternary representation contains no 1's and “ends” in infinitely many recurring 0s. Similarly, a proper ternary fraction is a right limit point of $\mathcal{C}$ if it again its ternary expansion contains no 1's and “ends” in infinitely many recurring 2s.

This set of endpoints is dense in $\mathcal{C}$ (but not dense in $[0,1]$) and makes up a countably infinite set. The numbers in $\mathcal{C}$ which are *not* endpoints also have only 0s and 2s in their ternary representation, but they cannot end in an infinite repetition of the digit 0, nor of the digit 2, because then it would be an endpoint.

The function from $\mathcal{C}$ to $[0,1]$ is defined by taking the ternary numerals that do consist entirely of 0s and 2s, replacing all the 2s by 1s, and interpreting the sequence as a binary representation of a real number. In a formula,

$$f\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k3^{-k}\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{a_k}{2}2^{-k} \quad \text{where} \quad \forall k\in\mathbb{N}:a_k\in\{0,2\}.$$

For any number y in $[0,1]$, its binary representation can be translated into a ternary representation of a number x in $\mathcal{C}$ by replacing all the 1s by 2s. With this, $f(x) = y$ so that y is in the range of f . For instance if $y = \frac{3}{5} = 0.100110011001\dots_2 = 0.\overline{1001}$, we write $x = 0.\overline{2002} = 0.200220022002\dots_3 = \frac{7}{10}$. Consequently, f is surjective. However, f is *not injective* — the values for which $f(x)$ coincides are those at opposing ends of one of the *middle thirds* removed. For instance, take

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.0\overline{2}_3 \text{ (which is a right limit point of } \mathcal{C} \text{ and a left limit point of the middle third } [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) \text{ and} \\ \frac{2}{3} &= 0.2\overline{0}_3 \text{ (which is a left limit point of } \mathcal{C} \text{ and a right limit point of the middle third } [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{3}) &= f(0.0\overline{2}_3) = 0.0\overline{1}_2 = 0.1_2 = 0.1\overline{0}_2 = f(0.2\overline{0}_3) = f(\tfrac{2}{3}). \\ &\parallel \\ &\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Thus there are as many points in the Cantor set as there are in the interval $[0, 1]$ (which has the uncountable cardinality $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). However, the set of endpoints of the removed intervals is countable, so there must be uncountably many numbers in the Cantor set which are not interval endpoints. As noted above, one example of such a number is $\frac{1}{4}$, which can be written as $0.020202\dots_3 = 0.\overline{02}$ in ternary notation. In fact, given any $a \in [-1, 1]$, there exist $x, y \in \mathcal{C}$ such that $a = y - x$. This was first demonstrated by Steinhaus in 1917, who proved, via a geometric argument, the equivalent assertion that $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + a\} \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \neq \emptyset$ for every $a \in [-1, 1]$.^[11] Since this construction provides an injection from $[-1, 1]$ to $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, we have $|\mathcal{C} \times \mathcal{C}| \geq |[-1, 1]| = \mathfrak{c}$ as an immediate corollary. Assuming that $|A \times A| = |A|$ for any infinite set A (a statement shown to be equivalent to the axiom of choice by Tarski), this provides another demonstration that $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$.

The Cantor set contains as many points as the interval from which it is taken, yet itself contains no interval of nonzero length. The irrational numbers have the same property, but the Cantor set has the additional property of being closed, so it is not even dense in any interval, unlike the irrational numbers which are dense in every interval.

It has been conjectured that all algebraic irrational numbers are normal. Since members of the Cantor set are not normal, this would imply that all members of the Cantor set are either rational or transcendental.

Self-similarity

The Cantor set is the prototype of a fractal. It is self-similar, because it is equal to two copies of itself, if each copy is shrunk by a factor of 3 and translated. More precisely, the Cantor set is equal to the union of two functions, the left and right self-similarity transformations of itself, $T_L(x) = x/3$ and $T_R(x) = (2 + x)/3$, which leave the Cantor set invariant up to homeomorphism: $T_L(\mathcal{C}) \cong T_R(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C} = T_L(\mathcal{C}) \cup T_R(\mathcal{C})$.

Repeated iteration of T_L and T_R can be visualized as an infinite binary tree. That is, at each node of the tree, one may consider the subtree to the left or to the right. Taking the set $\{T_L, T_R\}$ together with function composition forms a monoid, the dyadic monoid.

The automorphisms of the binary tree are its hyperbolic rotations, and are given by the modular group. Thus, the Cantor set is a homogeneous space in the sense that for any two points x and y in the

Lemma 1.1.9 $[0,1]$ ist überabzählbar

Bw

Sei $\phi : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ Abb. Wir

konstruieren ein $x \in [0,1]$ mit

$$x \neq \phi(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit einer Intervallschachtelung, vgl.

Ana I, Kap. 6.

Sei $J_1 \subset [0,1]$ ^{echtes} abges. Interv. mit

$$\phi(1) \notin J_1$$

Teile nun J_1 in drei gleichlange abges.

Intervalle. Mindestens eines enthält

Punkt $\phi(2)$ nicht, nenne dieses J_2 .

Teile nun $J_2 \dots J_k$ in drei gleichlange

abg. Intervalle, mind. eines enth. $\phi(3)$

$\phi(k+1)$ nicht, nenne dieses $J_3 \dots J_{k+1}$

$$\boxed{2-6} \Rightarrow J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$$

$$\lambda(J_{k+1}) = \frac{1}{3} \lambda(J_k) \text{ und } \phi(k) \notin J_k.$$

Intervallschachtelungsprinzip (AnaI, §6, S.8)

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_k J_k \subset [0,1]$$

$$\text{insbes } x \neq \phi(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Übg: Cantor Menge $C = \bigcap E_k$

ist kompakt und enth. keine inneren Punkte.

Jedes $y \in C$ ist ein Häufungspunkt von C ,
denn:

Sei $\varepsilon > 0$ und $J_k = J_k(y)$ dasjenige Intervall von E_k , dass y enthält. Da

$$\lambda(J_k) = 3^{-k} \text{ ist für } k \geq k_0$$

$$J_k \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$$

Sei $x_k \in \{ \min J_k, \max J_k \} \setminus \{y\}$,

2-7 | mind. einer der beiden Endpt. von J_k erfüllt dies.

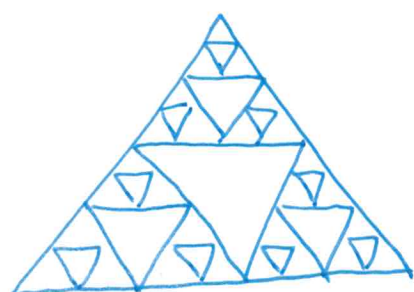
$\Rightarrow x_n \in C$ (vgl. oben Bsp 1.1.7. (c))

und $|x_n - y| < \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow y \in P$ von C .

Analoge Konstruktion im $\mathbb{R}^2$

Sierpinski - Teppich.



Bsp. 1.1.20

(a) ε s ex. $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, ohne innere Punkte mit $\lambda(A) > 0$.

[Beachte: A kompakt $\Rightarrow A$ abgeschl $\Rightarrow A$ messb.]

Bw:

Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ und $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Setze:

$$I_k := (r_k - 2^{-k-1} \varepsilon, r_k + 2^{-k-1} \varepsilon)$$

und $M := [0, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$

I_k offen $\Rightarrow \bigcup_k I_k$ offen $\Rightarrow M$ abgeschlossen

insbes. messbar

auch beschränkt $\xRightarrow{\text{Heine Borel}} M$ kompakt

$$\lambda\left(\bigcup_k I_k\right) \underset{\sigma\text{-subadd}}{\leq} \sum_k \lambda(I_k) = \sum_k \frac{1}{2^k} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda(M) = \lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_k I_k\right)$$

$$\geq 1 - \varepsilon > 0$$

insbes. kann man durch Vereinigung von
Translationen von M ein A wie behauptet
und mit bel. großem Lebesgue-Maß.

$$(b) \quad G \subset \mathbb{R}^2 \text{ Gerade} \Rightarrow \lambda(G) = 0$$

Bw: Dann ex $a \in \mathbb{R}^2$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
orthogonal, so dass

$$G = \tau_a \circ g(G_0), \quad G_0 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Zu $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ wähle:

$$\boxed{2-9} \quad Q_k = [-k, k) \times \left[-\frac{\varepsilon}{k} 2^{-k-2}, \frac{\varepsilon}{k} 2^{k+2}\right)$$

$$\Rightarrow G_0 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \text{ und } \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^k \cdot \frac{2\varepsilon}{k} 2^{-k-2} = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

$$\varepsilon > 0 \text{ bel } \Rightarrow \lambda(G_0) = 0$$

Allgem: Jedes $H = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle x, v \rangle = \alpha\}$

für ein $v \in \mathbb{R}^m$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist eine $m-1$
dim Hyperebene im $\mathbb{R}^m$ und erfüllt:

$$\lambda^m(H) = 0$$

Achtung: $H = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ ist solch
eine Hyperebene mit $\lambda^m(H) = 0$, aber
 $\lambda^{m-1}(H) = \infty$.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ (echtes) Intervall und
 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $\gamma \in C^1$. Dann
ist $\gamma(I)$ eine Nullm. in $\mathbb{R}^m$.

(d) Allge meiner gilt: Für $D \subset \mathbb{R}^d$ offen,
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar mit
 $d < m$ ist $f(D)$ eine λ^m -Nullmenge.

Aller dings ex. auch (stetige) Wege

$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma([0,1]) = [0,1]^2$

so genannte Peano-kurven.

Lem 1.1.21

Sei $N \subset \mathbb{R}^m$ Nullmenge und $f: N \rightarrow \mathbb{R}^m$
 Lipschitz-stetig. Dann ist auch $f(N)$
 eine Nullmenge.

Bw: Es ex ein $L < \infty$, s.d.

$$\|f(x) - f(y)\|_{\infty} \leq L \|x - y\|_{\infty} = L \max_{j=1}^m |x_j - y_j|$$

[Da alle Normen auf $\mathbb{R}^m$ äquivalent sind, darf
 ich Lipschitz-st. mit $\|\cdot\|_{\infty}$ formulieren.]

Da N Nullmenge ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ eine

Folge von Quadern $Q_1, Q_2, \dots \subset \mathbb{R}^m$ mit

s. d. $N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < \varepsilon$

Wg. Lipschitz-st. ist jedes $f(Q_k)$ in einem Quader $W_k \subset \mathbb{R}^M$ mit höchstens L -mal größerem Durchmesser enthalten.

z. B. $Q = [a_1, a_1 + R) \times \dots \times [a_m, a_m + R)$

$$\Rightarrow f(Q) \subset [c_1, c_1 + LR) \times \dots \times [c_m, c_m + LR)$$

für geeignetes $c \in \mathbb{R}^M$

$$\Rightarrow \lambda(W_k) \leq L^M \lambda(Q_k)$$

$$\Rightarrow f(N) \subset \bigcup_k f(Q_k) \subset \bigcup_k W_k$$

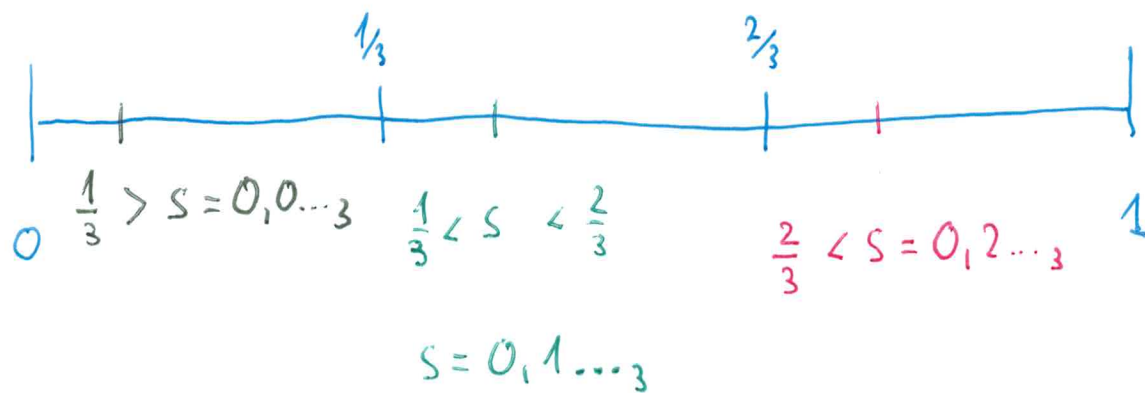
$$\Rightarrow \lambda(f(N)) \leq \sum_k \lambda(W_k) \leq L^M \sum_k \lambda(Q_k) \leq L^M \cdot \varepsilon$$

ist bel. klein, da ε bel. klein wählbar. $\blacksquare$

Ersetzt man „Lipschitz“ durch nur „stetig“

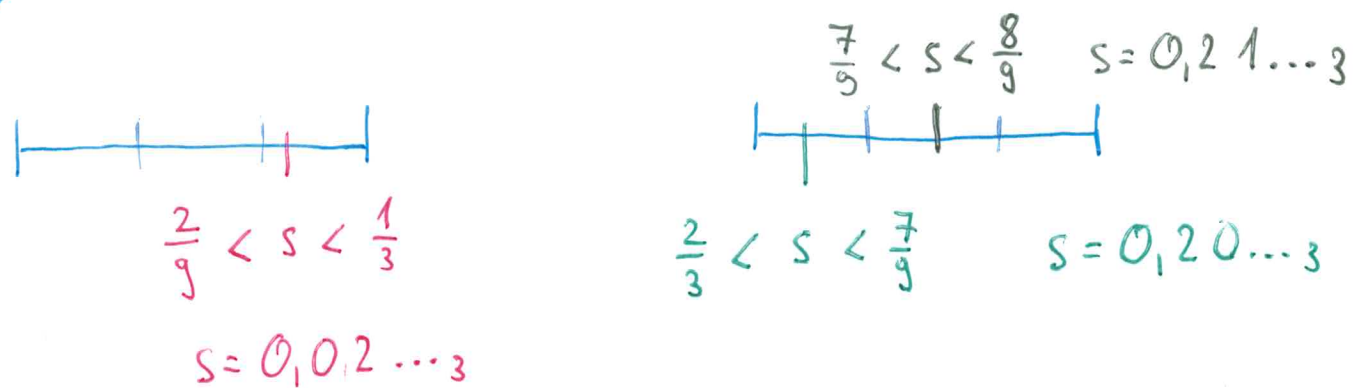
2-12 ist Aussage falsch, vgl. Peano-Kurve.

Nachtrag zu 1.1.7.



Diese eliminieren wir.

$\Rightarrow$ 1. Nachkommastelle ist keine „1“



Wieder werden alle s aus den „mittleren Dreiecken“ entfernt. $\Rightarrow$ als 2. Ziffer steht keine „1“

Indem man dies immer weiter fortführt,

besitzt $s \in C = \bigcap_k E_k$ keine Ziffer „1“

in der triadischen Darstellung, außer

s ist ein rechtes Intervallende; z.B.

$$s = \frac{1}{3} = 0,1_3 = 0,0\bar{2}_3$$

$$\text{oder } s = \frac{1}{9} = 0,01_3 = 0,00\bar{2}_3$$

$\boxed{3-0}$

Wg dieser alternativen Darstellung folgt:

$$C = \{ s \in [0,1] \mid s \text{ besitzt triadische Entw. ohne Einsen} \}$$

Abb

||

$$\Psi : \{ s \in [0,1] \mid s = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{x_j}{3^j}, x_j \in \{0,2\} \}$$

$$\longrightarrow [0,1]$$

$$\Psi \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{x_j}{3^j} \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\frac{x_j}{2}}{2^j}$$

$\in \{0,1\}$

Ψ ist surjektiv, da jede 0-1-Folge erwischt wird.

1.2 Lebesgue Integral

Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ messbar und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.
Wann und wie ist das Lebesgue-Integr.
von f definiert?

Im Folgenden:

* bez $\mathbb{1}_E: \mathbb{R}^m \rightarrow \{0,1\}$ die
Indikator fkt.

* ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, so wird

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das gleiche Integral wie f haben.

Es reicht also, auf ganz $\mathbb{R}^m$ defn. Fkt

zu betrachten

* Wir lassen als Wertebereich von
 f und g sogar $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ zu.

* Auch für solche Fkt $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

defn wir

$$\max \{f, g\}, \min \{f, g\}, f^+, f^-: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

durch

$$(\max \{f, g\})(x) = \max \{f(x), g(x)\}$$

min ...

$$f^+(x) = (\max \{f, 0\})(x), \quad f^- = -\min \{f, 0\}$$

s. d. dann $f = f^+ - f^-$

Defn 1.2.1

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar : $\Leftrightarrow$

$\forall a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\}$$

Lebesgue-messbar:

Übg: Ist dies erfüllt, so sind auch die Mengen

$$\{x \mid f(x) > -\infty\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = -\infty\}$$

L-messbar.

S. 1.2.2Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:(i) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\}$ $\mathcal{L}$ -messb.(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x \mid f(x) \geq a\}$ "(iii) $\{x \mid f(x) < a\}$ (iv) $\{x \mid f(x) \leq a\}$ KomplementregelnBw: Wir benutzen, dass $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ σ -Algebra der Morganschen
(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\{x \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_k \{x \mid f(x) > a - \frac{1}{k}\}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\{x \mid f(x) < a\} = \mathbb{R}^n \setminus \{x \mid f(x) \geq a\}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$$\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_k \{x \mid f(x) < a + \frac{1}{k}\}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

$$\{x \mid f(x) > a\} = \mathbb{R}^n \setminus \{x \mid f(x) \leq a\} \quad \blacksquare$$

3-4 Übg: Checken Sie jeden einzelnen Schritt

Bm

(i) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messb und $a \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\} = \{x \mid f(x) \geq a\} \cap \{x \mid f(x) \leq a\}$$

also messb.

(ii) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und $f = 1_E$. Dann

$$\{x \mid f(x) = 1\} = E, \quad \{x \mid f(x) = 0\} = E^c$$

Also:

f messb. Fkt $\Leftrightarrow E$ messb. Menge.

(iii) Jedes stetige $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$

offen ist messbar, denn:

$$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a, \infty) \text{ offen}$$

f stetig

(Ama II)

$$\Rightarrow f^{-1}((a, \infty)) \text{ ist offen}$$

$$\Rightarrow \{x \mid \overset{f}{f}(x) > a\} \text{ ist messb.}$$

$$\Rightarrow \text{Fkt } f \text{ messb.}$$

Messb. Fkt. lassen sich zu neuen messb.

kombinieren (genauso wie auch bei stetigen, diffb. oder intb. Fkt.)

S. 1.2.3 Seien $f, g, h, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) f, g messb. $\Rightarrow f^+, f^-, |f| = f^+ + f^-$ messb.,
 $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ messb.

(b) Sind alle f_k messb. und

$$g(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad h(x) := \overline{\lim}_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$$

$$f(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad w(x) = \underline{\lim}_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$$

so auch g, h, f, w messb.

(c) Sind alle f_k messb. ^{und} so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) =: f(x)$ ex., so ist f messb.

Bw

$$(a) \{x \mid \max(f, g)(x) > c\} = \underbrace{\{x \mid f(x) > c\}}_{\text{messb.}} \cup \underbrace{\{x \mid g(x) > c\}}_{\text{messb.}}$$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ σ -Alg. $\Rightarrow$ Verein. messb. Mengen ist messb.

3-6 übrige Auss. analog.

$$(b) \quad \{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \mid f_k(x) > a\}$$

messb.

Verein. messb. Mengen ist messbar.

Daraus lassen sich alle weiteren Auss. folgern $\square$

Um Weiter zu kommen hilft folg. topol.

Auss.

S. 1.2.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

(i) Es ex. Folge $U_k = B_{r_k}(x_k)$ offener

Bälle mit $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$

(ii) Es ex. Folge offener Quader W_k

(iii) $= (a_1^k, b_1^k) \times \dots \times (a_m^k, b_m^k)$ mit $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$

halboffener Q_k Q_k

Beachte: Vereinigungen sind abzählbar.

Bw von (i) Ist $U = \mathbb{R}^n$ so setze

$$\boxed{3-7} \quad U_k = B_k(0) \Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigcup_k U_k.$$

Betrachte nun $U \neq \mathbb{R}^M$ und setze $A = U \cap \mathbb{Q}^M$

Da $\mathbb{Q}^M$ abz. $\Rightarrow A$ abz. $\Rightarrow A = \{q_1, q_2, \dots\}$

Da $\mathbb{Q}^M$ dicht in $\mathbb{R}^M$ und U offen
 $\Rightarrow A$ dicht in U (Übg.)

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\varepsilon_k := \sup \{ \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(q_k) \subset U \}$$
$$\in (0, \infty]$$

$q_k \in U$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q_k) \subset U$.

und $U_k = B_{\varepsilon_k}(q_k) \Rightarrow U_k \subset U$.

Beh: $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$

Bw: Sei $x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$

$\mathbb{Q}^M$ dicht in $\mathbb{R}^M \supset U \Rightarrow$ es ex. $q \in \mathbb{Q}^M$ mit

$\|x - q\| < \varepsilon/2$ also $q \in B_{\varepsilon/2}(x) \subset U$, insbes.

$q \in A$. Also $q = q_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \|x - q_k\| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(q_k) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$

3-8 $\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon_k$

$$\Rightarrow \|x - q_k\| < \varepsilon_k \Rightarrow x \in B_{\varepsilon_k}(q_k) = U_k. \quad \square$$

(ii) ganz analog

(iii) etwas anders.

S. 1.2.5 Seien $f, g: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ messb. und
 $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $h: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto w(f(x), g(x))$ messb.

Bw Sei $a \in \mathbb{R}$.

w stetig $\Rightarrow G_a := w^{-1}((a, \infty))$ ist offen in $\mathbb{R}^2$

S. 1.2.4 $\Rightarrow \exists$ Folge offener Quader W_k mit

$$G_a = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k \quad \text{mit} \quad (a_k, b_k) \times (c_k, d_k)$$

Nun ist Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^M \mid a_k < f(x) < b_k\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^M \mid a < f(x)\} \cap \{x \mid f(x) < b_k\}$$

messbar, da f messb. Fkt.

$$\Rightarrow \text{Menge } \{x \in \mathbb{R}^M \mid (f(x), g(x)) \in W_k\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^M \mid f(x) \in (a_k, b_k)\} \cap \{x \mid g(x) \in (c_k, d_k)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^M \mid h(x) > a\} &= \{x \in \mathbb{R}^M \mid (f(x), g(x)) \in G_a\} \\ &= \{x \mid w(f(x), g(x)) > a\} \\ &= \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^M \mid (f(x), g(x)) \in W_h\} \end{aligned}$$

auch messb.

Kor. 1.2.5 $\frac{1}{3}$ $f+g, f \cdot g: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ sind messb.

Bw: $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad w(y, z) = y + z$

$$\Rightarrow h(x) = w(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) \text{ messb.}$$

$$w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad w(y, z) = y \cdot z$$

$$\Rightarrow h(x) = w(f(x), g(x)) = f(x) \cdot g(x) \text{ messb. } \square$$

Die Bw-Idee vom S. 1.2.5 zeigt auch:

Kor. 1.2

Sind $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ messb. und
 $w: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist
auch $h: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto w(f_1(x), \dots, f_m(x))$
messb.

Bsp. 1.2

Seien $f_1, \dots, f_d, g_1, \dots, g_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messb.,

dann ist auch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_d(x) \end{pmatrix} \right\rangle \text{ messb.}$$

denn $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ ist stetig.

$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^m \mid h(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (f(x), g(x)) \in G_a\} \\ = \{x \mid w(f(x), g(x)) > a\} \\ = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^m \mid (f(x), g(x)) \in W_h\}$$

auch messb.

24. Okt. 2022

Kor 1.2.6

$f + g, f \cdot g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sind messb.

Bw: $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad w(y, z) = y + z$

$$\Rightarrow h(x) = w(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) \text{ messb.}$$

$w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad w(y, z) = y \cdot z$

$$\Rightarrow h(x) = w(f(x), g(x)) = f(x) \cdot g(x) \text{ messb. } \square$$

Die Bw.-Idee von S. 1.2.5 zeigt auch:

Kor. 1.2.7

Sind $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ messb. und
 $w: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist
auch $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto w(f_1(x), \dots, f_m(x))$
messb.

Bsp. 1.2.8

Seien $f_1, \dots, f_d, g_1, \dots, g_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messb.,

dann ist auch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_d(x) \end{pmatrix} \right\rangle \text{ messb.}$$

denn $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ ist stetig.

Def. 1.2.9

(a) Eine Fkt. $s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Bild $s(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}$ heißt einfach oder elementar.

z.B. $f = 1_E$ charakt. Fkt $\Rightarrow f$ elementar
 g Linear komb. von $-11-$ $\Rightarrow g$ elementar

(b) Ist $s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ einfach, $s(\mathbb{R}^m) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$
und $E_k = s^{-1}(\alpha_k) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid s(x) = \alpha_k\}$ für
 $k = 1, \dots, m$ so gilt:

$$s = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot 1_{E_k} \quad (1)$$

Gl. (1) wird kanonische Darstellung von s genannt und ist eind.

Insbes. ist jede elementare Fkt die Lin-komb. von char. Fkt.

Es gilt in (1):

s messb. Fkt $\Leftrightarrow E_1, \dots, E_m$ messb. Mengen

Erkl. zur kanonischen Darst.

Sind $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

und $f = \alpha \mathbb{1}_{E_1} + \beta \mathbb{1}_{E_2}$ ⁽²⁾, so ist f eine einfache Fkt.

Für $\alpha \neq \beta$ ist (2) die kanonische Darst. von f , aber nicht für $\alpha = \beta$.

Dann ist $f = \alpha \mathbb{1}_{E_1 \cup E_2}$

die kanon. Darst.

char. Fkt mit minimaler # von
Summanden.

S. 1.2.10 Sei $f: \mathbb{R}^M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messb.

Dann ex. Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher,
messb. Fkt, s.d. $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = f(x)$ für

alle $x \in \mathbb{R}^M$.

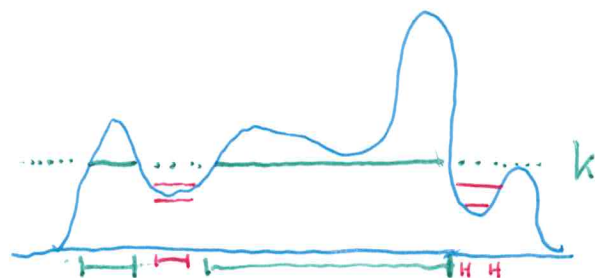
Ist ^{sogar} $f: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty]$, so konstruieren
wir eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie oben, die
auch: $k \mapsto s_k(x)$ isotom für alle $x \in \mathbb{R}^M$
erfüllt.

Bw: Betr. zuerst $f: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty]$ messb.

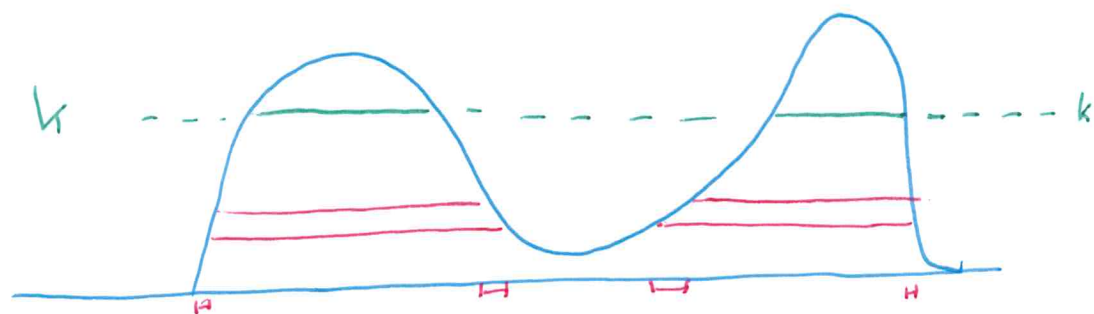
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, 2, \dots, k \cdot 2^k\}$

setze:

$$F_k = \{x \in \mathbb{R}^M \mid f(x) \geq k\}$$



$$E_{k,j} = \left\{ x \in \mathbb{R}^M \mid \underbrace{\frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}} \right\}$$



und

$$s_k = k \cdot \mathbb{1}_{F_k} + \sum_{j=1}^{k \cdot 2^j} \frac{j-1}{2^k} \mathbb{1}_{E_{k,j}} \leq f$$

Lim-komb. von Indikatorfkt $\Rightarrow s_k$ elementar

f messb $\Rightarrow F_k$ und $E_{k,j}$ messb $\Rightarrow s_k$ messb.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^M$ ist $\mathbb{N} \ni k \mapsto s_k(x)$

isoton (Übg!) und $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = f(x)$.

Ist $f: \mathbb{R}^M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messb. so kann man den ersten Teil auf $f^+, f^-: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty]$ anwenden und erhält zwei Folgen

4-4 (s_n^+) und (s_n^-) von elementaren Fkt.

Dann ist auch $s_h := s_h^+ - s_h^- : \mathbb{R}^M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 elementar und $\lim_{h \rightarrow \infty} s_h(x) = f(x)$ für alle x . $\square$

Fehler absch: & kor. 1.2.11

Für $f \geq 0$ mb. gilt nach Konstr.

$$0 \leq f(x) - s_h(x) \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{für } x \in F_k^c$$

Ist sogar $f: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, b]$ beschränkt,

so ist ab $k \geq b$ $F_k = \emptyset$ und $F_k^c = \mathbb{R}^M$,

so mit $s_h \rightarrow f$ glm.

Auch für $f: \mathbb{R}^M \rightarrow [-b, b]$ messb.

gilt $\lim_{h \rightarrow \infty} \|f - s_h\|_\infty = 0$.

Defn 1.2.12

Für ein einfaches, messb.

$$s := \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbb{1}_{E_k} : \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty] \quad (4)$$

und messb Menge $E \subset \mathbb{R}^M$ definiere das Integral

$$I_E(s) := \int_E s d\lambda := \sum_{k=1}^m \alpha_k \lambda(E_k \cap E) \in [0, \infty]$$

Dabei ist (4) häufig die kanon. Darst. von s , muss es aber nicht sein.

Ist $f: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty]$ messb., so setzen wir

$$\int_E f d\lambda := \sup_{s \in \mathcal{F}_f(E)} I_E(s) \quad (5)$$

wobei $\mathcal{F}_f(E) := \{ g: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty) \mid g|_E \equiv 0, g(\mathbb{R}^M) \text{ endl.} \wedge \forall x \in E: g(x) \leq f(x) \}$

Insbes. gilt für Folge (s_k) aus Bw. von

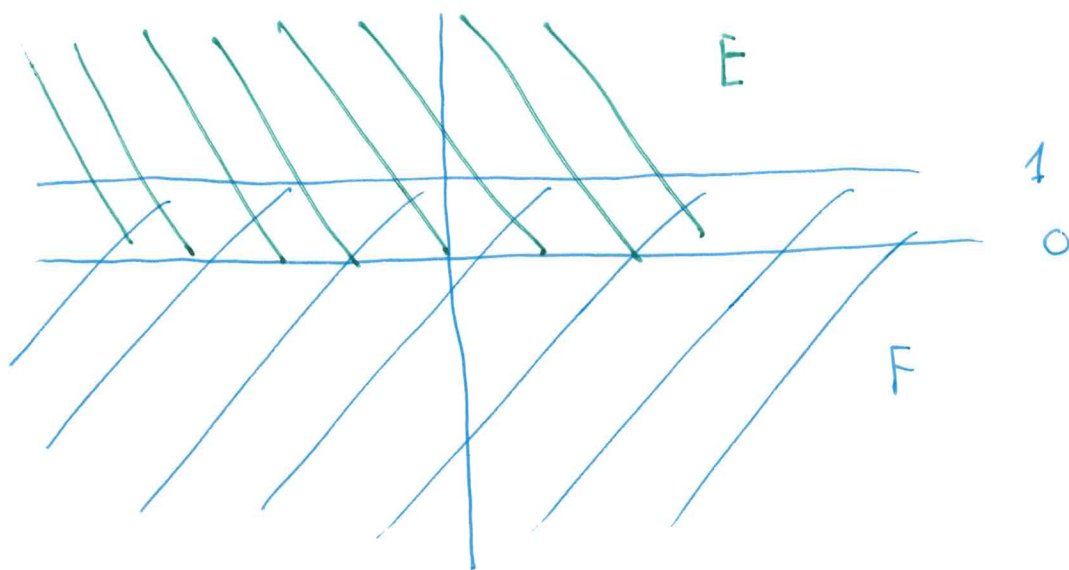
S. 1.2.11 : $\mathbb{1}_E \cdot s_k \in \mathcal{F}_f(E)$ für alle k .

Das Supremum in (5) kann den Wert ∞ annehmen, da ja schon

$I_E(s) = \infty$ gelten kann, z.B. für

$$s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\} \quad s = \mathbb{1}_F, \quad F = \{(x,y) \mid x \leq 1\}$$

$$\text{und } E = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$$



$\Rightarrow$ Streifen $E \cap F$ hat unendl. Volumen.

Erfüllt man $f = f^+ - f^-: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die beiden Bed.

(i) f messbar

(ii) $\int_E f^+ \lambda(dx) < \infty$ oder $\int_E f^- \lambda(dx) < \infty$

so setzen wir

$$\int_E f \lambda(dx) = \int_E f^+ \lambda(dx) - \int_E f^- \lambda(dx) \quad (6)$$

und nennen es Lebesgueintegral von f

4-7 über E .

Beachte:

Wg. (i) sind die beiden Integrale in (ii) wohldef. Zahlen in $[0, \infty]$.

Wg (ii) kann $+\infty - \infty = ?$ in (6) nicht vorkommen, wohl aber

$$+\infty - a = +\infty$$

$$\text{oder } a - \infty = -\infty$$

für eine endliche Zahl $a \geq 0$.

Statt $\int_E f \, \lambda(dx)$ schreiben wir manchmal

auch $\int_E f \, \lambda$, $\int_E f$ oder $\int_E f(x) \, \lambda(dx)$ oder

$$\int_E f(x) \, \lambda^n(dx) \text{ oder } \int_E f(x_1, \dots, x_n) \underbrace{\lambda(dx_1, \dots, dx_n)}_{\lambda(d(x_1, \dots, x_n))}$$

Im Fall $n=2$ auch

$$\int_E f(x,y) \, \lambda(dx, dy, dz)$$

im Fall $n=3$ auch

$$\int_E f(x,y,z) \, \lambda(d(x,y,z))$$

Sind beide Summanden auf der r. S. von (6) endlich,

4-8 so ist $\int_E f \, \lambda \in (-\infty, \infty)$ und f heißt

Lebesgue-integrierbar auf E . Die Menge aller
Funkt. auf E bezeichnen
wir mit $L^1(E)$ oder $\mathcal{L}(E)$.

Anhand der Defn. kann man folgende

S. 1.2.13 (Eigenschaften des Lebesgue-Intg) nachrechnen
Sei $E \subset \mathbb{R}^m$ messb.

(i) Für $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten

$$\alpha f + g \in \mathcal{L}^1(E) \text{ mit } \int_E (\alpha f + g) \lambda = \alpha \int_E f \lambda + \int_E g \lambda$$

d.h. $\mathcal{L}^1(E)$ ist ein Vektorraum und die

Abb. $\int_E : \mathcal{L}^1(E) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear
Linearität:

(ii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(E)$ und $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messb. mit

$$|g(x)| \leq f(x) \text{ für alle } x \in E, \text{ so gilt:}$$

$$g \in \mathcal{L}^1(E) \text{ und } \left| \int_E g \lambda \right| \leq \int_E f \lambda$$

Ist zus. $g \geq 0$ so $\int_E g \lambda \leq \int_E f \lambda$ Majorante:

(iii) Δ -Ungl.: Für $f \in \mathcal{L}^1(E)$ ist $|f| \in \mathcal{L}^1(E)$ und

$$\boxed{4-9} \quad \left| \int_E f \lambda \right| \leq \int_E |f| \lambda$$

(vi) Monotonie: Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ und $f \leq g$ auf E
so gilt $\int f \lambda(dx) \leq \int g \lambda(dx)$

(v) Beschränkte Fkt:

Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b]$ messb. und $\lambda(E) < \infty$

so ist $f \in \mathcal{L}^1(E)$ und

$$a \cdot \lambda(E) \leq \int_E f \lambda \leq b \lambda(E)$$

insbes $\int_E \mathbb{1}_F \lambda = \lambda(E \cap F)$

Hölder-Ung:

(vi) Ist $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messb. und beschr. auf E
und $f \in \mathcal{L}^1(E)$ so ist $g \cdot f \in \mathcal{L}^1(E)$ d.

$$\left| \int_E f g \right| \leq \int_E |f \cdot g| \leq \| \mathbb{1}_E g \|_\infty \int_E |f|$$

beachte: $\| \mathbb{1}_E g \|_\infty = \sup_{x \in E} |g(x)|$, obwohl

$\| g \|_\infty = \infty$ sein kann.

(vii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und E eine Nullmenge, so

ist $f \in \mathcal{L}^1(E)$ und $\int_E f \lambda = 0$

(viii) Sind $A \subset E \subset \mathbb{R}^M$ messb. und $f \in L^1(E)$,
so auch $f \in L^1(A)$

Def 1.2.14 (a) Sei $E \subset \mathbb{R}^M$ und für jedes
 $x \in E$ sei $A(x)$ eine Aussage, die wahr
oder falsch sein kann. Wir sagen

A gilt fast überall auf $E \iff$
(kurz: f. ü.)

$A(x)$ gilt für fast alle $x \in E : \iff$
(f.a.)

$\{x \in E \mid A(x) \text{ ist falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

(b) Definiere auf $L(E)$ eine Äquivalenzrelation
(übg.) durch: (Reflexiv, symmetrisch, transitiv)

Bm 1.2.15 $f \sim g : \iff \underline{f(x) = g(x) \text{ für fast alle } x \in E}$

(a) Gilt für $f, g \in L(E)$ $f \sim g$ so ist

$$\int_E f \, \lambda - \int_E g \, \lambda = \int_{E \cap \{f=g\}} \overbrace{(f-g)}^{=0} \lambda + \int_{\underbrace{E \cap \{f \neq g\}}_{\text{Nullmenge}}} (f-g) \lambda$$

Def. $\quad \quad \quad = 0 \quad \quad \quad + 0$
(vii)

also $\int_E f \, \lambda = \int_E g \, \lambda$, d.h. für alle Elem.
einer Äquivalenzklasse nimmt das Integral
denselben Wert an.

(e) Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ messb gilt:

$$\int_E |f| = 0 \iff E \cap \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

ist Nullmenge

$$\iff f|_E \sim 0|_E$$

Bsp: $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ist äquivalent zur
Nullfunktion auf $\mathbb{R}$, also $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, \lambda = 0$

(f) Ist $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intbar, so
ist $f \in \mathcal{L}([a,b])$ und die beiden Integrale
stimmen überein. Es gibt Fkt die
L-intbar, aber nicht R-intbar sind,
z.B. $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, s.o. Also setzt das
Lebesgue-Integral das Riemann-Int.
fort.

(g) Lebesguesches Integrierbarkeits-kriterium

5.2 Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

f ist $\mathbb{R}$ -integrierbar auf $[a, b] \Leftrightarrow \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}$ ist Nullm.

(b) Für das Auswerten von Integralen (und die meisten anderen Fragen in der Integrations-theorie) ist es daher erlaubt eine Fkt $f \in \mathcal{L}(E)$ auf einer Nullm. $N \subset E$ zu verändern, z. B. durch den Übergang von f zu $g = f \cdot \mathbb{1}_{N^c}$.

(c) Sei $f: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty]$ in $\mathcal{L}(E)$ für $E \subset \mathbb{R}^M$ messb. Dann gilt

$$\begin{aligned} \infty &> \int_E f(x) \lambda(dx) \\ &= \int_{E \cap \{f(x) < \infty\}} f(x) \lambda(dx) + \int_{E \cap \{f(x) = +\infty\}} f(x) \lambda(dx) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $N = E \cap \{f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist, denn wäre $\lambda(N) = \varepsilon > 0$,

so $\int_N f \lambda(dx) = +\infty \cdot \lambda(N) = +\infty \Rightarrow \downarrow$

5-3

Daraus folgt, dass für ein $f \in \mathcal{L}(E)$ die Menge $N = E \cap \{x \mid f(x) = -\infty \text{ oder } f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist. Setzen wir $g := f \cdot \mathbb{1}_{N^c}$ so folgt:

$$g \sim f \quad \text{in } \mathcal{L}(E)$$

$$g(x) \in (-\infty, +\infty) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Daher dürfen wir für ein $f \in \mathcal{L}(E)$ annehmen, dass es nur endl. Werte auf E annimmt. [Genauer: Die Äquivalenzklasse $[f]_{\sim}$ von f enthält einen Repräsentanten g , der nur endl. Werte auf E annimmt.]

(d) Dies bedeutet, dass wir überall in S. 1.2. 13 den Ausdruck „für (alle) $x \in E$ “ durch „für fast alle $x \in E$ “ ersetzen dürfen, ebenso wie „ g beschränkt auf E “ durch „ g f.ü. beschränkt auf E “.

Insbesondere darf ich in Teil (a) im Fall, dass $x \in E$ existiert mit

$$xf(x) = \pm \infty \quad \text{und} \quad g(x) = \mp \infty$$

den Wert an dieser Stelle verändern

so dass $xf(x) + g(x)$ Sinn macht

[vermeide damit $\infty - \infty$]. Alle solche

x zusammen bilden ja nur Nullmenge.

(h) Ist $I \subset \mathbb{R}$ echtes offenes Intervall,
 endl. o. unendl.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem $[c, d] \subset I$

R-intbar, so gilt:

$f \in \mathcal{L}(I) \Leftrightarrow$ das uneigentliche R-Integr.

$$\int_I |f(x)| dx \text{ existiert}$$

(i) Für $f, g \in \mathcal{L}(E)$ muss nicht

$f \cdot g \in \mathcal{L}(E)$ gelten. Bsp $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$

$f: E \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto 1/\sqrt{x}$. Dann gelten

5-5 (ii) f ist auf E uneigentlich R-intbar

(i) f ist auf jedem $[c, d] \subset E$ beschränkt,
insb. R-intbar und

$\Rightarrow f$ L-intbar auf E

Für $f^2 = f \cdot f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ gilt
immer noch (i) aber nicht (ii). Aus (g)
folgt $f^2 \notin \mathcal{L}(E)$.

Denselben Sachverhalt illustriert ohne
Rückgriff auf Riemann-Int

Bsp. 1.2.16

Sei $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$

(1) und $f : E \rightarrow [0, \infty), f = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{k+1} \mathbb{1}_{I_k}$

$$I_k = (2^{-k-1}, 2^{-k}) \Rightarrow \lambda(I_k) = 2^{-k-1}$$

Dann ist $S_N = \sum_{k=1}^N 2^{k+1} \mathbb{1}_{I_k}$

einfache Fkt mit $N \mapsto S_N(x) \nearrow f(x)$

$$\text{für alle } x \in E, \int_E S_N = \sum_{k=1}^N \underbrace{2^{k+1} \lambda(I_k)}_{=1} \\ \boxed{5-6} \quad = N$$

somit $\int_E f = \sup_{s \in \mathcal{F}_E(f)} \int_E s \geq \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_E s_N = \infty$

(2) Für $g := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} 2^{k+1} \mathbb{1}_{I_k} : E \rightarrow [0, \infty)$

folgt analog:

$\forall x \in E$ ist $N \mapsto g_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{2^{k+1}}{k^2} \mathbb{1}_{I_k}(x)$ isotom

mit Grenzwert $g(x)$

und $\int_E g = \sup_{s \in \mathcal{F}_E(g)} \int_E s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} < \infty$

Aber

g^2 ist isotomer pht. Limes von

$$g_N^2(x) = \sum_{k=1}^N \frac{2^{2k+2}}{k^4} \mathbb{1}_{I_k}(x)$$

mit $\int_E g_N^2 = \sum_{k=1}^N \frac{2^{2k+2}}{k^4} 2^{-k-1} \longrightarrow \infty$

$$= \frac{2^{k+1}}{k^4} \longrightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$\text{Insbes} \quad \int_E g^2 \geq \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_E g_N^2 = +\infty$$

Diese Bsp. illustrieren Bedarf nach

1.3 Konvergenzsätze

Sei $E \subset \mathbb{R}^M$ messb., $f_k \in \mathcal{L}(E)$ für $k \in \mathbb{N}$ und
 $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ für (fast) alle $x \in E$.

Q: Gelten: $f \in \mathcal{L}(E)$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda = \int_E f \lambda ? \quad (1)$$

Bsp. 1.3.0

(i) Sei $f_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \begin{cases} 2k^2 x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2k}] \\ 2k - 2k^2 x & \text{für } x \in (\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ ist $f_k(0) = 0$

5-8 $\forall \delta > 0$ ist $f_k(x) = 0$ für alle $x \geq \delta$ und $k \geq 1/\delta$

insbes. $f_k \rightarrow 0$ pht. auf $[0,1]$. Aber

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f_k &= \int_{[0, 1/2k]} 2k^2 x + \int_{(1/2k, 1/k)} 2k - 2k^2 x \\&= k^2 [x^2]_0^{1/2k} + \frac{2k}{2k} - k^2 [x^2]_{1/2k}^{1/k} \\&= 1 + k^2 \left(\underbrace{\frac{1}{4k^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4k^2}} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2k^2}\end{aligned}$$

Also $\lim_k \int_{[0,1]} f_k = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_{[0,1]} 0$

Übg: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - 0\|_{\infty} \neq 0$

(ii) Ist jedes $f_k : E = [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-intbar

und $f_k \rightarrow f$ glm auf E , so ist f

R-intbar (also auch L-intbar) und (1) gilt.

Diese Vorauss. ist aber zu stark in vielen Fällen.

(iii) Sei $g_k : [0,1] = E \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_k(x) = \begin{cases} 2kx & \text{für } x \in [0, 1/2k] \\ 2 - 2kx & \text{für } x \in (1/2k, 1/k) \\ 0 & \text{für } x \in [1/k, 1] \end{cases}$$

Wieder gilt: $g_k \longrightarrow g \equiv 0$ pht w
aber nicht glm.

Für die Integrale gilt:

$$\begin{aligned} \int_E g_k &= k [x^2]_0^{1/2k} + \frac{2}{2k} - k [x^2]_{1/2k}^{1/k} \\ &= k \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{k} - k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4k^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{4k} = \frac{1}{2k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ursache, dass (1) klappt:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in [0,1]} |g_k(x)| \leq 1 < \infty \quad (2)$$

Uniform beschr. g_k

(iv) Sei $h_k: [0, \infty) = E \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{x}{k^2} & \text{für } x \in [0, k] \\ \frac{2k-x}{k^2} & (k, 2k) \\ 0 & [2k, \infty) \end{cases}$$

Es gelten: $\|h_k(x)\|_{\infty} = h_k(k) = \frac{1}{k} \rightarrow 0,$

insbes $h_k \rightarrow h \equiv 0$ glm., aber

$$\begin{aligned} \int_E h_k &= \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^k + \frac{2k}{k^2} \cdot k - \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_k^{2k} \\ &= 2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - \frac{4k^2}{2} + \frac{k^2}{2} \right) \\ &= 2 - \frac{2k^2}{2k^2} = 1 \neq 0 = \int_E h \end{aligned}$$

Also ist glm konv. kein Allheilmittel,
zumindest auf unbeschr. $E \subset \mathbb{R}^n$.

S. 1.3.1 von Beppo Levi über monotone konv.

Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ messb., $f_k: E \rightarrow [0, \infty]$ mit

(3) $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$
und fast alle $x \in E$

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{x}{k^2} & \text{für } x \in [0, k] \\ \frac{2k-x}{k^2} & (k, 2k) \\ 0 & [2k, \infty) \end{cases}$$

Es gelten: $\|h_k(x)\|_{\infty} = h_k(k) = \frac{1}{k} \rightarrow 0,$

insbes $h_k \rightarrow h \equiv 0$ glm., aber

$$\begin{aligned} \int_E h_k &= \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^k + \frac{2k}{k^2} \cdot k - \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_k^{2k} \\ &= 2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - \frac{4k^2}{2} + \frac{k^2}{2} \right) \\ &= 2 - \frac{2k^2}{2k^2} = 1 \neq 0 = \int_E h \end{aligned}$$

Also ist glm konv. kein Allheit mittel,
zumindest auf un beschr. $E \subset \mathbb{R}^n$.

S. 1.3.1 von Beppo Levi über monotone konv.

Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ messb., $f_k: E \rightarrow [0, \infty]$ mit

(3) $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$
und fast alle $x \in E$

Wg Monotonie ex.

$$(4) f(x) = \lim_k f_k(x) = \sup_k f_k(x) \quad \text{für fast alle } x \in E$$

Auf der Nullmenge $N \subset E$, wo (4) nicht gilt setzen wir f gleich Null. Dann ist

$$f \text{ messb. und } \int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \in [0, \infty]$$

Bw

Setze $N := \{x \in E \mid \text{Ungl. (3) ist verletzt für ein } k \in \mathbb{N}\}$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \mid f_k(x) > f_{k+1}(x)\}}_{\text{Nullmenge}}$$

$\Rightarrow N$ messb. Menge

$\Rightarrow g_k = \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_k$ messb. Fkt

und $f = \mathbb{1}_{N^c} f = \lim_k g_k$ messb. nach S. 1.2.3

$$\text{Setze } \beta_k = \int_E f_k = \int_E g_k \in [0, \infty]$$

$$\text{S. 1.2.13 und (3)} \Rightarrow \beta_k \leq \beta_{k+1}$$

$$\boxed{6-1} \Rightarrow \lim \beta_k = \sup \beta_k = \beta \text{ exist. in } [0, \infty]$$

Wg

$$g_k \leq f \text{ auf } E$$

$$\Rightarrow \beta_k = \int_E g_k \leq \int_E f \Rightarrow \beta \leq \int_E f$$

Sei nun $t \in (0,1)$ und $s \in \mathcal{F}_f(E)$, d.h. s einfach mit $0 \leq s \leq f$ auf E , sowie

$$F_k = F_k(t, s) := \{x \in E \mid g_k(x) \geq t s(x)\} \\ \subset \{x \mid g_{k+1}(x) \geq t s(x)\} \\ = F_{k+1}$$

sind messb. (Übg)

B.h. $\bigcup_k F_k = E$

B.w. $x \in E \setminus \bigcup_k F_k \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ gilt $f_k(x) < t s(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_k f_k(x) < t s(x) < s(x)$$

im Widersp. zu

$$s \leq f$$

$$\sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{E_j} \\ \parallel \\ s$$

Nun $\beta_k = \int_E g_k \geq \int_E \mathbb{1}_{F_k} g_k \geq t \int_E \mathbb{1}_{F_k} s$

$$= t \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda(F_k \cap E_j) \rightarrow t \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda(E_j) \\ \rightarrow \lambda(E_j) \text{ für } k \rightarrow \infty \quad (*)$$

$$= t \int_E s \Rightarrow \beta = \lim_k \beta_k \geq t \int_E s$$

Dies gilt $\forall t \in (0,1) \Rightarrow$

$$\int_E s = \sup_{t \in (0,1)} \sup_{s \in \mathcal{F}_t(E)} t \int_E s \leq \beta$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\leq \beta}$

□

Lem (*) 1.3.2

Das Lebesgue ma ß $\lambda: \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ ist stetig von unten, d.h. für eine Folge

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $A := \bigcup_k A_k$

gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k) = \lambda(A)$.

[In der Tat erfüllt jedes Maß diese Eigensch., insbesondere alle W-Maße.]

Eine Umformulierung vom Satz liefert.

Kor 1.3.3

Sei $E \subset \mathbb{R}^M$ messb., $f_h \in \mathcal{L}(E)$ für $h \in \mathbb{N}$,
s.d.

$$\sum_{h \in \mathbb{N}} \int_E |f_h(x)| \lambda(dx) < \infty$$

Dann ist für fast alle $x \in E$ die Reihe

$$\sum_{h \in \mathbb{N}} |f_h(x)| \quad \text{konvergent in } \mathbb{R}. \text{ Für}$$

jede Fkt $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{h \in \mathbb{N}} f_h(x)$

f.ü. auf E gilt $f \in \mathcal{L}(E)$ und

$$\sum_{h \in \mathbb{N}} \int_E f_h \lambda = \int_E f \lambda.$$

Es ist schwächer, aber einfacher anzuwenden
ist das

Lem. 1.3.4 vom Fatou

Sei $E \subset \mathbb{R}^M$ messb. und $f_h: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty]$,
 $f_h \in \mathcal{L}(E)$ für jedes $h \in \mathbb{N}$ so, dass

$\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = f(x)$ für fast alle $x \in E$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_E f_h \lambda(dx) < \infty.$$

Definiere $f : E \rightarrow [0, \infty]$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

Dann gelten:

- $f \in \mathcal{L}(E)$

- $\int_E f \, \lambda \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, \lambda$

Bw: Übq.

Genauso wichtig wie der Satz über monotone Konvergenz und im wesentlichen Äquivalent ist

Satz 1.3.5 von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ messb und $g, f_1, f_2, f_3, \dots \in \mathcal{L}(E)$,
s.d. für fast alle $x \in E$ gilt:

- $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$

- $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existiert

Dann:

ist $f \in \mathcal{L}(E)$

und

$$\int_E f(x) \lambda(dx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \lambda$$

Bw Für l. a. $x \in E$:

$$|f(x)| = \lim_k |f_k(x)| \leq g(x)$$

Monotonie von $\int_E \Rightarrow f \in \mathcal{L}(E)$ und $\int_E |f| \leq \int_E g$

Für l. a. $x \in E$:

$$|f_k(x)| \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq (g + f_k)(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq g + f$$

und

Monotonie

$g \in \mathcal{L}(E)$

$$\lim_k \int_E (g + f_k) \leq \lim_k \int_E (g + g) < \infty$$

L. v. Fatou $\Rightarrow$

$$\int_E f + \int_E g = \int_E (f + g) \leq \lim_k \int_E (f_k + g) < \infty$$

$$= \lim_k \int_E f_k + \cancel{\lim_k \int_E g}$$

$$\Rightarrow f + g \in \mathcal{L}(E) \quad \begin{matrix} g \in \mathcal{L}(E) \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad f \in \mathcal{L}(E)$$

und Umstellen ist erlaubt:

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E (f + g) - \int_E g \\ &\leq \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (f_k + g) \right) - \int_E g \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \quad (\square) \end{aligned}$$

Ebenso gilt für l. a. $x \in E$:

$$0 \leq g(x) - f_k(x) \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x)$$

und analog zu $(\square)$

$$-\int_E f = \int_E (g - f) - \int_E g \leq \lim_k \left(-\int_E f_k \right)$$

$$\Rightarrow \int_E f \geq \lim_k \int_E f_k \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \int_E (g - f) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (g - f_k) < \infty \\ &\leq g + |f_k| \leq 2g \end{aligned}$$

$(\square)$ & $(*)$ zusammen:

$$\int_E f = \lim_k \int_E f_k \quad \square$$

Stetigkeit einer Fkt kann man über
 Folgen $x_n \rightarrow x_0$ so wie über stetig
 variierende Parameter $y \rightarrow x_0$
 äquivalent definieren. Ebenso kann
 man majorisierte Konvergenz mit
 kont. Parametern umformulieren.
 Wir erhalten damit Aussagen über
 parameter abh. Integrale.

S. 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $E \subset \mathbb{R}^m$ messb.,

$f: \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$, s.d. $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E)$

für alle $x \in \Omega$. Defn

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_E f(x, y) \lambda(dy)$$

(a) Ist für f.a. $y \in E$ $f(\cdot, y)$ stetig
 in $x_0 \in \Omega$ und $g \in \mathcal{L}(E)$ s., d.

6-8 $|f(x, y)| \leq g(y)$ für fast alle y und alle x

so ist F stetig in x_0

Sei $j \in \{1, \dots, d\}$

(b) Für f.a. $y \in E$ und alle $x \in \Omega$ existiere

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y). \quad \text{Sei } h \in L^1(E) \text{ mit}$$

||

$$|(\partial_j f)(x, y)| \leq h(y) \text{ für f.a. } y \in E \text{ \& all } x \in \Omega$$

Dann ist F auf Ω partiell nach x_j
diffbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \lambda(dy), x \in \Omega.$$

1.4 Satz von Fubini

Wollen die Berechnung von Integralen
auf $\mathbb{R}^m$ zurück führen (wo möglich)

auf Berechnung von Integralen auf $\mathbb{R}$,

vgl. Doppel - (Riemann-) Integrale auf

Zunächst zeigen wir eine Faserumsformel für das Lebesgue-Volumen

S. 14.1. Prinzip vom Cavalieri

Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ messb mit endlichem Volumen $\chi^m(M)$. Für $z \in \mathbb{R}$ setze

$$M(z) := \left\{ (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (x_1, \dots, x_{m-1}, z) \in M \right\}$$

Wir nehmen an, dass M zwischen zwei Hyperbenen liegt, genauer: $\exists a, b \in \mathbb{R}$

s.d. $M(z) = \emptyset$ für $z \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

Dann ist

- für f.a. $z \in [a, b]$ die Menge $M(z)$ messbar in $\mathbb{R}^{m-1}$
- die Fkt $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \chi^{m-1}(M(z))$ ist daher f.ü. auf $[a, b]$ definiert

Dann

- ex Nullmenge $N \subset [a, b]$ s.d. für alle $z \in [a, b] \setminus N$ die Menge $M(z)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ messb ist
- ist die Fkt $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$
 $z \mapsto \mathbb{1}_{N^c} \lambda^{n-1}(M(z))$
Lebesgue-intbar. und

$$\lambda^n(M) = \int_{[a, b]} f(z) \lambda(dz) \quad (\text{Lebesgueintegral})$$

2. Nov. 2022

Bw

- ① Sei zunächst $M = Q$ ein endlicher halboffener Quader $= [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$
Wir können also $a = a_n, b = b_n$ wählen.

$$\Rightarrow M(z) = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}) \mathbb{1}_{[a, b]}(z)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda^{n-1} \left(\text{---} \parallel \text{---} \right) \mathbb{1}_{[a, b]}(z) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) \parallel \end{aligned}$$

7-1 ist so gar stückweise konst., d.h. Treppenf.,

auf $\mathbb{R}$, insbes. beschr. und L-messb.

Für Treppenfkt ist R-Integral

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z) dz &= \int_a^b \sum_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) dz \\ &= \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) = \lambda^n(Q)\end{aligned}$$

wohldef und gleich dem uneigentl. R-Integ.

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n-1} (b_j - a_j) \mathbb{1}_{[a_n, b_n)}(z) dz$$

und dem Lebesgue-Int.

$$\int_{\mathbb{R}} f(z) \lambda(dz)$$

② Sei nun $M \subset \mathbb{R}^M$ offen. Dann ex
wie in HA bewiesen eine Folge $Q_k, k \in \mathbb{N}$
von disjunkten halb offenen Quadern

$$M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$$

λ^M ist σ -additiv $\Rightarrow \lambda^M(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^M(Q_k)$

Setze

$$Q_k(z) = \{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, z) \in Q_k \subset \mathbb{R}^n \}$$

und

$$f_k(z) = \lambda^{n-1}(Q_k(z))$$

Teil ① $\Rightarrow \lambda^n(M) = \int_a^b f_k(z) \lambda(dz)$ also

$$\lambda^n(M) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \underbrace{\int_a^b f_k(z) \lambda(dz)}_{\geq 0}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^N f_k(z) \lambda(dz)$$

S. ö. monot.
Konvergenz
 $\Downarrow$

$$= \int_a^b g(z) \lambda(dz)$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ messb.}$$

Ist g die richtige Fkt?

Dazu: Q_k disj. $\Rightarrow Q_k(z)$ disj für jedes z

$$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k(z) = \bigcup_k \{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, z) \in Q_k \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ s.d. } (x, z) \in Q_k \}$$

$\Leftrightarrow (x, z) \in \bigcup_k Q_k$

$$= M(z)$$

$$\lambda^{n-1} \quad \sigma\text{-additiv} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(z) = \lambda^{n-1} (M(z)) &= \lambda^{n-1} \left(\bigcup_k Q_k(z) \right) = \sum_k^{\infty} \lambda^{n-1} (Q_k(z)) \\ &= \sum_k^{\infty} f_k(z) = g(z) . \end{aligned}$$

(3) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt so ex
offener endl. Quader $W \subset \mathbb{R}^n$ mit
 $M \subset W$.

$$\Rightarrow U := W \cup M \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

$$\chi^m(W) - \chi^m(M) = \chi^m(u)$$

$$= \int_a^b \lambda^{m-1}(u(z)) dz$$

$$= \chi^{m-1}(W(z) \setminus M(z)) = \chi^{m-1}(W(z)) - \chi^{m-1}(M(z))$$

$$= \int_a^b \lambda^{m-1} (W(z)) dz - \int_a^b \lambda^{m-1} (M(z)) dz$$

$$= \lambda^m(W) \quad \text{nach Teil (2)}$$

Umstellen $\Rightarrow \chi^n(M) = \int_a^b \chi^{n-1}(M(z)) dz$

④ Nom M wie im Satz insbes mess.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U$ offen, K kompakt mit

$$\chi^M(U) - \varepsilon \leq \chi^M(M) \leq \chi^M(K) + \varepsilon$$

$$K \subset M \subset U$$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \exists K_m \subset M \subset U_m$
komp. offen

$$\text{mit } \lim_m \chi^M(K_m) = \chi^M(M) = \lim_m \chi^M(U_m)$$

Daraus folgt mit Hilfe des S. über
monotone komp die Beh. $\square$

Mit den selben Beweisideen kann man auch
folgende allgem. Auss. zeigen

S. 1.4.2 messb.

Sei $M \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p, q, m \in \mathbb{N}$ mit $m = p + q$

und $\chi^m(M) < \infty$. Für $z = (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{R}^q$

setze

$$M(z) := \left\{ \underset{\parallel}{x \in \mathbb{R}^p} \mid (x_1, \dots, x_p, z_1, \dots, z_q) \in M \right\}$$
$$(x_1, \dots, x_p)$$

Dann ex Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$ s. d.

* für alle $z \in \mathbb{R}^q \setminus N$ die Menge $M(z)$ messb. in $\mathbb{R}^p$ ist,

* die Fkt. $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \mathbb{1}_{N^c}(z) \lambda^p(M(z))$ Lebesgue-int. bar ist und

* $\lambda^m(M) = \int_{\mathbb{R}^q} f(z) \lambda^q(dz)$ gilt.

Lebesgue-Intgr.

R.S. kann man auch als mehrfaches Riemann-Intgr. hinschreiben.

Wenden nun P.v. Cavalieri an in

Bsp. 1.4.3

(i) Sei $M = B = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_2 < 1\}$

euklidische Einheitsk. und $\omega_m = \lambda^m(B)$.

Für $z \in \mathbb{R}$ und $M(z) = \{y \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \underbrace{(y, z)}_{\in B} \in B\}$

gilt:
 $= (y_1, \dots, y_{m-1}, z)$

$M(z) = \emptyset$ für $z > 1$ oder $z < -1$

Bsp. 1.4.3

Kartesische Produkte

(i) Seien $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ messbar
mit endl. Volumen: $\lambda^p(A) < \infty$, $\lambda^q(B) < \infty$

Dann ist $M = A \times B \subset \mathbb{R}^m$ messbar, $m = p + q$,

vgl. HA Blatt 3.

Für $z \in \mathbb{R}^q$ ist $z = (z_1, \dots, z_q)$

$$M(z) = \{ x \in \mathbb{R}^p \mid (x, z) \in M \}$$

$\parallel$
 $A \times B$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^p \mid x \in A \text{ und } z \in B \}$$

$$= \begin{cases} A & \text{falls } z \in B \\ \emptyset & z \notin B \end{cases}$$

$$f(z) = \lambda^p(M(z)) = \lambda^p(A) \cdot \mathbb{1}_B(z)$$

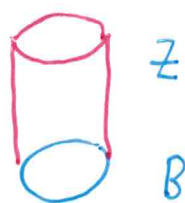
$$\lambda^m(A \times B) = \lambda^m(M) = \int_{\mathbb{R}^q} f(z) \lambda(dz)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^p(A) \cdot \mathbb{1}_B(z) \lambda(dz) = \lambda^p(A) \int_B \mathbb{1} \lambda(dz) = \lambda^p(A) \cdot \lambda^q(B)$$

(ii) Zylinder sind Spezialfall

$$A = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

$$B = \text{Ball} = B_1(c) \subset \mathbb{R}^{m-1}$$



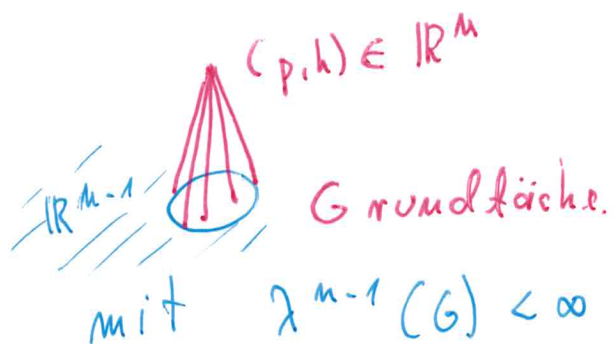
$$M = Z(h, B) = A \times B$$

$$h = b - a \quad \text{Höhe}$$

$$\chi^m(M) = (b - a) \chi^{m-1}(B)$$

(iii) Abwandlung: Kegel:

Sei $G \subset \mathbb{R}^{m-1}$ messbar



Wähle einen Punkt $(p, h) \in \mathbb{R}^m$ in der Höhe $h > 0$ über der Grundfläche $G \subset \mathbb{R}^{m-1}$ und verbinde jeden Punkt in $G \times \{0\}$ ihm mit

durch eine Strecke: Verbindungsstr. zw $(q, 0)$ und (p, h)

$$C_{G, h} = \bigcup_{q \in G} \left\{ (1-t)(q, 0) + t(p, h) \mid t \in [0, 1] \right\}$$

$$= \left\{ (1-t)(q, 0) + t(p, h) \mid t \in [0, 1], q \in G \right\}$$

$= (t p, t h)$

$$\stackrel{s=t h}{=} \left\{ \left(1 - \frac{s}{h}\right)(q, 0) + \left(\frac{s}{h} p, s\right) \mid s \in [0, h], q \in G \right\}$$

erhalte dadurch Kegel $M = C_{G,h}$

Für $z \in [0, h]$

$$M(z) \stackrel{s=z}{=} \bigwedge_{\mathbb{R}^{m-1}} \left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) (g, \emptyset) + \left(\frac{z}{h} p, \emptyset\right) \mid g \in G \right\} \bigwedge_{\mathbb{R}^{m-1}}$$

$$= \tau_{\frac{z}{h} p} \left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) g \mid g \in G \right\}$$

Translation um $\frac{z}{h} p$ ändert Vol. nicht.

$$\Rightarrow \lambda^{m-1}(M(z)) = \lambda^{m-1} \left(\underbrace{\left\{ \left(1 - \frac{z}{h}\right) g \mid g \in G \right\}}_{\stackrel{\text{red circle}}{=} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{m-1} \lambda^{m-1}(G)} \right)$$

ist ähnlich zu G mit Streckungsfaktor $1 - \frac{z}{h}$



Für $z \notin [0, h] \Rightarrow M(z) = \emptyset$

beweisen wir im nächsten Abschnitt zur Trafo-Formel.

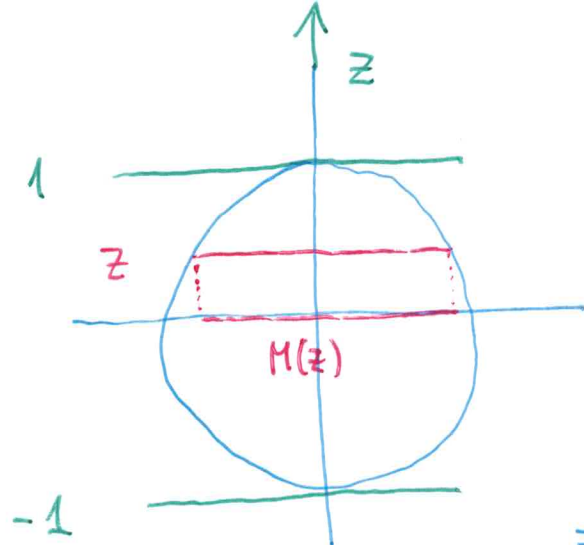
$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda^m(C_{G,h}) &= \int_0^h \lambda^{m-1}(M(z)) dz \\ &= \int_0^h \underbrace{\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{m-1}}_{\text{green underline}} \underbrace{\lambda^{m-1}(G)}_{\text{green underline}} dz \end{aligned}$$

7-9

$$= \lambda^{m-1}(G) \underbrace{\int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{m-1} dz}_{= \frac{h}{m}}$$

Spezialfall: Fläche des Dreiecks

$$\begin{aligned} \lambda^2(\text{Dreieck}) &= \frac{h}{m} \lambda(\text{Länge der Basis}) \\ &= \frac{h}{2} \text{ Breite} \end{aligned}$$



$$M(z) = B_{\sqrt{1-z^2}}(0)$$

$$f(z) = \lambda^{n-1} (M(z))$$

$$= \text{Vorfaktor} \cdot \text{Radius}^{n-1}$$

$$= \omega_{n-1} \cdot \left(\sqrt{1-z^2} \right)^{n-1}$$

Also

$$\omega_n = \lambda^n (B_1) = \int_{-1}^1 \omega_{n-1} (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz$$

$$\begin{aligned} \sin t &= z \\ \frac{dz}{dt} &= \cos t \\ &= \omega_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(1 - \sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}}}_{= \cos^2 t} \cos t \, dt \\ &= \underbrace{\quad \quad \quad}_{= (\cos t)^n} \end{aligned}$$

$$= \omega_{n-1} \quad C_n$$

$$\text{Part Integr} \Rightarrow C_n = \frac{n-1}{n} C_{n-2}$$

$$C_0 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \, dt = \pi$$

$$C_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt = \left[\sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$$

Rekursiv erhält man nun die Werte

$$c_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$c_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \omega_{2k} &= \omega_{2k-1} c_{2k} = \omega_{2k-2} c_{2k-1} c_{2k} \\ &= \omega_{2k-2} \frac{2\pi}{2k} = \omega_{2k-2} \frac{\pi}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{2k+1} &= \omega_{2k} c_{2k+1} = \omega_{2k-1} c_{2k} c_{2k+1} \\ &= \omega_{2k-1} \cdot \frac{2\pi}{2k+1} \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \text{Länge von } (-1, 1) = \lambda^1((-1, 1)) = 2$$

$$\omega_2 = \text{Fläche } \lambda^2(B_1) = \pi \quad \text{kommen wir.}$$

Rekursiv folgt:

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad , \quad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)}$$

$$\boxed{7-12} \quad \text{allgemein} \quad \omega_n = \pi^{n/2} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1}$$

mit Hilfe der Π -Fkt. Insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$$

mit Hilfe der Π -Fkt. Insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$$

(v) Spezialfall vom Kegel: Simplex

$$S_n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in [0, \infty), \sum_{j=1}^n x_j \leq 1 \}$$

$$G = \{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in [0, \infty), \sum_{j=1}^{n-1} x_j \leq 1 \}$$

Grundfläche

$$= S_{n-1}$$

Höhe $h = 1$

$$\Rightarrow \text{Rekursionsformel} \quad \lambda^n(S_n) = \frac{1}{n} \lambda^{n-1}(S_{n-1})$$

$$S_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x \leq 1 \} = [0, 1] \Rightarrow \lambda^1(S_1) = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2(S_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda^n(S_n) = \frac{1}{n!}$$

Verallg. von Aussage von Volumina, d.h.
Integralen von Indikator fkt. auf allg. Fkt.

S. vom Fubini 1.4.4

Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann

i) für f. a. $y \in \mathbb{R}^q$ ist $\mathbb{R}^p \ni x \mapsto f(x, y)$
Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$

Bez. die Menge, wo dies nicht gilt mit $N \subset \mathbb{R}^q$

ii) die Fkt. $\mathbb{R}^q \ni y \mapsto \mathbb{1}_{N^c}(y) \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \lambda^p(dx)$

ist in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$

iii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \lambda^n = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \lambda^p(dx) \right) \lambda^q(dy)$$

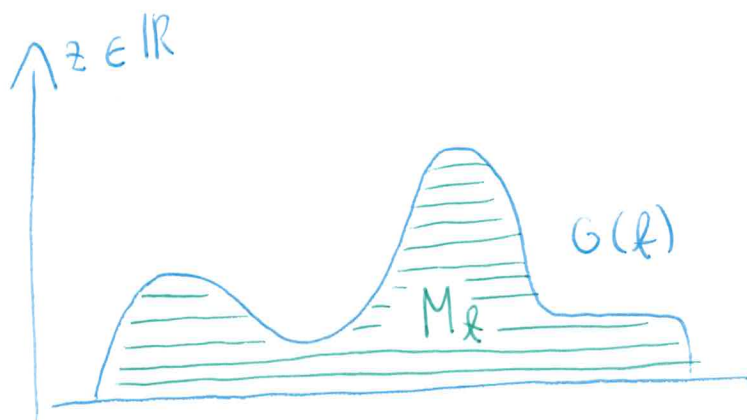
$$= \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^p(dx) f(x, y)$$

Bw Skiz. Da jedes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ in $f = f_+ - f_-$ zerfällt
und alle der Integrale linear sind, reicht es
den Bw. für $f \geq 0$ zu führen

$$f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y) = z$$

$$\text{Graph } G(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid z = f(x, y) \}$$

$$M_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$



$$(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^m$$

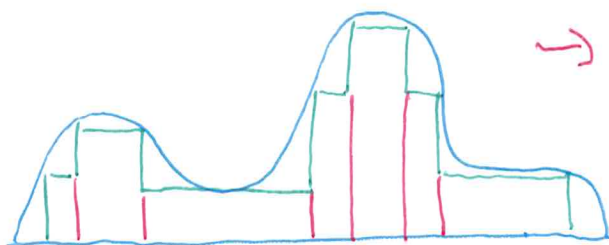
f messb Fkt $\Rightarrow M_f$ messb. Teil m von $\mathbb{R}^{m+1}$

Idee mvm:

"Integral von $f \sim$ Fläche unterm Graphen"

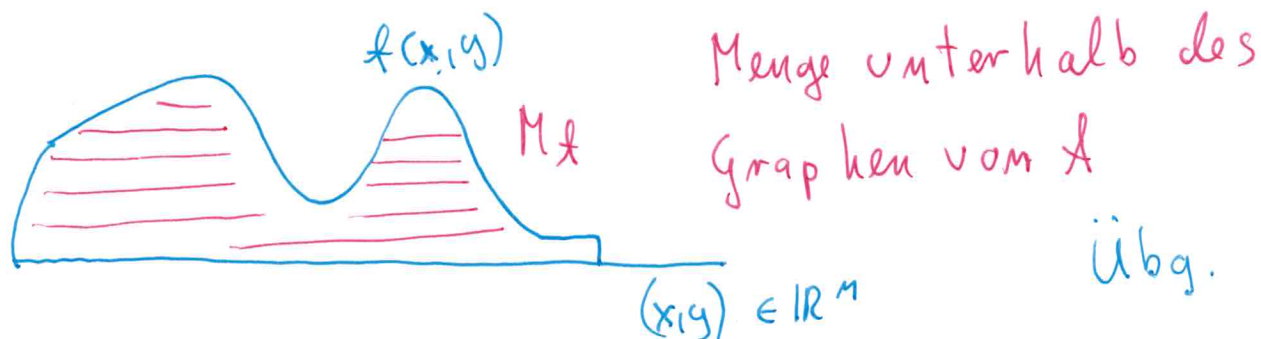
$$\int_{\mathbb{R}^m} f \, \lambda^m(dx, dy) = \lambda^{m+1}(M_f) \quad (1)$$

$\downarrow$ approximiert durch
Integr. von element Fkt.



$\rightarrow$ aufgefasst als Quader
im $\mathbb{R}^{m+1}$ bilden Näher-
ung des Volumens $\lambda^{m+1}(M_f)$

f messb. Fkt $\Rightarrow M_f := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^m, z \in [0, f(x)] \}$
 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ messb.



Nach Def. von M_f ist

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \, \lambda^m(dx, dy) = \lambda^{m+1}(M_f) \quad (1)$$

Es ist $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$

und für jedes $y \in \mathbb{R}^q$ ist

$$M_f(y) = \{ (x_1, \dots, x_p, z) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid (x_1, \dots, x_p, y, z) \in M_f \}$$

messb. nach dem Prinzip v. Cavalieri und

$$\mathbb{R}^q \ni y \mapsto h(y) = \lambda^{p+1}(M_f(y))$$

ist bis auf eine y -Nullmenge wohldefiniert und λ^q -integrierbar.

Analog zu (1) gilt Parameter

$$\int_{\mathbb{R}^P} f(x_1, \dots, x_P, y) \lambda^P(dx) = \lambda^{P+1}(M_f(y))$$

Parameter abh. Integral

Widerum nach dem Pr. v. Cavalieri gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(M_f) &= \int_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\lambda^{P+1}(M_f(y))}_{\text{Parameter abh. Integral}} \lambda^q(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^P} f(\bar{x}, y) \lambda^P(dx) \end{aligned}$$

(1) //

$$\int_{\mathbb{R}^M} f \lambda^M$$

Man kann die Rollen von $x \in \mathbb{R}^P$ und $y \in \mathbb{R}^q$ vertauschen und erhält

$$\int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) \int_{\mathbb{R}^P} \lambda^P(dx) f(xy) = \int_{\mathbb{R}^M} \lambda^M(dx, dy) f(xy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^P} \lambda^P(dx) \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) f(xy)$$

Diese nennt man auch iterierte Integrale.

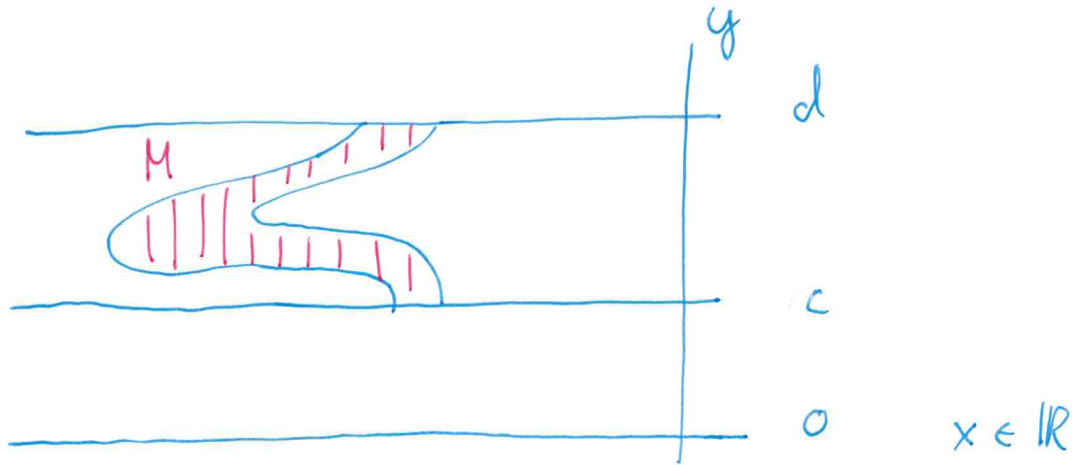
Es folgt induktiv:

$$\int_{\mathbb{R}^M} f(\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{=x}) \lambda^M(dx) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx_1) \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx_2) : \dots$$
$$\dots \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dx_m) f(x_1, \dots, x_m)$$

Ebenso ist

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in G, \quad a(y) \leq x \leq b(y) \}$$

im Normalbereich bzgl. x und



für $g \in L(H)$ gilt

$$\int_M g(x,y) \lambda^2(dx,dy) = \int_{[c,d]} \lambda^1(dy) \int_{[a(y), b(y)]} \lambda^1(dx) g(x,y)$$

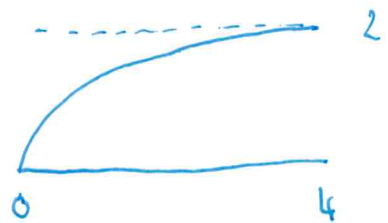
(ii) Sei

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 4], y \in [0, 2], y \leq \sqrt{x} \}$$

$$\textcircled{=}\{ \quad || \quad - || \quad , \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x} \}$$

Normalbereich bzgl. y

$$= \{ (x, y) \mid x \in [0, 2], y^2 \leq x \leq 4 \}$$



Kor. 1.4.7. von Fubini

Sei $G \subset \mathbb{R}^M$ Normalbereich bzgl. x_1 und
 $f \in \mathcal{L}(G)$. Dann

$$\int_M f \, \lambda^M = \int_G \lambda^{M-1}(dx) \int_{[a(x), b(x)]}^{\mathbb{R}^{M-1}} f(x, x_M) \, \lambda^1(dx_M)$$

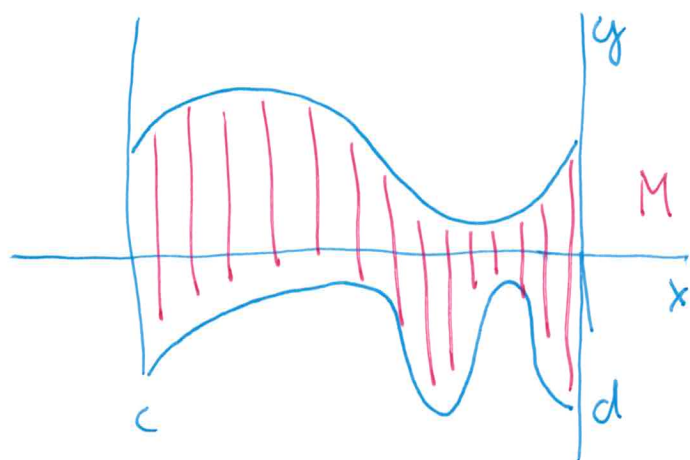
Bsp. 1.4.8

(i) Sei $G = [c, d] \subset \mathbb{R}$ Intervall und
 $a, b: G \rightarrow \mathbb{R}$ messb. mit $a \leq b$ auf G

Dann ist

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in G, a(x) \leq y \leq b(x) \}$$

ein Normalbereich bzgl. y . und für $f \in \mathcal{L}(M)$:



$$\begin{aligned} \int_M f \, \lambda^2 &= \\ &= \int_{[c, d]} \lambda^1(dx) \int_{[a(x), b(x)]} \lambda^1(dy) f(x, y) \end{aligned}$$

Um Fubini anwenden zu können, müssen wir $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ wissen. Um dies zu überprüfen nutzt:

S.v. Tonelli 1.4.5

Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messb.

mit

$$\int_{\mathbb{R}^q} \lambda^q(dy) \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^p(dx) |f(x, y)| < \infty$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und die Auss. des S.v. Fubini gilt.

Eine Verallgem. vom kartesischen Produkt $G \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ist:

Def. 1.4.6.

Eine messb. Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Normalbereich bzgl. x_n , falls ein messb. $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und

Fkt $a, b : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ exist., s.d.

(i) $\forall x \in G \subset \mathbb{R}^{n-1} : a(x) \leq b(x)$ und

(ii) $M = \{ (x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in G, a(x) \leq x_n \leq b(x) \}$

auch Normalbereich bzgl. x

Insbes: für $f \in \mathcal{L}(M)$

$$\int_M f \, \lambda^2 = \int_{[0,4]} \lambda^1(dx) \int_{[0, \sqrt{x}]} \lambda^1(dy) f(x,y)$$

$$= \int_{[0,2]} \lambda^1(dy) \int_{[y^2, 4]} \lambda^1(dx) f(x,y)$$

konkret für $f(x,y) = x \cdot y$ stetig $\Rightarrow$ R-intb.

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 dy \left(\int_{y^2}^4 dx \, xy \right) = \frac{1}{2} \int_0^2 dy (16y - y^5) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{y^2}^4 = (16 - y^4)/2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[8y^2 - \frac{1}{6} y^6 \right]_0^2 = \frac{32 - \frac{1}{6} 64}{2} = \frac{32}{3}$$

[] führt zum selben Resultat.

(iii) Sei $M = \{ (x,y,z) \in [0,\infty)^3 \mid x+y+z \leq 1 \}$

Tetraeder = S_3 Simplex

Die Begrenzungsbedingungen bleiben exakt die selben falls wir zwei oder drei Variablen vertauschen: Also

Falls M ein Normalbereich bzgl. z ist, dann auch bzgl. x und y .

$$\begin{aligned}\text{Setze } G &= \{ (x,y) \in [0,\infty)^2 \mid x+y \leq 1 \} = S_2 \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \}\end{aligned}$$

dann gilt

$$M = S_3 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in G, 0 \leq z \leq 1-x-y \}$$

Also gilt für $f \in \mathcal{L}(M)$:

$$\begin{aligned}& \int_M \lambda^3(dx, dy, dz) f(x,y,z) \\ &= \int_{[0,1]} \lambda^1(dx) \int_{[0,1-x]} \lambda^1(dy) \int_{[0,1-x-y]} \lambda^1(dz) f(x,y,z) = \dots = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

z.B. für $f(x,y,z) = 1+2x$

Bsp. 1.4.9 Sei $M \subset \mathbb{R}^M$ messb. und

$g: M \rightarrow [0, \infty)$ messb. Wir interpretieren

g als Masseverteilung oder Dichte

~~nehmen an, dass für die Gesamtmasse~~

gilt $m(g) := \int_M \lambda^M(dx) g(x) \in (0, \infty)$

so ist dies die Masse der Dichte g .

Gilt so gar

$$\int_M \lambda^M(dx) g(x) (1 + \|x\|) < \infty$$

dann ist der Schwerpunkt der Masseverteilung
 g gegeben durch:

$$s(g) = (s_1, s_2, \dots, s_M) \text{ mit}$$

$$s_k := \frac{1}{m(g)} \int_M \lambda^M(dx) x_k \cdot g(x)$$

Ist die Dichte innerhalb des Körpers $M \subset \mathbb{R}^3$

8-10 konstant, gilt

$$s(g) = (s_1, s_2, s_3) \text{ mit}$$

$$s_k = \frac{1}{\lambda^3(M)} \int_M \lambda^3(dx) x_k$$

1.5 Transformationsformel

ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel in mehreren Dimensionen. Die Kreisfläche lässt sich nicht so einfach in kartesischen Koordinaten $x, y \in \mathbb{R}$ berechnen, wohl aber, nach einer Substitution in Polarkoordinaten

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Defn 1.5. Seien $U, D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiete und

$\psi: U \rightarrow D$ bijektiv. ψ heißt C^1 -Diffeomorphismus

(oder Koordinatentransformation)

falls $\Psi: U \rightarrow D$ und $\Psi^{-1}: D \rightarrow U$ stetig

8-11 diffbar sind.

$$s(g) = (s_1, s_2, s_3) \text{ mit}$$

$$S_k = \frac{1}{\lambda^3(M)} \int_M \lambda^3(dx) x_k$$

1.5 Transformationsformel

ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel in mehreren Dimensionen. Die Kreisfläche lässt sich nicht so einfach in kartesischen Koordinaten $x, y \in \mathbb{R}$ berechnen, wohl aber, nach einer Substitution in Polarkoordinaten

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Def 1.5. Seien $U, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\psi: U \rightarrow D$ bijektiv. ψ heißt C^1 -Diffeomorphismus (oder Koordinatentransformation) falls $\psi: U \rightarrow D$ und $\psi^{-1}: D \rightarrow U$ stetig diffbar sind.

Nach Dfm gilt $\text{Id} = \psi^{-1} \circ \psi : U \rightarrow U$

und $J_{\text{Id}} = \text{Id}$ Matrizen

„beste lineare Approx. von Id ist Id selbst“

$$D(\text{Id}) = \text{Id} \quad \text{lin Abb.}$$

mehr lin Kettenregel:

$$\begin{aligned} \text{Id} = J_{\text{Id}}(u) &= J_{\psi^{-1} \circ \psi}(u) \\ &= J_{\psi^{-1}}(\psi(u)) J_{\psi}(u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{\psi}(u)^{-1} = J_{\psi^{-1}}(\psi(u)) \quad \text{ex. für alle } u \in U$$

$$\Rightarrow J_{\psi}(u) \text{ invertierbar und } \det J_{\psi}(u) \neq 0$$

letztere nennt man Funktionaldeterminante

S. 1.5.2 Transformationssatz

Seien $U, W, D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiete, $A \subset \mathbb{R}^m$ messb.

mit $W \supset A \supset U$ und $\lambda^m(A \setminus U) = 0$. Sei

$\psi \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$ und $\psi : U \rightarrow D = \psi(U)$

9-1 C^1 -Diffeomorphismus.

Im einfachsten Fall $W=A=U \subset \mathbb{R}^M$ und

$$\psi: U \rightarrow D = \psi(U) \quad C^1\text{-Diffeom.}$$

Für eine Fkt. $f: \psi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent

$$(i) \quad f \in \mathcal{L}(\psi(A))$$

$$(ii) \quad (f \circ \psi) |\det J_\psi| \in \mathcal{L}(A)$$

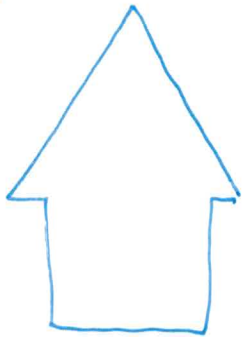
Ist eine / beide der Bed. erfüllt, so gilt auch:

$$\int_{\psi(A)} f(x) \lambda^M(dx) = \int_A f(\psi(u)) |\det J_\psi(u)| \lambda^M(du)$$

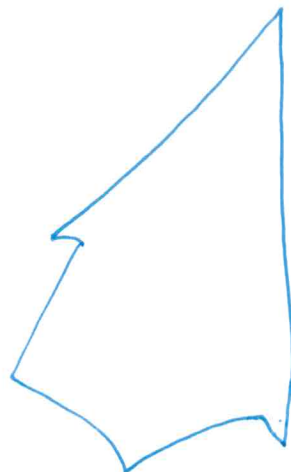
Insbes. für $f \equiv 1$:

$$\lambda^M(\psi(A)) = \int_{\psi(A)} 1 \lambda^M = \int_A |\det J_\psi(u)| \lambda^M(du)$$

$A=U$



ψ



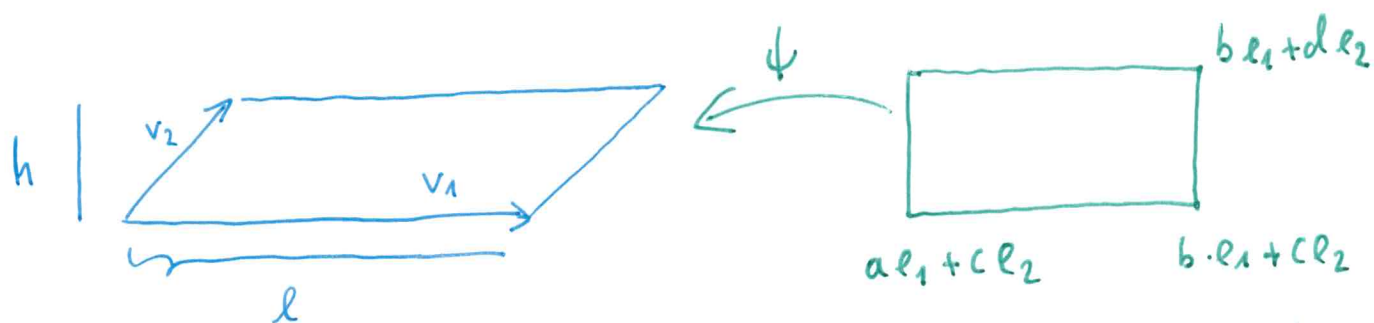
$D = \psi(U)$
 $= \psi(A)$

Bw - Ideen in $\mathbb{R}^2$

Sei $A = [a, b] \times [c, d]$ Rechteck

Ist ϕ linear oder affin-linear, so ist

$\phi(A)$ ein Parallelogramm:



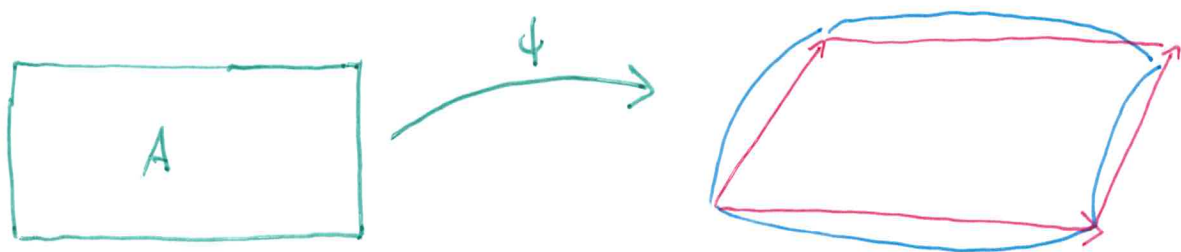
mit Volumen $\lambda^2(\phi(A)) = l \cdot h = |\det(v_1, v_2)|$

$$= |\det(J_\phi((b-a)e_1, (d-c)e_2))|$$

multi. $= |\det J_\phi| \underbrace{(b-a) \cdot (d-c)}_{\lambda^2(A)}$ $\parallel$ ϕ da ϕ linear

lin.

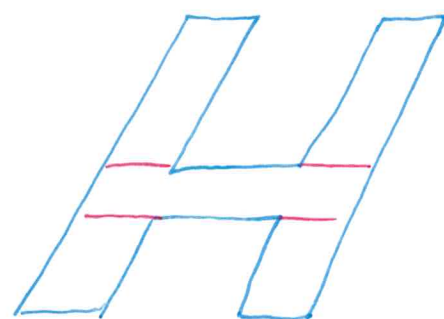
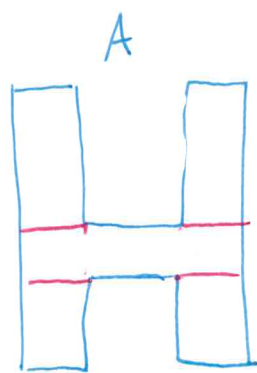
Wir sehen schon mal, wie die Determinante auftaucht. Ist ϕ nicht linear aber C^1 -Diffeomorphismus



g-3] so ist $\phi(A)$ näherungsweise ein

Parallelogramm. Der Näherungsfehler ist umso kleiner, je kleiner das Rechteck ist, denn φ ist C^1 , also wird über kleine Distanzen φ gut durch $D\varphi$ bzw J_φ approximiert

Ist φ linear und A Vereinigung von Rechtecken, so gilt wegen der Additivität des Lebesgue Maßes.



weiterhin:

$$\lambda^2(\varphi(A)) = |\det \varphi| \lambda^2(A)$$

Beides motiviert, dass es günstig ist, A in kleine Rechtecke zu zerlegen, darauf 9-4 die Transformationsformel anzuwenden

- dabei darf das ψ durch $J\psi$ mit kleinem Fehler approximiert werden — und danach die Beiträge über die Zerlegung zu addieren.

Im Folgenden beschränken wir uns wieder auf ein Rechteck $A = [a, b] \times [c, d]$ und zerlegen es

$Z_1 = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$

$Z_2 = \{v_0, \dots, v_s\}$ „ $[c, d]$

Rechtecke $R_{j,h} = [u_{j-1}, u_j] \times [v_{h-1}, v_h]$

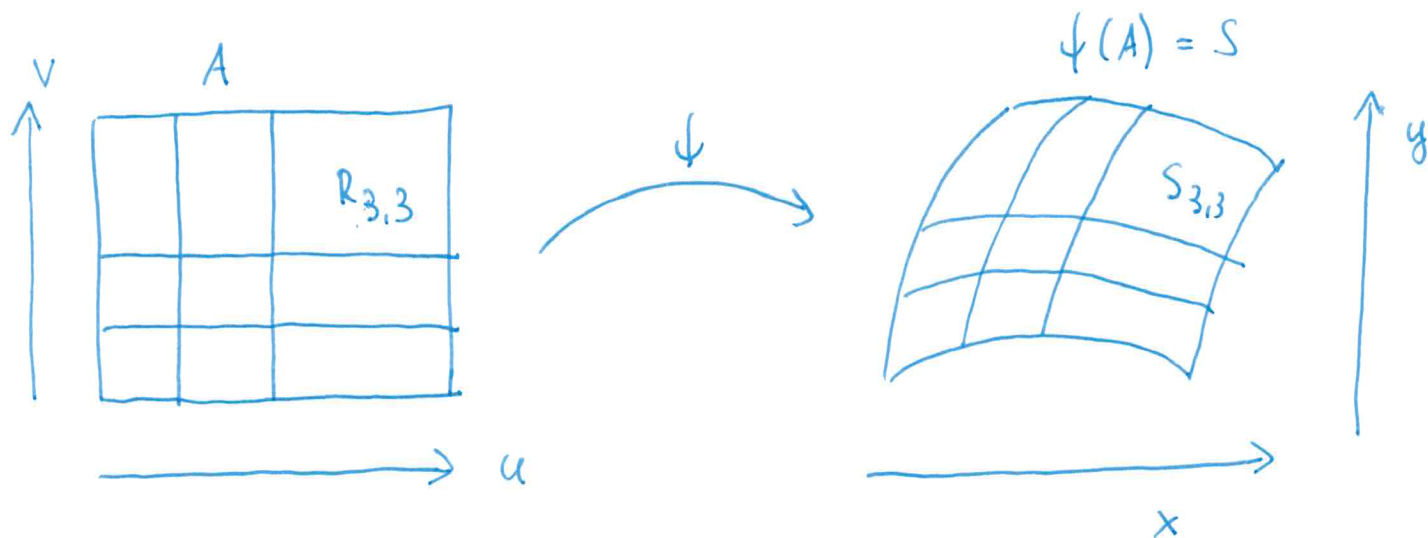
(jeweils mit rechter oberer Ecke (u_j, v_h))

bilden Zerlegung von A

Setze $S_{j,h} = \psi(R_{j,h})$ & $(x_j, y_h) = \psi(u_j, v_h)$

Wir lassen die „neuen“ x - y Koordinaten als Komponenten von ψ auf:

g-5 $\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} := \psi(u,v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u,v) \\ \psi_2(u,v) \end{pmatrix} \in \psi(A) \subset \mathbb{R}^2$



Zumindest für stetige $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ist
 die Approximation Volumen d. deformierten R.

$$\int_S f(x,y) \lambda(dx,dy) \approx \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \underbrace{f(x_{j-1}, y_{k-1})}_{\text{Wert in einem Schp. von } S_{j,k}} \overbrace{\lambda^2(S_{j,k})}^{\text{Volumen d. deformierten R.}}$$

intuitiv.

Das Volumen $\lambda^2(S_{j,k})$ berechnen bzw approx.
 wir wie oben. Da ϕ jetzt nicht mehr
 linear ist verwenden wir die Näherungen

$$w_1 = \phi(u_j, v_{k-1}) - \phi(u_{j-1}, v_{k-1}) \sim D_1 \phi(u_{j-1}, v_{k-1}) \cdot (u_j - u_{j-1})$$

$$w_2 = \phi(u_{j-1}, v_k) - \phi(u_{j-1}, v_{k-1}) \sim (D_2 \phi(u_{j-1}, v_{k-1})) \cdot (v_k - v_{k-1})$$

Diese sind motiviert durch den
Mittelwertsatz und durch $\phi \in C^1$.

$$\Rightarrow \lambda^2(S_{j,h}) \sim \lambda^2(\text{von } w_1, w_2 \text{ aufgesp. Parallelogr})$$

$$\sim \left| \det \begin{pmatrix} D_1 \phi(u_{j-1}, v_{h-1}) \cdot (u_j - u_{j-1}), \\ D_2 \phi(u_{j-1}, v_{h-1}) (v_h - v_{h-1}) \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{array}{l} \text{multi} \\ = \\ \text{linear} \end{array} \quad \underbrace{(u_j - u_{j-1})(v_h - v_{h-1})}_{= \lambda^2(R_{j,h})} \left| \det D\phi(u_{j-1}, v_{h-1}) \right|$$

Also zusammen

$$\int_S f(x,y) \lambda^2(dx, dy) \sim \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^s f(x_{j-1}, y_{h-1}) \lambda^2(S_{j,h})$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^s f(\phi(u_{j-1}, v_{h-1})) \left| \det D\phi(u_{j-1}, v_{h-1}) \right| \lambda^2(R_{j,h})$$

$$\sim \int_A f(\phi(u,v)) \left| \det D(u,v) \right| \lambda^2(du, dv)$$



Kor. 1.5.3 (a)

Ist $\tau_c: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x \mapsto x + c$ Translation

und $\psi = \tau_c$, so ist $D\psi = D\tau_c = \text{Id}$

insbes $\det \psi'(u) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^M$.

$\Rightarrow \lambda^M(\tau_c(A)) = \lambda^M(A)$ für alle messb. $A \subset \mathbb{R}^M$
und alle $c \in \mathbb{R}^M$.

"Translationsinv. des Lebesgue Maßes"

und

$$\int_{\tau_c(A)} f(x) \lambda^M(dx) = \int_A f(u+c) \lambda^M(du)$$

kurzschreibweise $A+c = \tau_c(A)$

(b)

Sei $L: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ linear und B zugeh. $n \times n$ Matrix. Dann ist für alle $u \in \mathbb{R}^M$:

$$DL(u) = L \text{ und } \det(DL) = \det(B)$$

insbes für jedes messb. $A \subset \mathbb{R}^M$

$$\boxed{9-8} \quad \lambda^M(L(A)) = |\det B| \lambda^M(A)$$

Ist L sogar orthogonal, so ist

$$|\det DL(u)| = 1 \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^M,$$

also $\lambda^M(L(A)) = \lambda^M(A)$

"Lebesgue Maß ist invariant unter orthog. Abb.,
insbes. Spiegelungen und Drehungen."

c) Für $r > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^M$ setze

$$rA = \{rx \mid x \in A\}$$

Ist A messbar, so auch rA und

$$\lambda^M(rA) = r^M \lambda^M(A)$$

und

$$\int_{rA} f(x) \lambda^M(dx) = \int_A f(ru) r^M \lambda^M(du)$$

denn für $\phi(x) = r \cdot x$ gilt

$$D\phi(x) = r \operatorname{Id} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^M, \text{ also}$$

$$\det D\phi(x) = r^M, \quad \text{da } r \operatorname{Id} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & r \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}}$$

Spezialfall vom allg. Teil von b)

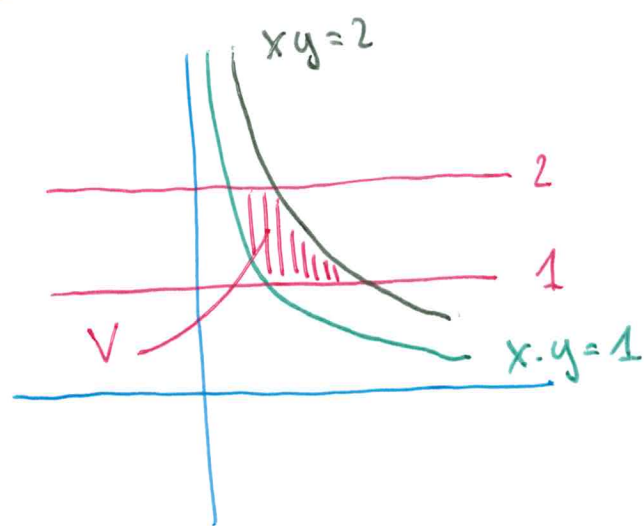
Diese Eig. haben wir im Vorgriff bereits bei der Berechnung des Kugelvolumens benutzt

Für $B_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < r\}$ gilt

$$\lambda^m(B_r) = r^m \lambda^m(B_1) = r^m \omega_m.$$

Bsp. 1.5.4

krummliniges Viereck



Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ berandet durch:

$$\{(x,y) \mid y=1\}, \{y=2\}$$

$$\{xy=1\}, \{xy=2\}$$

Berechne: $\int_V xy^2 \lambda^2(dx, dy)$

Finde Koordinatentransf. $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

s.d. $\psi^{-1}(V)$ ein Rechteck R ist.

Idee: Mach aus Hyperbeln Geraden

$$u := xy$$

$$v := y \quad (\text{horiz. Geraden sind ja da})$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \frac{u}{y} = \frac{u}{v}, \quad y = v \quad \text{für } u, v > 0$$

Defn. $\psi: U = R \rightarrow V$

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{v} \\ v \end{pmatrix}$$

Für $R = [1, 2] \times [1, 2]$ werden die Eckpunkte

$$(1, 1) \mapsto (1, 1)$$

$$(1, 2) \mapsto \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$(2, 1) \mapsto (2, 1)$$

$$(2, 2) \mapsto (1, 2)$$

auf die Eckpunkte von V abgebildet. Es gilt

$$J_{\psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\psi} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{v} > 0 \text{ auf } R.$$

Trasf. satz $\Rightarrow$

$$\int_V xy^2 \lambda^2(dx, dy) = \int_R \overbrace{\frac{u}{v} v^2}^{=u} \left(\frac{1}{v} \lambda^2(du, dv) \right)$$

$$\stackrel{\text{Riemann-Int.}}{=} \int_1^2 du \int_1^2 dv u = \int_1^2 du (1 \cdot u) = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

Letztes Mal: Trafosatz

$U, W, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete, $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $W \supset A \supset U$ & $\lambda^n(A \setminus W) = 0$.

$\Psi \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ derart, dass $\Psi|_U: U \rightarrow D = \Psi(U)$ C^1 -Diffeomorphismus (d.h. $\Psi|_U \in C^1$
Bild muss Gebiet sein & $(\Psi|_U)^{-1} \in C^1$)

Für $f: \Psi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{L}(\Psi(A))$;

(ii) $(f \circ \Psi) |\det J_\Psi| \in \mathcal{L}(A)$.

In diesem Fall gilt

$$\int_{\Psi(A)} f(x) \lambda^n(dx) = \int_A f(\Psi(u)) |\det J_\Psi(u)| \lambda^n(du)$$

Vergleich mit Riemann

Bsp. 1.5.4 (Krummliniges Viereck)

Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ berandet durch $\{(x, y) \mid y=1\}$, $\{ \dots \mid y=2\}$,
 $\{ \dots \mid xy=1\}$ und $\{ \dots \mid xy=2\}$

Berechne $\int_V xy^2 \lambda^2(dx, dy)$.

Suche C^1 -Diffeomorphismus Ψ derart, dass $\Psi^{-1}(V)$ ein Rechteck ist.

Naheliegend:

$$u = xy \in [1, 2], \quad v = y \in [1, 2]$$

Definiere also $\Psi: \underbrace{(0, \infty)^2}_{=U} \rightarrow \underbrace{(0, \infty)^2}_{=W}$ durch $\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/v \\ v \end{pmatrix}$, wobei

$$\Psi([1, 2]^2) = V \quad \& \quad \Psi([1, 2]^2) = V \quad \&$$

$$J_\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_\Psi(u, v)| = 1/v \neq 0; \text{ außerdem ist } \text{Nullmenge} \text{ (vgl. A3(c), Blatt 1)}$$

Also:

$$\int_V xy^2 \lambda^2(dx, dy) = \int_A \underbrace{(uv)}_{=u} \cdot \underbrace{1/v}_{=1/v} \lambda^2(du, dv) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{[1, 2]} \lambda^1(dv) \int_{[1, 2]} \lambda^1(du) u = \frac{3}{2} \cdot (2-1) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Beispiel 1.5.5 (Polarkoordinaten)

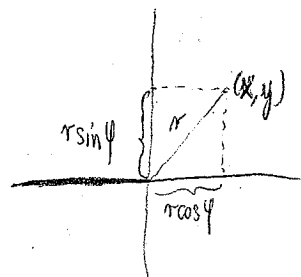
Sei $\Psi: [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ ($r^2 = x^2 + y^2$)

Mit $W := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ ist $([0, \infty) \times [-\pi, \pi]) \setminus W$ Nullmenge und $\Psi|_W: W \rightarrow \Psi(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ein

C^1 -Diffeomorphismus und $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(W)$ eine Nullmenge (leicht)

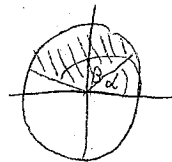
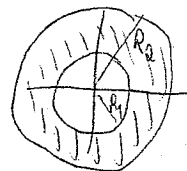
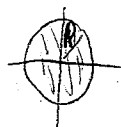
Weiter:

$$J_\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_\Psi(r, \varphi)| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0.$$



Einige Bilder von Rechtecken:

- $[0, R] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (Kreis)
- $[R_1, R_2] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ (Kreising)
- $[0, R] \times [\alpha, \beta] \rightarrow$ Kreissektor



Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ folgt aus der Trafoformel und Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \lambda^2(dx, dy) = \int_{[-\pi, \pi]} \lambda^1(d\varphi) \int_{[0, \infty)} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \lambda^1(dr).$$

Ist insbesondere f rotationssymmetrisch, d.h. $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ mit einer messbaren Funktion $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \lambda^2(dx, dy) = 2\pi \int_{[0, \infty)} g(r) r \lambda^1(dr).$$

Beispiel: Den Flächeninhalt des Kreises $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ bestimmen wir mit $U := (0, R) \times (-\pi, \pi)$ zu

$$\lambda^2(K) = \int_K \lambda^2(dx, dy) \stackrel{=A}{=} \int_{\Psi(U)} \lambda^2(dx, dy) = \int_U r \lambda^2(dr, d\varphi) = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^R r dr}_{=\frac{1}{2}R^2} = \pi R^2.$$

Beachte: $K \setminus \Psi(U)$ ist Nullmenge bzw. $([0, R] \times [-\pi, \pi]) \setminus U$ ist Nullmenge

Beispiel 1.5.6

vgl. A2, Blatt 5

Gesucht: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda'(dx)$

Wichtig in Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerrechnung, Quantenmechanik und kinetische Gastheorie; vgl. Gaußsche Fehlerfunktion aus Analysis I/II

Problem: $x \mapsto e^{-x^2}$ nicht elementar integrierbar

Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda'(dx) \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda'(dx) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \lambda'(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda'(dx) \int_{\mathbb{R}} \lambda'(dy) \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{\geq 0} \\ &\stackrel{\text{Fubini (Tonelli)}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda^2(dx, dy) \stackrel{\text{Polarkoordinaten + Fubini (Tonelli)}}{=} \int_{[0, \infty)} \lambda'(dr) \int_{[0, 2\pi]} e^{-r^2} r d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r \rightarrow \infty} = \underline{\underline{\pi}} < \infty \end{aligned}$$

Damit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \underline{\underline{\sqrt{\pi}}}$

[In Analysis I über parameterabh. Integrale gesehen]

Beispiel 1.5.7 (Leibnizsche Sektorformel)

Seien $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$ und $\varrho: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty)$ stetig. Dann heißt $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := \varrho(t)(\cos t, \sin t)$ eine Kurve in Polarkoordinaten. Gesucht ist der Flächeninhalt des Sektors

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq r \leq \varrho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]\}$$

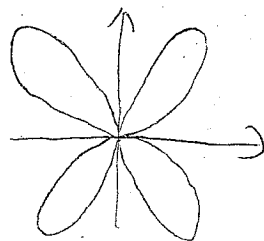
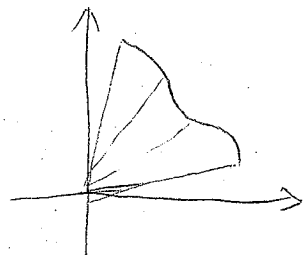
Mit Polarkoordinaten:

$$\lambda^2(S) = \int_S \lambda^2(dx, dy) = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\varrho(\varphi)} dr r = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\varphi)^2 d\varphi.$$

Beispiel: Randkurve eines vierblättrigen Kleeblattes S in Polarkoordinaten gegeben durch $\varrho(\varphi) = |\sin 2\varphi|$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

$$\Rightarrow \lambda^2(S) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

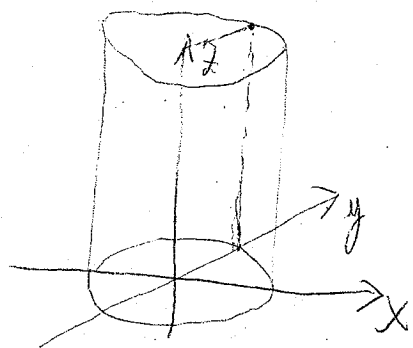
$$\cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi = 1 - 2\sin^2 2\varphi$$



Beispiel 1.5.8 (Zylinderkoordinaten)

Sei $\Psi: [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Psi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z(r, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$



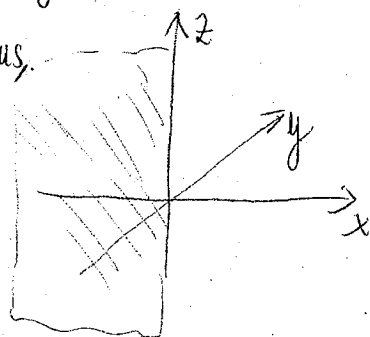
Dabei sind (r, φ) die Polarkoordinaten der Projektion (x, y) des Punktes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf die xy -Ebene.

Mit $W := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ ist $([0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}) \setminus W$ eine Nullmenge, ~~und~~

$\Psi|_W: W \rightarrow \Psi(W) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$ ein C^1 -Diffeomorphismus, und $\mathbb{R}^3 \setminus \Psi(W)$ eine Nullmenge.

Es gilt

$$J_{\Psi|_W}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow |\det J_{\Psi|_W}(r, \varphi, z)| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0.$$

Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ folgt aus Transformationsformel und Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(dz) \int_{[-\pi, \pi]} \lambda^1(d\varphi) \int_{[0, \infty)} \lambda^1(dr) f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r$$

Beispiel: Bestimme Volumen des Kegels $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ und Spitze in $(0, 0, h)$.

Es gilt

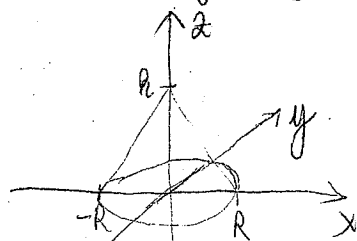
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \frac{h}{R} (R - \sqrt{x^2 + y^2})\}$$

Mit $U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < R, -\pi < \varphi < \pi, 0 < z < \frac{h}{R} (R - r)\}$ und $K = \Psi(U)$

folgt mit Zylinderkoordinaten

$$\lambda^3(K) = \int_K \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\Psi(U)} \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_U \lambda^3(dr, d\varphi, dz)$$

$K \setminus \Psi(U)$ Nullmenge bzw. $U \setminus U$ Nullmenge



$$\begin{aligned} \text{Fubini} \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^{R(r-r)} dz \, r &= 2\pi \frac{R}{R} \int_0^R r(R-r) dr = \frac{\pi}{3} R^2 h \\ &= \frac{1}{2} R^3 - \frac{1}{3} R^3 \end{aligned}$$

Beispiel 1.5.9 (Rotationskörper)

Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig. Wir fassen die Ordinatenmenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$$

zu Messbarkeit
vgl. A2(a), Blatt 6

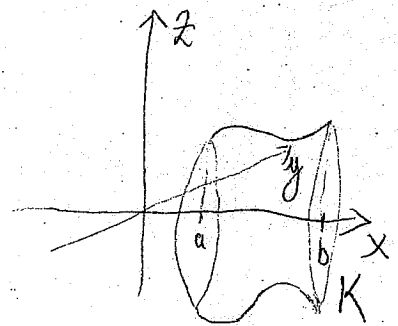
als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf, genauer

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, 0 \leq z \leq f(x), x \in [a, b]\},$$

und lassen letztere um die x -Achse rotieren. Es entsteht ein Rotationskörper K .

Zylinderkoordinaten $\Rightarrow$ $\int_K \lambda^3(dx, dy, dz) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b dx \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{f(x)} dr \, r = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$

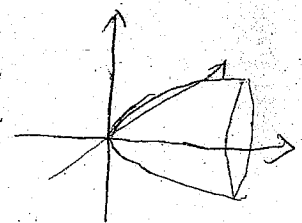
geht auch mit Cavalieri



Beispiel: Betrachte $f: [0, h] \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) = \sqrt{x}$

$$\leadsto \lambda^3(K) = \pi \int_0^h x dx = \frac{1}{2} \pi h^2$$

Rotationsparaboloid



Beispiel 1.5.10 (Kugelkoordinaten)

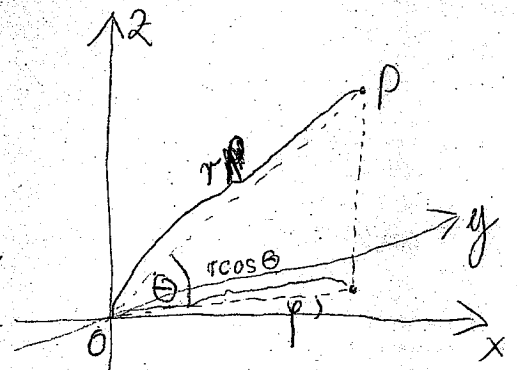
Sei $\Psi: [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Psi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, \theta) \\ y(r, \varphi, \theta) \\ z(r, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Dabei: $r \hat{=}$ Abstand von $\overline{P}(x, y, z)$ zum Nullpunkt

$\varphi \hat{=}$ Winkel zwischen der Projektion d. Strahls $\overline{OP}$ auf die xy -Ebene und der positiven x -Achse

$\theta \hat{=}$ Winkel zwischen Strahl $\overline{OP}$ und der xy -Ebene



Mit $W := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $([0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \setminus W$ eine Nullmenge, und

$\Psi|_W: W \rightarrow \Psi(W) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$ ein C^1 -Diffeomorphismus, und $\mathbb{R}^3 \setminus \Psi(W)$ Nullmenge.

Es gilt

$$\begin{aligned} \det \gamma_{\psi|w}(r, \varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r^2 \cdot [\cos^2 \varphi \cos^3 \theta + \sin^2 \varphi \cos \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^3 \theta] \\ &= r^2 \cdot [\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta] \\ &= r^2 \cos \theta > 0 \end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ folgt mit Trafoformel und Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \lambda^1(d\theta) \int_{[0, \pi]} \lambda^1(d\varphi) \int_{[0, \infty)} \lambda^1(dr) f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta$$

Ist insbesondere f rotationssymmetrisch, d.h. $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ mit $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) = 4\pi \int_{[0, \infty)} g(r) r^2 \lambda^1(dr)$$

Beispiel: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die obere Hälfte der Kugel mit Mittelpkt. $(0, 0, 0)$ und Radius $R=1$, und betrachte $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Mit

$$U := \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\} \text{ \& } K = \psi(U)$$

bestimmen wir

$$\int_K z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{K \setminus \psi(U)} \text{ Nullmenge bzw. } U \setminus U \text{ Nullmenge}$$

$$\begin{aligned} &= \int_U z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_U r^2 \sin \theta \cdot r^2 \cos \theta \lambda^3(dr, d\varphi, d\theta) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda^1(d\theta) \int_{-\pi}^{\pi} \lambda^1(d\varphi) \int_0^1 \lambda^1(dr) r^4 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2\pi \underbrace{\int_0^1 r^4 dr}_{=\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta}_{=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

Bsp. 1.5.10Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

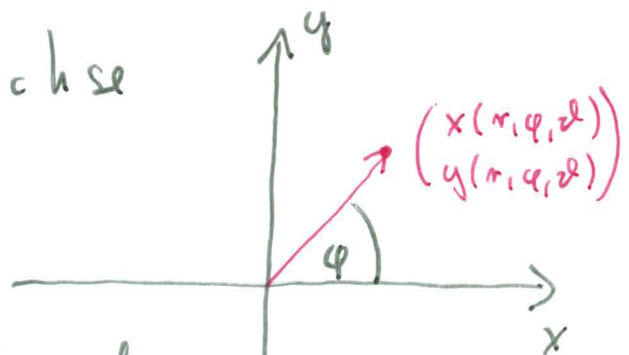
$$\Psi : W := \underbrace{(0, \infty)}_r \times \underbrace{(-\pi, \pi)}_\varphi \times \underbrace{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}_\vartheta \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \Psi_1(r, \varphi, \vartheta) \\ \Psi_2(r, \varphi, \vartheta) \\ \Psi_3(r, \varphi, \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, \vartheta) \\ y(r, \varphi, \vartheta) \\ z(r, \varphi, \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Interpretation / Konvention:

$r > 0$: Abstand zw. Ursprung O und $P = \Psi(r, \varphi, \vartheta)$

φ : Winkel zw. Projektion vom $\overline{OP}$ auf x - y -Ebene und positiven x -Achse
Polarwinkel



ϑ : Winkel zw. Strahl $\overline{OP}$ und der x - y -Ebene
Azimutwinkel

$$D = \Psi(W) = \mathbb{R}^3 \setminus \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R}, x \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{Nullmenge}}$$

$\Psi : W \rightarrow D$ ist bijektiv und stet. diffb. mit

$$\det D\mathbb{I}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \left[\cos^2 \varphi \underline{\cos^3 \vartheta} + \sin^2 \varphi \underline{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta} + \cos^2 \varphi \underline{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta} + \sin^2 \varphi \underline{\cos^3 \vartheta} \right]$$

$$= \underbrace{r^2}_{>0} \underbrace{\cos \vartheta}_{>0} \underbrace{(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)}_{=1} > 0$$

da $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Daraus kann man folgern, dass

$\mathbb{I}^{-1}: D \rightarrow W$ auch C^1 ist
(oder man rechnet es direkt nach)

$\Rightarrow \mathbb{I}: W \rightarrow D$ ist C^1 -Diffeomorph.

$\Rightarrow$ Transf.-S. anwendbar.

$\Rightarrow$ Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ folgt nur Nullmenge weggel.

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) \stackrel{\text{blue arrow}}{=} \int_D f(x, y, z) \lambda^3$$

$$= \int_W f(\mathbb{I}(r, \varphi, \vartheta)) \underbrace{|\det D\mathbb{I}(r, \varphi, \vartheta)|}_{= r^2 \cos \vartheta} \lambda^3(dr, d\varphi, d\vartheta)$$

Fubini

$$= \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \lambda'(d\vartheta) \int_{(-\pi, \pi)} \lambda'(d\varphi) \int_{(0, \infty)} \lambda'(dr) \ell \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix} r^2 \cos \vartheta$$

Bsp. 1.5.11

a) W, D, Ψ wie oben, zusätzlich:

ℓ rotations symmetrisch, d.h. es ex. $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

messb. mit $\ell(x, y, z) = g(\underbrace{\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|}_z) = g(r)$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x, y, z) \lambda^3 &= \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \lambda(d\vartheta) \underbrace{\int_{(-\pi, \pi)} \lambda(d\varphi)}_{= 2\pi} \int_{(0, \infty)} r^2 g(r) \lambda(dr) \\ &= \underbrace{\left[\sin \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{= 2} \cdot 2\pi \int_{(0, \infty)} g(r) r^2 \lambda(dr) \\ &= 4\pi \int_{(0, \infty)} g(r) r^2 \lambda(dr) \end{aligned}$$

b) konkret: offene

D sei obere Halbkugel $\subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, d.h.

$D = \{ (x, y, z) \in B_1(0) \mid z > 0 \}$ Dann gilt

$D = \Psi(A)$ mit $A = \{ (r, \varphi, \vartheta) \mid r \in (0, 1), \varphi \in (-\pi, \pi], \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}) \}$

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \cdot r$, so
 $f \in C(\mathbb{R}^3)$ und „Riemann-intbar über D“

$$\int_D f(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_A r \cdot \sin \vartheta \cdot r (r^2 \cos \vartheta) \lambda^3(dr, d\varphi, d\vartheta)$$

$$\begin{aligned} & \text{Fubini} \\ & = \\ & \text{Riemann-I} \end{aligned} \quad \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^1 dr}_{=1} r^4$$

$$= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2\pi}{5} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{5} \cdot 1^2$$

Bsp. 1.5.12 a) kugel koord. des $\mathbb{R}^m$

$$(x_1, \dots, x_m) \longrightarrow (r, \underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}}_{\text{Winkel koord.}})$$

Radius

Sei $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ messb. und

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = g(\|x\|) = g(r) \text{ rotations-s.}$$

ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^m} \lambda^m(dx) f(x) = \tau_m \int_{(0, \infty)} g(r) r^{m-1} dr$$

11-4 mit gewissen Vorfaktoren τ_m , die nur

von der Dim abhängen. Um diese zu best
wählen wir speziell $g = \mathbb{1}_{[0,1)}$ (d.h.

$f = \mathbb{1}_{B_1(0)}$ denn dann gilt

$$\lambda^m(B_1(0)) = \omega_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \lambda^m(dx) = \tau_m \int_0^1 r^{m-1} dr$$

$$= \tau_m \left[\frac{1}{m} r^m \right]_0^1 = \frac{\tau_m}{m} \quad \text{also } \tau_m = m \cdot \omega_m$$

b) Sei $g(r) = \mathbb{1}_{[0,1)}(r) r^{-\alpha}$

$$\Rightarrow f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha} & \text{für } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann:

$$f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \underline{\alpha < m} \Rightarrow m - \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f_\alpha \lambda^m = m \omega_m \int_0^1 r^{m-1-\alpha} dr$$

$$= m \omega_m \left[(m-\alpha)^{-1} r^{m-\alpha} \right]_0^1 = m(m-\alpha) \omega_m$$

c) Sei $g(r) = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(r) r^{-\alpha}$, also

$$f_\alpha(x) = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(\|x\|) \|x\|^{-\alpha}$$

$$f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^M) \Leftrightarrow \alpha > M \Rightarrow M - \alpha < 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^M} f_\alpha \lambda^M = M \omega_M \left[(M - \alpha)^{-1} \tau^{M - \alpha} \right]_1^\infty$$

verschwindet bei ∞

$$= M |M - \alpha|^{-1} \omega_M$$

2. Vektor analysis

2.1. Kurvenintegrale & Potentiale

Dfm / Exam. 2.1.1

Für $a \leq b \in \mathbb{R}$ nennt man jede stetige Abb
 $\gamma: I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ einen Weg.

Das Bild $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^M$ nennt man Spur oder
Bahn von γ , $\gamma(a)$ Anfangspkt, $\gamma(b)$ End-
punkt " .

Für $a \leq b, c \leq d \in \mathbb{R}$ heißt eine streng isotone,
 bij., stetige Fkt $\alpha: [a, b] = I \rightarrow [c, d] =: J$ eine
orientierungserhaltende Parametertransformation

Auf der Menge $\{ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^M \mid I \text{ echtes abg. Int., } \gamma \text{ stetig} \}$

führen wir eine Äquivalenzrelation ein

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^M \sim \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^M \iff \begin{array}{l} \text{Es ex. eine or-erh.} \\ \text{Parametertransf. } \alpha: I \rightarrow J, \\ \text{s.d. } \gamma = \varphi \circ \alpha \end{array}$$

Zwei äquivalente Wege $\gamma \sim \varphi$ haben dieselben Anfangspkt und dieselben Endpkt. und

$\gamma(I) = \varphi(J)$ werden in derselben Richtung durchlaufen: γ und φ haben dieselbe

Orientierung

Dagegen hat $-\gamma: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^M$

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), t \in [a,b]$$

die entgegengesetzte Orientierung (Laufrichtung)

zu γ .

Setze $\Gamma = [\gamma] = \{ \text{Wege } \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^M \mid \varphi \sim \gamma \}$

Beachte $-\Gamma := [-\gamma] \neq [\gamma]$

11-7 γ nennt man Repräsentanten oder

Parameterdarstellung der Kurve Γ .

Γ entspricht also $(\gamma(I), \pm)$

Teilmenge des $\mathbb{R}^m$

↑ Orientierung.

Sind $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Wege mit $\gamma(b) = \varphi(c)$ so definiert man den zusammengesetzten Weg

$$\gamma \mapsto \varphi : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\gamma \mapsto \varphi)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a, b] \\ \varphi(c - b + t) & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Speziell für $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^m$

ergibt sich

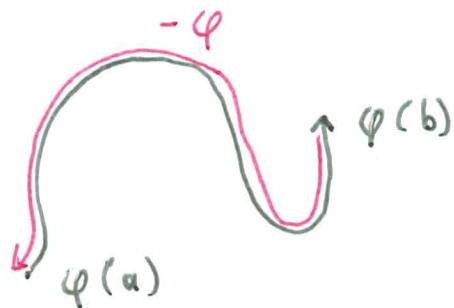
$$(\gamma \mapsto \varphi)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a, b] \\ \varphi(t) & t \in (b, c] \end{cases}$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

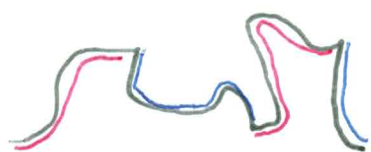
heißt geschlossen, falls $\gamma(b) = \gamma(a)$ ist.

Für jeden Weg φ in $\mathbb{R}^m$ ist

$$\gamma := \varphi \mapsto (-\varphi) \text{ ein geschlossener Weg.}$$



Eine Kurve Γ heißt glatt, falls eine Parameterdarstellung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^M$ mit $\gamma \in C^1(I)$ und $\Gamma = [\gamma]$ gibt, und stückweise glatt, falls $m \in \mathbb{N}$ und C^1 -Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ existieren, so dass $\Gamma = [\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_m]$ gilt. Dies impliziert: Anf-Pkt von $\gamma_k = \text{End-Pkt v. } \gamma_{k-1}$



Äquiv. Dfm. Γ stückw. glatt $\Leftrightarrow \exists$ Repräsentant

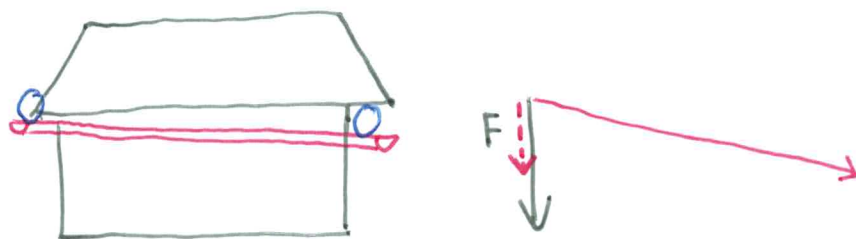
$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^M$ und $m \in \mathbb{N}$ s.d.

$\gamma|_{\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right]}$ stet. diffb. für $k \in \{1, \dots, m\}$.

Bm 2.1.2 Motivation der Kurvenintegrale durch Arbeit im Kraftfeld.

Verschiebt sich eine Masse um einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) durch Einwirkung einer konstanten (Anziehungs)kraft $F \in \mathbb{R}^n$ ist die geleistete Beschleun. Arbeit (= Zugewinn an kinetischer Energie)

$$W = \langle F, s \rangle$$



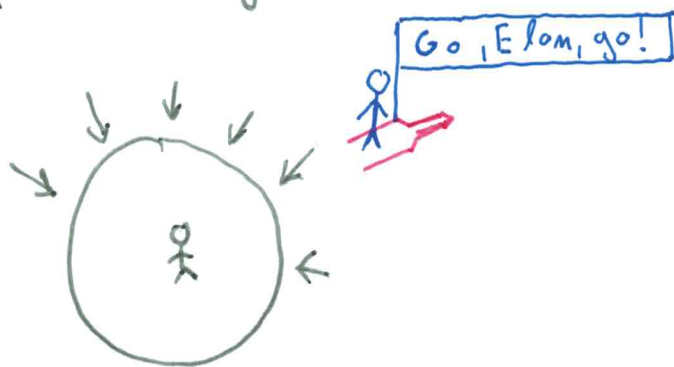
Falls die Kraft nicht konstant ist, wird sie durch ein Vektor- oder Kraftfeld

$$v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

beschreiben, z.B. Gravitationsfeld der Erde

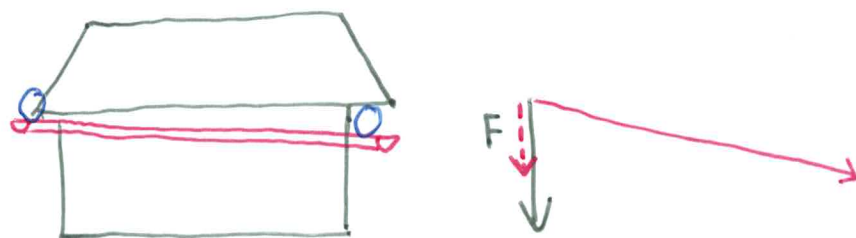
Wie groß ist die geleistete Arbeit,



falls sich der Massepunkt entlang einer Kurve Γ mit Parameterdarst $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Kraftfeld v bewegt?

Verschiebt sich eine Masse um einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) durch Einwirkung einer konstanten (Anziehungs)kraft $F \in \mathbb{R}^n$ ist die geleistete Beschleun. Arbeit (= Zugewinn an kinetischer Energie)

$$W = \langle F, s \rangle$$



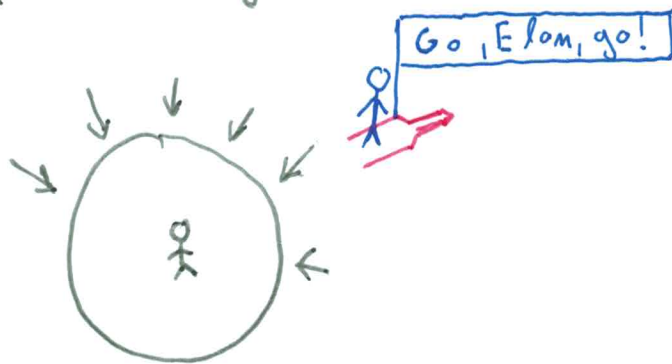
Falls die Kraft nicht konstant ist, wird sie durch ein Vektor- oder Kraftfeld

$$v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

beschreiben, z.B. Gravitationsfeld der Erde

Wie groß ist die geleistete Arbeit,



falls sich der Massepunkt entlang einer Kurve Γ mit Parameterdarst $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Kraftfeld v bewegt?

Setzen voraus : $v: D \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig
 $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ stückweise glatt.
 $\gamma([a,b]) \subset D$

Sei $Z = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\} \subset [a,b]$ Zerlegung,
 die alle Unstetigkeitsstellen von γ' enthält.

Ist die Zerlegung fein genug so $\|\gamma\| < \varepsilon$ erwarten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Arbeit} &\sim \sum_{k=1}^m \langle \underbrace{v(\gamma(t_{k-1}))}_{F_k} , \underbrace{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}_{S_k} \rangle \\
 &\stackrel{\text{MWS}}{=} \gamma'(\xi_k) (t_k - t_{k-1}) \\
 &\sim \gamma'(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})
 \end{aligned}$$

kraft v. • Verschiebung v.

ergibt gerade eine Riemann- Σ -Näherung für

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Dies motiviert:

Defn 2.1.3 Seien $D \subset \mathbb{R}^M$ Gebiet, $v: D \rightarrow \mathbb{R}^M$
 $v \in C(D)$, $\gamma: [a,b] \rightarrow D$ stückweise C^1

(*) Setze $\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$
 $\Gamma = [\gamma]$ heißt *Kurveninteg. von v längs Γ*

Bm 2.1.4

a) Sind $\varphi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^M$ und $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^M$
 Parameterdarst. der Kurve $\Gamma = [\gamma] = [\varphi]$, so ex.
 nach Dfm. Parametertrafo $\alpha: [a,b] \rightarrow [c,d]$
 und nach Substitutionsr. $\gamma = \varphi \circ \alpha$

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle v(\varphi(\alpha(t))), \varphi'(\alpha(t)) \rangle \alpha'(t) dt$$

ketten b
regel a

$$= \int_c^d \langle v(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds$$

Insbes. hängt die Dfm (*) von $\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle$
 nicht von dem gew. Repräsentanten γ der
 Klasse Γ ab.

b) Wegen: $\varphi(t) = (-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$, $(-\gamma)'(t) = -\gamma'(t)$

folgt:

$$\int_{-\Gamma} \langle v(x), dx \rangle = \int_a^b \langle v(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt$$

$$= - \int_b^a \langle v(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds$$

$\underbrace{\quad}_{=-dt}$

oder auch kurvenintegral oder Linienintegral

Alternative Schreibweisen

$$\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle = \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^m v_k(x) dx_k$$

beide motiviert durch Koordinatendarstellung

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow D$$

da dann:

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{k=1}^m v_k \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix} \gamma'_k(t) dt$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_a^b v_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt$$

eine Summe skalarer Integranden / Integrale ist

Für eine stückweise glatte Kurve $\Gamma = \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_m$
mit glatten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ setzen wir:

$$\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \langle v(x), dx \rangle$$

$$\varphi'(t) = -\gamma'(a+b-t)$$

$$= - \int_a^b \langle v(\underbrace{\gamma(a+b-t)}_{=s}), \underbrace{\gamma'(a+b-t)}_{=-ds} \rangle dt$$

$$= \int_b^a \langle v(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds$$

$$= - \int_a^b \text{---} || \text{---} = - \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx$$

c) Für ein kompaktes Intervall I und einen Weg $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ setze

$$\gamma^A = \gamma(\min I) \quad \text{Anfangspunkt}$$

$$\gamma^E = \gamma(\max I) \quad \text{Endpunkt}$$

Grund für diese Notation:

Ist $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Weg und

$$\varphi: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = \gamma(t-1)$$

so ist $\gamma(1)$ der Endpt von γ aber
 $\varphi(1)$ der Anf. von derselben Kurve $\perp$

Sind γ und φ Wege in $\mathbb{R}^n$ mit

$$\gamma^E = \varphi^A \quad \text{setze:}$$

$$\int_{\Gamma \rightarrow \Phi} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx + \int_{\overline{\Phi}} v(x) \cdot dx$$

d) Ist $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive

12-5 C^1 - Parametrisierung einer Kurve Γ ,

so setzen wir

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$$

Ist φ eine weitere solche Parametrisierung,
so ergibt sich ähnlich wie oben

$$L(\varphi) = L(\gamma)$$

und wir bezeichnen diesen Wert mit $L(\Gamma)$.

Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ injektiv, stetig, und
nur stückweise C^1 mit $\{t_1, \dots, t_N\} \subset [a, b]$
Unstetigkeitsstellen von γ' , so setzen wir

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^{N-1} L(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]})$$

und analog $L(\Gamma)$ für die zu γ
zugehörige Kurve Γ . Wegen der Norm

12-6 gilt hier sogar $L(-\gamma) = L(\gamma)$.

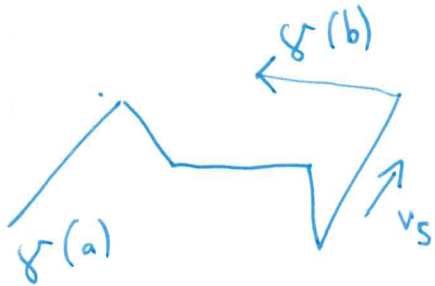
Defn. 2.1.5 Für $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ injektiv,

stetig, stückweise C^1 und $\Gamma = \gamma([a,b])$

bezeichnet $L(\Gamma) = L(\gamma)$ die Länge der Kurve Γ

Motivation: γ stückweise affin, d.h.

es ex. Vektoren $v_1, \dots, v_{N-1}$ s.d.
 $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} = (t - t_j) \cdot v_j + \gamma(t_j)$



$$\Rightarrow \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{= \|v_j\|} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \underbrace{\|v_j\|}_{\text{Länge des Geschw.-Vektor}} \underbrace{(t_{j+1} - t_j)}_{\text{Länge des Parameterint.}}$$

Länge des Geschw.-Vektor

Bem 2.1.4 e)

$$\leq \|v(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\|$$

$$\boxed{12-7} \quad \int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle = \int_a^b \overbrace{v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)} dt$$

mit Cauchy-Schwarz

$$\leq \max_{t=a}^b \|v(\gamma(t))\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \max_{x \in \gamma([a,b]) = \Gamma} \|v(x)\| \quad L(\Gamma)$$

Bsp. 2.1.6

a) Sei $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$ Vektorfeld

Für die Verbindungsstrecke Γ_1 von $(0,0)$ nach $(1,1)$ wählen wir die Parameterdarstellung

$$\gamma_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } v(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{also } \int_{\Gamma_1} v(x) dx = \int_0^1 (2t, t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t + t^2) dt$$

$$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Sei Γ_2 der Teil der Parabel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$ der von $(0,0)$ nach $(1,1)$ läuft. Wähle Parameterdarst.

$$\gamma_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

und $v(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} t+t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx &= \int_0^1 (t+t^2, t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (t+t^2+2t^4) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{37}{30} \end{aligned}$$

Fazit: Auch wenn $\gamma_1^A = \gamma_2^A$ & $\gamma_2^E = \gamma_2^E$

ist

$$\int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx \neq \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx$$

b) Vektorfeld $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+4y \end{pmatrix}$

Seien $\gamma_1, \Gamma_1, \gamma_2, \Gamma_2$ wie in a). Dann:

$$v(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2+4t \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_0^1 (2t^2+t^2+4t) dt$$

$$= \left[t^3 + 2t \right]_0^1 = 1 + 2 = 3 \quad \text{und}$$

$$v(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 + 4t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (2t^3, 5t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^3 + 10t^3) dt$$

$$= 3t^4 \Big|_0^1 = 3 = \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx \quad \underline{\text{hier}}$$

! Was unterscheidet die beiden Fälle?

Def. 2.1.7 Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiet und $v: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Gibt es ein $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(D)$ mit $\text{grad } \phi = v$

so heißt v Gradientenfeld oder konservatives Vektorfeld und ϕ Potential (Funktion) von v .

Bsp. 2.1.8 Für $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig nennt

man $v: D := \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = f(\|x\|) \cdot x$

ein Zentralkraftfeld.

Die Fkt $r \mapsto r f(r)$ ist stetig auf jedem Intervall $[0, R]$ insbes. dar auf Riemann-intb.

Also ex eine Stamm fkt $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die wg $g'(r) = r f(r)$ aus $C^1((0, \infty))$ ist.

Setzen wir $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = g(\|x\|)$ so

$$\text{grad } \phi(x) = g'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} = f(\|x\|) x = v(x)$$

für $x \in D$.

$\Rightarrow$ Jedes Zentralkraftfeld ist konservativ.

21.11.22

23.11.22

Insbesondere ist das Gravitationsfeld eines Masse pts. der Masse M

$$v(x) = - \frac{g M}{\|x\|^3} x, \quad x \neq 0$$

ein Zentralkraftfeld mit Potential

$$\phi(x) = \frac{g M}{\|x\|}, \quad x \neq 0$$

ein Zentralkraftfeld.

Die Fkt $r \mapsto r f(r)$ ist stetig auf jedem Intervall $[0, R]$ insbes. dar auf Riemann-intb.

Also ex eine Stamm fkt $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die

wg $g'(r) = r f(r)$ aus $C^1((0, \infty))$ ist.

Setzen wir $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = g(\|x\|)$ so

$$\operatorname{grad} \phi(x) = g'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} = f(\|x\|) x = v(x)$$

für $x \in D$.

$\Rightarrow$ Jedes Zentralkraftfeld ist konservativ.

21.11.22

23.11.22

Insbesondere ist das Gravitationsfeld eines

Masse pts. der Masse M

$$v(x) = - \frac{g M}{\|x\|^3} x, \quad x \neq 0$$

ein Zentralkraftfeld mit Potential

$$\phi(x) = \frac{g M}{\|x\|}, \quad x \neq 0$$

Hier ein Analogon des HDI im Kontext von Vektorfeldern.

S. 2.1.8 Sei $D \subset \mathbb{R}^M$ Gebiet, $v: D \rightarrow \mathbb{R}^M$ Gradientenfeld mit Potential $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ Parameterdarstellung einer stückweise glatten Kurve Γ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \Phi(\gamma^E) - \Phi(\gamma^A) \quad (1)$$

Insbesondere:

* Kurvenintegral längs Γ hängt nur von Anfangs- und Endpt von Γ ab, nicht von der gesamten Bahn

* Für eine geschlossene Kurve Γ gilt:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0$$

Bw: Es gibt glatte Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ so dass

13-1 $\Gamma = \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_N$. Betrachte jeden Ab-

schnitt einzeln $\rightarrow$ können o. E d. A annehmen,
dass Γ glatte Kurve. Setze:

$$F = \Phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \Phi(\gamma(t))$$

dann ist $F \in \underline{C^1([a, b])}$ und

$$F'(t) = \frac{d}{dt} (\Phi(\gamma(t))) \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi \right)(\gamma(t)) \frac{d}{dt} \gamma_j(t)$$

$$= \langle \text{grad } \Phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

nach der Kettenregel

Haupts. d. D & I Rechnung $\Rightarrow$

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b F'(t) dt$$

$$= [F(b) - F(a)] = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)) \quad \square$$

Damit bekommen wir:

S. 2.1.9 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet und $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Dann sind äquivalent

13-2 (a) v besitzt ein Potential $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$

(b) Für jede stückw. glatte, geschlossene Kurve

Γ in D gilt:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0$$

(c) Sind Γ_1, Γ_2 stückweise glatte Kurven in D mit gleichen Anfangs- und Endpunkt, so

$$\int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx$$

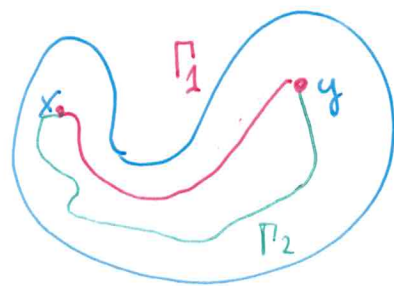
Bw (a) $\Rightarrow$ (b) ist S. 2.1.8

(b) $\Rightarrow$ (c) $\Gamma := \Gamma_1 \rightarrow (-\Gamma_2)$ ist stückw. glatte

geschl. Kurve in D

$$x = \gamma_1^A = \gamma_2^E$$

$$y = \gamma_1^E = \gamma_2^A, \text{ also}$$



$$0 = \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx + \int_{-\Gamma_2} v(x) \cdot dx$$

$$= - \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx$$

13-3 also: $\int_{\Gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot dx$

$$(c) \Rightarrow (a)$$

Wähle Referenzpunkt $0 \in D$ fest.

D Gebiet $\Rightarrow$ wgzsh. $\Rightarrow \forall x \in D$ ex. Kurve Γ_x
mit Anf. Pkt 0 und Endpkt x .

$$\text{Defn: } \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{\Gamma_x} v(y) \cdot dy$$

dieser Wert hängt nach Vorauss (c) nicht vom
der gewählten Verbindungskurve Γ_x ab.

D Gebiet $\Rightarrow D$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $B_\delta(x) \subset D$.

$\Rightarrow$ Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ ist
Verbindungsstrecke $S_j = [x, x + h e_j]$ in D enthalten.

Nach Defn ist

$$\begin{aligned} \Phi(x + h e_j) - \Phi(x) &= \int_{\Gamma_x \rightarrow S_j} v(y) \cdot dy - \int_{\Gamma_x} v(y) \cdot dy \\ &= \int_{S_j} v(y) \cdot dy \end{aligned}$$

$$\sigma_j : [0, 1] \rightarrow D$$

13-4 $\sigma_j(t) = x + \underline{t h e_j}$ ist eine Parameterdarstellung von S_j .

$$\frac{1}{h} \left(\Phi(x + h e_j) - \Phi(x) \right) = \frac{1}{h} \int_0^1 \langle v(\sigma_j(t)), \underbrace{\sigma_j'(t)}_{= h \cdot e_j} \rangle dt$$

$$= \cancel{h} \int_0^1 v_j(x + t h e_j) dt \rightarrow v_j(x)$$

für $h \rightarrow 0$ nach dem S. über parameter
abh. Integrale aus § 1.3

Also $\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi(x) = v_j(x)$, d.h. $\text{grad } \Phi = v$

und wir haben ein Potential konstruiert. $\square$

Def 2.1.10 a) Sei $v: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^m$
Gebiet

Das Vektorfeld v heißt wirbelfrei, falls es
die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x) \text{ für alle } x \in D \text{ und } i, j \in \{1, \dots, m\}$$

(2)

erfüllt. D.h. Jacobimatrix J_v ist symmetrisch auf D .

b) Ein $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ heißt sternförmig,
falls ein $O \in \Omega$ existiert, so dass $\forall x \in \Omega$

die Verbindungsstrecke

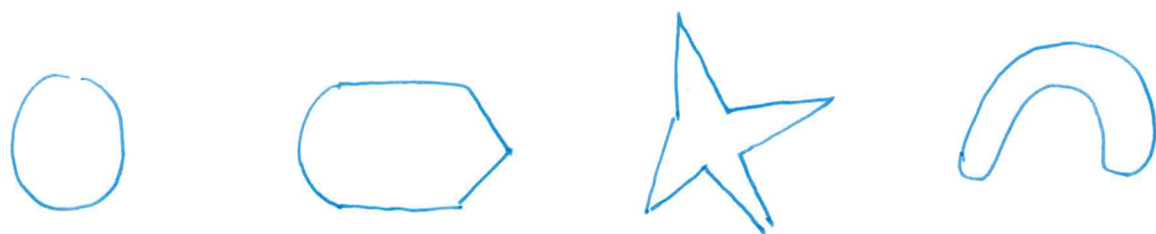
$$\{ tx + (1-t)O \mid t \in [0,1] \} \subset \Omega \text{ ist.}$$

In diesem Fall nennt man O ein Zentrum

von D und D sternförmig bzgl. O

Insbes. gelten:

$$\Omega \text{ Kugel} \Rightarrow \Omega \text{ konvex} \Rightarrow \Omega \text{ sternförmig} \\ \Rightarrow \Omega \text{ zusammenh.}$$



Jedes $x \in \text{Kugel}$ ist Zentrum.

Lem 2.1.11

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiet $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffb.
Gradientenfeld.

Dann ist v wirbelfrei.

Bw: Nach Ann ex ein $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } \phi = v$
—||— ist $v \in C^1(D)$ also $\phi \in C^2(D)$.

Nach S.v. Schwarz ist $\forall i,j \in \{1, \dots, m\}$

$$D_j v_i = D_j D_i \Phi = D_i D_j \Phi = D_i v_j \quad \text{auf } D \quad \square$$

$\hat{=}$ Ist die Symmetrie von J_v ausreichend,
damit v ein Potential besitzt?

Notwendig ist es ja nach L. 2.1.11.

Bsp. 2.1.12

Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $v: D \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Dann:

$$D_y v_1(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = D_x v_2(x, y)$$

||

$$-\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-y}{(x^2 + y^2)} (-1) 2y \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$$

Also ist v wirbelfrei.

$\hat{=}$ Besitzt es denn ein Potential?

Ist das der Fall, so ist nach S. 2.1.9. das Integr.

13-7 | von v längs jeder geschlossenen C^1 -kurve

Γ Null. Wähle Einheitskreis Γ mit Parameter.

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\text{und } v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 t + \sin^2 t}} \quad \text{Damit}$$

$$\int_0^{2\pi} \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{= \sin^2 t + \cos^2 t = 1} dt$$
$$= 2\pi \neq 0$$

Also kann v kein Potential besitzen, obwohl es wirbelfrei ist.

Um dieses Phänomen besser zu verstehen, macht es wieder Sinn speziell (affin-) lineare Abb. zu betrachten

Bsp. 2.1.14 a) Sei $c \in \mathbb{R}^m$ und $v: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $v(x) = c$ (konstantes Vektorfeld). Für

$$\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle c, x \rangle = \sum c_n x_n \quad \text{gilt}$$

$$D_k \phi(x) = c_k, \quad \text{also ist } \phi \text{ Potential von } v.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$

Ist A symmetrisch so gilt für

$$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$$

$$D\Phi(x) = \frac{1}{2} x^T (A^T + A) = x^T A^T \quad (\text{Übg oder Ana II})$$

d.h. $\text{grad } \Phi(x) = Ax = v(x)$, also haben wir ein Potential gefunden.

Allgemein gilt

$$a_{jk} = D_k (a_{jk} x_k) = D_k v_j(x) \quad j, k \in \{1, \dots, n\}$$

Also ist v genau dann wirbelfrei, falls A symmetrisch ist.

Die beiden Bsp. suggerieren, dass nicht nur der math. Ausdruck des Vektorfeldes sondern sein Dfm. Bereich eine Rolle spielt.

L. 2.1.15 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$

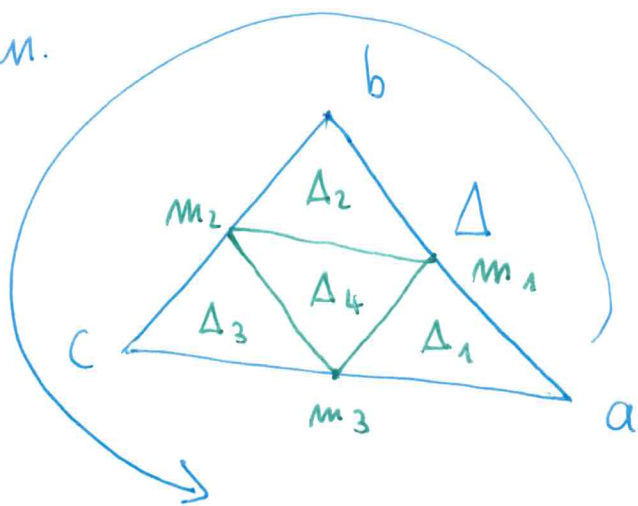
13.-9 differenzierbar mit symmetrischer

Jacobi matrix J_v in allen $x \in D$. Seien $a, b, c \in D$ und $\Delta = \{ t a + s b + r c \in \mathbb{R}^M \mid t, s, r \in [0, 1], t + s + r = 1 \}$

das Dreieck mit Ecken a, b, c . Sei $\Gamma = \partial\Delta$ der geschlossene Dreiecksweg von a nach b nach c . Dann:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0$$

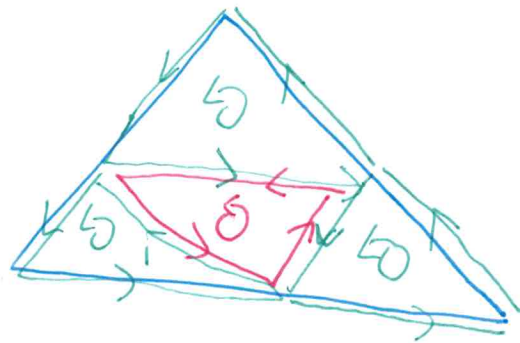
Bw: Wir betrachten im Bw a, b, c in allgemeiner Lage, d.h. liegen nicht auf einer Geraden.



zerlege Δ durch Verbindungsstrecken zw. den Mittelpunkten m_1, m_2, m_3 der 3 Seiten von Δ :

13-10 | Erhalte 4 kongruente Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$

mit der selben Orientierung von $\Gamma_j = \partial \Delta_j$
 wie die von $\Gamma = \partial \Delta$. Da



folgt unter Beachtung der Orientierung

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{12} \text{konvergent entl.} = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx$$

Seiten der hl. Dreiecke

Wähle den betragsm. gr. Summanden aus.

$$\left| \int_{\Gamma^{(1)}} v(x) \cdot dx \right| = \max_{j=1}^4 \left| \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx \right| \quad (2)$$

$$\Gamma^{(1)} \in \{ \Gamma_1, \dots, \Gamma_4 \}$$

$$\text{Umfang von } \Gamma^{(1)} = L(\Gamma^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\Gamma),$$

da jede Seite halbiert wird. Ebenso gilt

$$\text{für Durchmesser } \text{diam } \Gamma^{(1)} = \frac{1}{2} \text{diam } \Gamma.$$

Da in (2) der max. Beitrag ausges. wurde,

gilt

$$\left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\Gamma_j} v(x) \cdot dx \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma^{(1)}} v(x) \cdot dx \right|$$

Nun können wir $\Gamma^{(1)} = \partial \Delta^{(1)}$ als „großes Dreieck“ betrachten und wieder unterteilen. Dadurch erhalten wir ein Dreieck $\Delta^{(2)}$ mit Dreiecksweg $\Gamma^{(2)} = \partial \Delta^{(2)}$ s.d.

$$L(\Gamma^{(2)}) = \frac{1}{2} L(\Gamma^{(1)}) = \frac{1}{4} L(\Gamma)$$

$$\left| \int_{\Gamma^{(1)}} v(x) \cdot dx \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma^{(2)}} v(x) \cdot dx \right|$$

Induktiv erhalten wir Folge

$\Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \Delta^{(3)} \supset \dots$ von Dreiecken

mit

$$\left| \int_{\Gamma^{(k)}} v(x) \cdot dx \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma^{(k+1)}} v(x) \cdot dx \right| \quad (3)$$

$$L(\Gamma^{(k+1)}) = \frac{1}{2} L(\Gamma^{(k)}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} L(\Gamma)$$

$$\text{diam } \Delta^{(k+1)} = \frac{1}{2} \text{diam } \Delta^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \text{diam } \Delta$$

und aus

$$\overbrace{(3)}^{14-1} \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right| \leq 4^{k+1} \left| \int_{\Gamma^{(k+1)}} v(x) \cdot dx \right|$$

D alle $\Delta^{(k)}$ kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^M$ besteht

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Delta^{(k)}$$

genau aus einem Punkt $x_0 \in D$ nach einem multidimensionalen Intervallschachtelungsprinzip.

Falls wir uns nun auf ein sehr kleines Dreieck $\Delta^{(k)}$ beschränken ist dort das Vektorfeld v gut durch ein affinelineares approximierbar. Letzteres besitzt nach Bsp. 2.1.13 ein Potential.

Genauer: Wähle $\varepsilon > 0$ bel.,

Da v diffb. in x_0 , ex. ein $\delta > 0$ s.d.

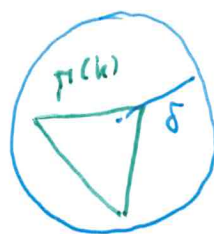
$$B_\delta(x_0) \subset \Delta \text{ und}$$

$$\|v(x) - v(x_0) - Dv(x_0)(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|) \\ < \varepsilon \|x - x_0\|$$

Für alle $x \in B_\delta(x_0)$

Wähle nun h so groß, dass $\text{diam } \Delta^{(h)} < \delta$.

$$x \in \Delta^{(h)} \Rightarrow \Delta^{(h)} \subset B_\delta(x_0)$$



Analog zu

Bsp. 2. 1. 14 $\Rightarrow$ Vektorfeld $\tilde{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^M$ mit

$\tilde{v}(x) = v(x_0) + Dv(x_0)(x - x_0)$ besitzt Potential

$$\tilde{\phi}(x) = \langle v(x_0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, Jv(x_0)(x - x_0) \rangle$$

da ja $Jv(x_0)$ als symmetrisch angenommen wurde

$$D\tilde{\phi}(x) = v(x_0) + (x - x_0)^T Jv(x_0),$$

insbesondere nach Äquivalenz 2.1.10

$$0 = \int_{\pi(h)} \langle \tilde{v}(x), dx \rangle$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\pi(h)} \langle v(x) - \tilde{v}(x), dx \rangle \right|$$

$$= \left| \int_{\pi(h)} \underbrace{\langle v(x) - v(x_0) - Dv(x_0)(x - x_0), dx \rangle}_{\| \dots \| < \varepsilon \|x - x_0\|} \right|$$

$$\| \dots \| < \varepsilon \|x - x_0\|$$

Cauchy-Schwarz 2.1.4 e)

$$\leq \varepsilon \max_{x \in \Gamma^{(k)}} \|x - x_0\| L(\Gamma^{(k)})$$

$$\leq \varepsilon \max_{x \in \Delta^{(k)}} \|x - x_0\| L(\Gamma^{(k)})$$

$$\begin{aligned} x_0 \in \Delta^{(k)} \\ \leq \varepsilon \underbrace{\text{diam } \Delta^{(k)}}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{diam } \Delta} \underbrace{L(\Gamma^{(k)})}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^k L(\Gamma)} \end{aligned}$$

Also

$$\left| \int_{\Gamma^{(k)}} v(x) \cdot dx \right| \leq \varepsilon \left(\frac{1}{4}\right)^k \text{diam } \Delta L(\Gamma)$$

Wegen der Maximalitätsbed. jeder Auswahl von $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots$ folgt

$$\left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \right| \leq \cancel{4^k} \varepsilon \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^k} \text{diam } \Delta L(\Gamma)$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. war, folgt. Beh. $\square$

Nun folgt eine globale Variante des Satzes

S. 2.1.16

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ sternförmiges Gebiet

und $v: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar & wirbelfrei.

Dann besitzt v ein Potential

Bw. Sei x_0 ein Zentrum von D . Durch globale Verschieb. des Koordinatensystems um x_0

können wir ann., dass D sternf. bzgl. 0 .

Defm $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \int_{[0, x]} v(x) \cdot dx = \int_0^1 \left\langle v\left(\frac{d}{dt}(tx)\right), \frac{d}{dt}(tx) \right\rangle dt$$

$$= \sum_{j=1}^m x_j \int_0^1 v_j(tx) dt \quad (4)$$

Zu $x \in D$ ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset D$, da D offen. Für jedes $h \in (-\delta, \delta)$ und $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ist die Strecke

$$[x, x + h e_k] \subset D$$

ebenso wie der Dreiecksweg Γ von 0 nach x nach $x + h e_k$. Dafür gilt nach L. 2.1.15

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = 0$$

14 - 4 und damit

$$\frac{\phi(x+he_n) - \phi(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{\Gamma} \cancel{v(y) \cdot dy} + \int_{[x, x+he_n]} v(y) \cdot dy \right)$$

Wie im S. 2.1.9 (c) $\Rightarrow$ (a) zeigt man, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x) = v_k(x), \text{ also insg. } \text{grad } \Phi = v \quad \square$$

In beiden Bw. haben wir ein Potential Φ konstruiert.
Dies lässt sich auch in konkreten Fällen machen.

Bsp. 2.1.17

(a) Sei $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz - y^2z - 1 \\ x^2z - 2xyz + z^2 \\ x^2y - xy^2 + 4yz \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Teste Dv auf Symmetrie

$$D_2 v_1(x, y, z) = 2xz - 2yz = D_1 v_2(x, y, z) \quad \checkmark$$

$$D_3 v_1(x, y, z) = 2xy - y^2 = D_1 v_3(x, y, z) \quad \checkmark$$

$$D_3 v_2(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2z \neq$$

$$\boxed{14-5} \quad D_2 v_3(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4z$$

$\Rightarrow v$ nicht wirbelfrei $\Rightarrow$ kein Gradientenfeld

(b) Sei $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 \\ x^2z - 4xy \\ x^2y + 2xz - 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Symmetrie-Test:

$$D_y v_1(x, y, z) = 2xz - 4y = D_x v_2(x, y, z)$$

$$D_z v_1(\quad) = 2xy + 2z = D_x v_3(\quad)$$

$$D_z v_2(\quad) = x^2 = D_y v_3(\quad)$$

Da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, folgt aus S. 2.1.16, dass v ein Potential besitzt. Ist $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein solches, so:

$$\phi(x, y, z) = \left[\Phi(x, 0, 0) + (\Phi(x, y, 0) - \phi(x, 0, 0)) + (\Phi(x, y, z) - \phi(x, y, 0)) \right]$$

$$\stackrel{(4)}{=} \sum_{j=1}^3 x_j \int_0^1 v_j(tx) dt$$

$$\begin{aligned}
&= x \int_0^1 (2t^3 x y z + z^2 t^2 - 2y^2 t + 1) dt \\
&+ y \int_0^1 (x^2 z t^3 - 4xy t^2) dt \\
&+ z \int_0^1 (x^2 y t^3 + 2xz t^2 - 2) dt \\
&= x \left[\frac{1}{2} x y z t^4 + \frac{1}{3} z^2 t^3 - \frac{2}{3} y^2 t^3 + t \right]_0^1 \\
&+ y \left[\frac{1}{4} x^2 z t^4 - \frac{4}{3} x y t^3 \right]_0^1 \\
&+ z \left[\frac{1}{4} x^2 y t^4 + \frac{2}{3} x z t^3 - 2t \right]_0^1 \\
&= \frac{x^2 y z}{2} + \frac{x z^2}{3} - \frac{2 x y^2}{3} + x \\
&+ \frac{x^2 y z}{4} - \frac{4 x y^2}{3} \\
&+ \frac{x^2 y z}{4} + \frac{2 x z^2}{3} - 2z \\
&= x^2 y z - 2 x y^2 + x z^2 + x - 2z
\end{aligned}$$

(c) Wir behandeln $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit einer weiteren Methode, genannt „unbestimmte Integration“

Ist ϕ ein Potential von v so gilt $\text{grad } \phi = v$, d.h.

$$D_1 \phi(x, y, z) = v_1(x, y, z) = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 \quad (5)$$

$$D_2 \phi = v_2 = x^2 z - 4xy \quad (6)$$

$$D_3 \phi = v_3 = x^2 y + 2xy - 2 \quad (7)$$

Wir integrieren (5) nach x :

$$\Phi(x, y, z) = \int_a^{x_0} v_1(x, y, z) dx + c \quad \text{abh. von } a$$

$$= \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) dx + c$$

$$= x^2 yz + z^2 x - 2y^2 x + x + c$$

wobei die konstante $c = c(y, z)$ von den konkreten Parameterwerten y und z abhängt.

Um c zu bestimmen, leiten wir nach y ab und vergleichen mit (6)

$$x^2 z - 4xy = D_y \Phi(x, y, z) = x^2 z - 4yx + D_y c(y, z)$$

also $D_y c(y, z) = 0$, also hängt c nur von

$$\boxed{14-8} \quad z \text{ ab: } c(y, z) = c(z)$$

Um diese Fkt zu bestimmen leiten wir ϕ nach z ab und beachten (7):

$$x^2 y + 2xy - 2 = D_z \phi(x, y, z) = x^2 y + 2xz + D_z c(z),$$

also

$$D_z c(z) = -2, \text{ d.h. } c(z) = -2z + k,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine absolute Konstante ist,

Insgesamt: ergibt sich als Potential:

$$\phi(x, y, z) = x^2 yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z + k$$

mit bel $k \in \mathbb{R}$. Wir wissen schon, dass ein Potential nur bis auf Konstante bestimmt ist

DfM 2.1.18

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiet und $v: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar.

Bezeichne den Vektor der Ableitungen

$$\nabla := (D_1, \dots, D_m)^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^T$$

als Nabla-Operator.

Die skalare Fkt $\operatorname{div} v: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{j=1}^m (D_j v_j)(x)$$

heißt Divergenz von v und kann dann als

$$\operatorname{div} v(x) = \langle \nabla, v \rangle(x) \quad \text{geschrieben werden.}$$

Ähnlich kann für ein skalares $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

der Gradient als

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$$

geschrieben werden

Schließlich definiert man speziell im Fall $n=3$ das Rotationsvektorfeld $\text{rot } v : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\text{rot } v(x) = \nabla \times v(x) = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix}(x)$$

"Vektorprodukt"

und nennt es auch Rotation von v .

§ 2.2 Integralsätze in der Ebene

Defn 2.2.1 $D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig,

$\gamma : [a, b] \rightarrow D$ Parameterdarst. einer glatten

Kurve. Dann heißt "Trafoformel"

$$\int_{\Gamma} f(x) \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral (1. Art) von f längs Γ .

Ist $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ stückweise glatte Kurve, insbes.

jedes Γ_j glatt so setzen wir

$$\int_{\Gamma} f(x) ds := \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f(x) ds$$

Bm 2.2.2

(a) Kurvenintegrale von Fkt bleiben gleich,
falls wir sie umparametrisieren, genauso wie
bei Kurvenintegralen von Vektorfeldern
($\Leftarrow$ Substitutionsregel)

(b) Bei Kurvenintegralen 1. Art hängt der
Wert auch nicht von der Orientierung der
Kurve ab, denn mit $\varphi = -\gamma : [a, b] \rightarrow D$

$$\varphi(t) = \gamma(a+b-t) \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} f(x) ds &= \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\underbrace{\gamma(a+b-t)}_{\tau}) \|\underbrace{-\gamma'(a+b-t)}_{\tau}\| dt \end{aligned}$$

$$d\tau = -dt$$

$$\begin{aligned} &= - \int_b^a f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_a^b \text{---} \|\text{---} \end{aligned}$$

(c) Länge der Kurve

$$L(\Gamma) = \int_a^b \underset{\text{rot}}{1} \| \gamma'(t) \| dt = \int_{\Gamma} \underset{\text{rot}}{1} ds$$

(d) Zusammenhang zw. Kurvenintegralen
1. und 2. Art.

Für eine glatte Kurve $\Gamma = [\gamma]$ mit
 $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ $\gamma \in C^1([a, b])$ und

definieren wir den Tangential einheits-
vektor am Γ im Punkt $x = \gamma(t) \in$
 $\gamma([a, b])$ durch

$$\tau(x) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Dieser hängt von der Orientierung der Kurve
 Γ ab, nicht aber vom konkreten Repräsen-
tanten $\gamma \in \Gamma = [\gamma]$.

Ist nun $v: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld
und $\gamma([a, b]) \subset D$ so

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot dx = \int_a^b \left\langle v(\gamma(t)), \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \right\rangle \|\gamma'(t)\| dt$$

Kurvenint. 2. Art

$$= \int_a^b \underbrace{\langle v(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle}_{= f(\gamma(t))} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_{\Gamma} f(x) ds \quad \text{Kurvenint. 1. Art}$$

Def. 2.2.3

(a) Eine Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ heißt Jordanbogen, falls eine Parameterdarstellung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ex., die injektiv ist.

(b) Eine Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ heißt Jordankurve, falls eine Parameterdarstellung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ex., die auf $[a, b)$ injektiv ist und $\gamma(b) = \gamma(a)$ erfüllt. Insbes. ist Γ geschl. Kurve

15-5] Beachte: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ immer stetig.

Dlm 2.2.4 (Glatte berandetes Gebiet)

Wir sagen, dass ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ einen stückweise glatten Rand besitzt, falls

(a) ∂D die Bahn einer geschlossenen Kurve Γ ist.

(b) es zu jedem $q \in \partial D \subset \mathbb{R}^2$ ein orthog. Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ mit Parameter (ξ, η) gibt, s.d. $q = (\xi=0, \eta=0)$ und

ein offenes Rechteck $R = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_\eta$

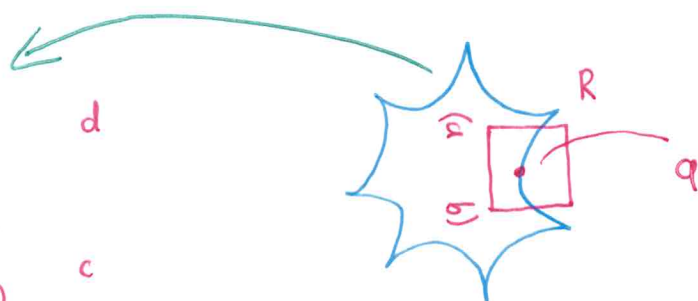
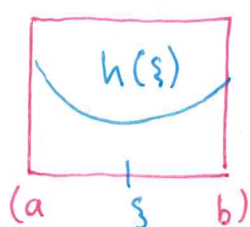
und eine stückweise stetig diffbare, stetige Fkt

$h: (a,b) \rightarrow (c,d)$ existieren mit

$$q = (0,0) \in \mathbb{R}$$

$$D \cap R = \{ (\xi, \eta) \in R \mid \eta < h(\xi) \}$$

$$\partial D \cap R = \{ \mid \eta = h(\xi) \}$$



Von dieser Dfm gibt es mehrere (äquivalente und abgeschwächte Varianten. Bei vielen Anwendungen reicht es zu fordern, dass h Lipschitz-stetig ist.

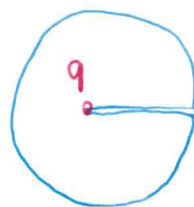
Bsp. 2.2.4

Gebiete mit glattem Rand (h ist C^1) sind z.B.:
Kreise, Ellipsen, Halbebenen, Mengen oberhalb einer Parabel oder Hyperbel.

Gebiete mit stückweise glattem Rand sind
Dreiecke, Rechtecke, Polygone

Frage: Was kann man sagen, falls $G \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist?

Die Menge $B_1(0) \setminus \{[0,1] \times \{0\}\}$ ist nicht stückweise glatt berandet, da in $q = (0,0)$ Bed (b) nicht erfüllbar ist.



Dfm 2.2.5 (a) $F \subset \mathbb{R}^M$ diskret $\Leftrightarrow F$ bes. keine HP

(b) Ist D ein beschr. Gebiet mit stückweise glattem Rand, so existiert eine endliche

Teilmenge $F \subset \partial D$

s.d. $\forall q \in \partial D \setminus F$ ex. ein $R = (a,b) \times (c,d)$

wie in Dfm 2.2.3. s.d. die Parameterdarstellung

ung $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$

einer C^1 -Kurve Γ ist.

Tipp: Verkleinere Rechteck R um gegebenenfalls

Unstetigkeitsstellen von h' zu vermeiden.

Für $q \in \partial D \setminus F$ definiere den Normalenvektor in q als:

$$\nu(q) = \nu_a(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} \begin{pmatrix} -h'(\xi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\xi \in (a,b)$ s.d. $h(\xi) = q$.

Dann gilt:

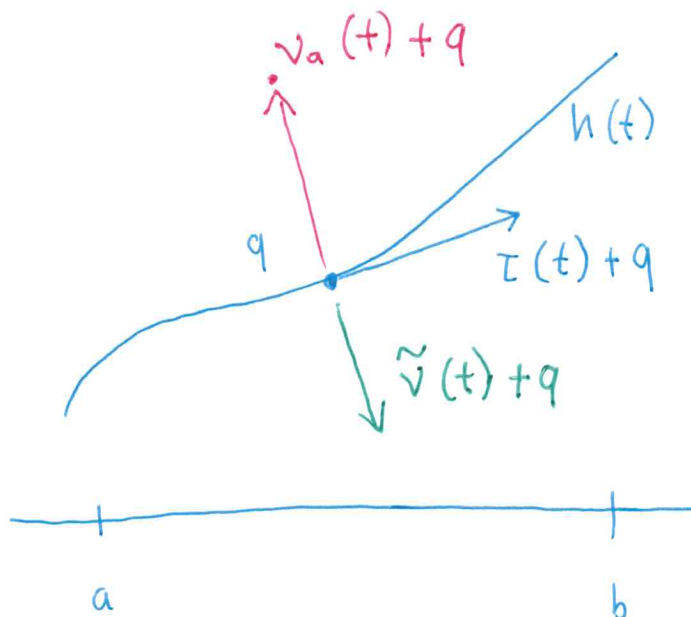
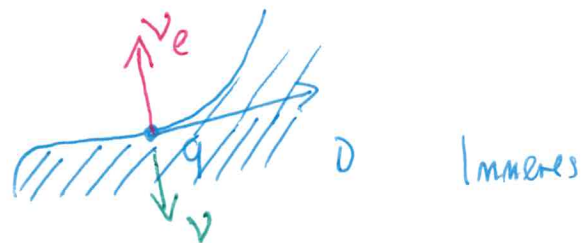
$$\langle \nu(q), \tau(q) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} \frac{1}{\|\gamma'(\xi)\|} (-h'(\xi), 1) \begin{pmatrix} 1 \\ h'(\xi) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(h'(\xi))^2} \sqrt{1+(h'(\xi))^2}} (-h'(\xi) + h'(\xi)) = 0$$

$\Rightarrow$ Normalenvektor steht senkrecht auf Tangenten v.

$$\|v(q)\|^2 = \frac{1}{1+(h'(\xi))^2} \underbrace{(-h'(\xi), 1) \begin{pmatrix} -h'(\xi) \\ 1 \end{pmatrix}}_{(h'(\xi))^2 + 1} = 1$$

$\Rightarrow v(q)$ ist normiert. Solches $v \in \mathbb{R}^2$ ist bis auf Vorz. eindeutig bestimmt.



$$q = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix} = \gamma(t)$$

Dieses Vorzeichen ist dadurch festgelegt, dass

$q + v_a(q)$ außerhalb von D liegt [Genaue:

Es ex. ein $\delta_0 > 0$, s. d. $\forall \delta \in (0, \delta_0)$

$q + \delta v_a(q) \in \mathbb{R} \setminus \bar{D} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta > h(\xi)\}$ ist].

Deshalb heißt $v_a(q)$ der äußere Normalen ein-
heitsvektor im Punkt q .

Warum?

Ist $h'(\xi) > 0$ für $\xi \in (a, b)$ mit $q = \gamma(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ h(\xi) \end{pmatrix}$

so gilt dies auch in einer Umgebung von ξ , da

nach Ann. $\gamma \in C^1(a, b)$ und damit $h \in C^1(a, b)$.

$\Rightarrow h$ ist ^{strikt} isoton in einer Umgb. von ξ

$\Rightarrow h(\xi - \underbrace{\varepsilon h'(\xi)}_{\text{negativ}}) < h(\xi) < h(\xi) + \varepsilon \quad (*)$

für kleines $\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1 + (h'(\xi))^2}} > 0$

15 - 10 $(*)$ ist genau die Bed. an die beiden Koordinaten

vom $q + \delta v_a(q)$, um im $R \setminus D$ zu liegen.

Für $h'(\xi) < 0$ und $h'(\xi) = 0$ argumentiert man ähnlich (Übg.)

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir defin.

$$\int_{\partial D} f(x,y) ds := \int_{\Gamma_1} f(x,y) ds + \dots + \int_{\Gamma_m} f(x,y) ds$$

wobei $\partial D = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j([a,b])$ für γ_j wie in

Teil (b) mit $\gamma_j(b) = \gamma_{j-1}(a)$, $\gamma_m(b) = \gamma_1(a)$

und $\gamma_1((a,b)), \dots, \gamma_m((a,b))$ disjunkt.

[Dann $\partial D = \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_m$]

Integralsatz von Gauß in der Ebene 2.2.6

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückw.

5-11 glattem Rand, $v: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, das

von $q + \delta v_a(a)$, um im RLD zu liegen.

Für $h'(\xi) < 0$ und $h'(\xi) = 0$ argumentiert man ähnlich (Übg.)

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir defin.

$$\int_{\partial D} f(x,y) ds := \int_{\Gamma_1} f(x,y) ds + \dots + \int_{\Gamma_m} f(x,y) ds$$

wobei $\partial D = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j([a,b])$ für γ_j wie im

Teil (b) mit $\gamma_j(b) = \gamma_{j-1}(a)$, $\gamma_m(b) = \gamma_1(a)$

und $\gamma_1((a,b)), \dots, \gamma_m((a,b))$ disjunkt.

Dann $\partial D = \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_m$

Integralsatz von Gauß in der Ebene 2.2.6

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ beschr. Gebiet mit stückw.
glattem Rand, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen mit
 $\overline{D} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig
differenzierbar mit $\operatorname{div} v \in \mathcal{L}(D)$. Dann

$$(G) \quad \int_D \operatorname{div}(x, y) \chi^2(dx, dy) = \int_{\partial D} \langle v(x, y), \nu_a(x, y) \rangle ds$$

in D differenzierbar ist und $\operatorname{div} v \in L^1(D)$. Dann

$$(G) \quad \int_D \operatorname{div} v(x, y) \, \lambda^2(dx, dy) = \int_{\partial D} \langle v(x, y), \nu_\alpha(x, y) \rangle \, ds$$

Wir führen den Bw. im einfachsten Fall,
wenn D ein Rechteck $(a, b) \times (c, d)$ ist.

Geometrische Vereinfachungen in diesem Fall

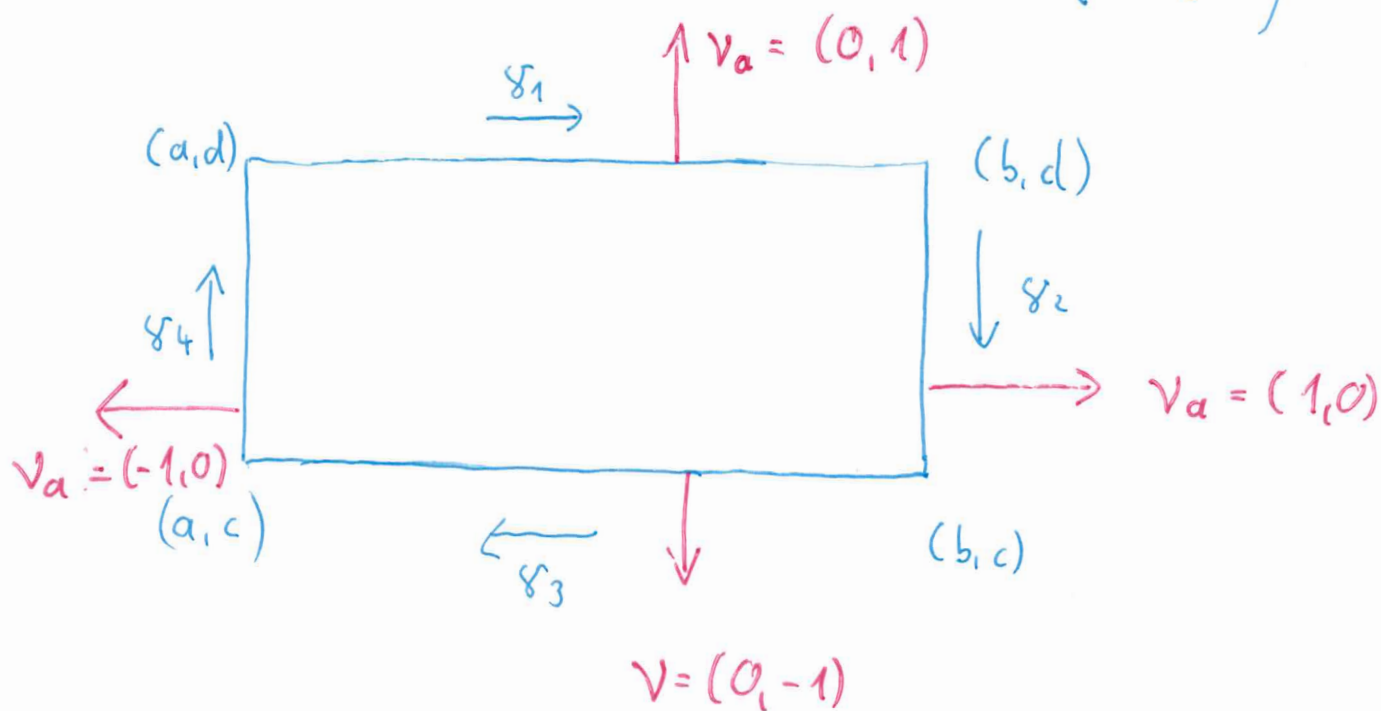
$$\partial D = \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_4 \text{ mit}$$

$$\gamma_1: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ c+d-t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} a+b-t \\ c \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix}$$



In diesem Fall ist (6) also:

$$\int_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) (x, y) \chi^2(dx, dy) = \quad \swarrow \text{I}$$

$$= \int_{\Gamma_1} \langle v(x, y), v_a(x, y) \rangle ds$$

(6')

$$+ \int_{\Gamma_2} \quad -||-$$

$$-||-$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \quad -||-$$

$$+ \int_{\Gamma_4} \quad -||-$$

[6-2]

Betrachte 2. Summanden in I:

$$\int_D \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y} \chi^2(dx, dy) \quad \text{Fubini}$$

$$= \int_{[a,b]} \chi(dx) \int_{[c,d]} \chi(dy) \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)$$

sogar
Riemann-I
da $v_1 \in C$

$$= \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)$$

Fundamental
satz HDI

$\hookrightarrow$

$$[v_2(x,d) - v_2(x,c)]$$

$$= \int_a^b dx v_2(x,d) - \int_a^b dx v_2(x,c) \quad (2)$$

Beh: Dies ist gleich:

$$\int_{\Gamma_1} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds + \int_{\Gamma_3} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds$$

Nach Dfm:

$$\int_{\Pi_1} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds = \int_a^b \langle v(\gamma_1(t)), \overbrace{v_a(\gamma_1(t))}^{=(0,1)} \rangle \underbrace{\|\gamma_1'(t)\|}_{=(1,0)} dt$$
$$= \int_a^b dt \cdot v_2(\overbrace{\gamma_1(t)}^{(t,d)}) \cdot 1$$

ergibt 1. Summanden in (2)

ebenso nach Dfm:

$$\int_{\Pi_3} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds$$
$$= \int_a^b \langle v(\overbrace{\gamma_3(t)}^{(a+b-t,c)}, \overbrace{v_a(\gamma_3(t))}^{(0,-1)}, \overbrace{\|\gamma_3'(t)\|}^{(-1,0)} dt$$
$$= - \int_a^b v_2(\underbrace{a+b-t}_=t, c) \cdot 1 \cdot dt$$
$$= \int_b^a v_2(\tau, c) d\tau = \int_a^b v_2(x, c) dx$$

16-4] $\Rightarrow$ Beh. bewiesen.

Was ist

$$\int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds \quad ?$$

Nach Dfm:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds \\ &= \int_c^d \langle v(g_2(t)), \overbrace{v_a(g_2(t))}^{=(1,0)} \rangle \underbrace{\|g_2'(t)\|}_{=(0,1)} dt \\ &= \int_c^d v_1(\underbrace{b, c+d-t}_{\tau}) \underbrace{dt}_{-d\tau} = + \int_c^d v_1(b, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_4} \langle v(x,y), v_a(x,y) \rangle ds \\ &= \int_c^d \langle v(a,t), \overbrace{(-1,0)}^{(0,1)} \rangle \|g_4'(t)\| dt \\ &= - \int_c^d v_1(a,t) dt \end{aligned}$$

Beide Summanden zusammen ergeben: gerade

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) x^2 (dx, dy) &= \int_c^d dy \int_a^b dx \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial x} = \\ &= \int_c^d dy [v_1(b,y) - v_1(a,y)] \\ &= \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} \langle v(x,y), v_a(a,y) \rangle ds \end{aligned}$$

wobei wir wieder Fubini, Übergang zum Riemann-Integral, HDI verwendet haben.

In dem wir nun beide Integrale in I summieren, erhalten wir gerade (G').
(im klaren korrekter Vorzeichen!) 

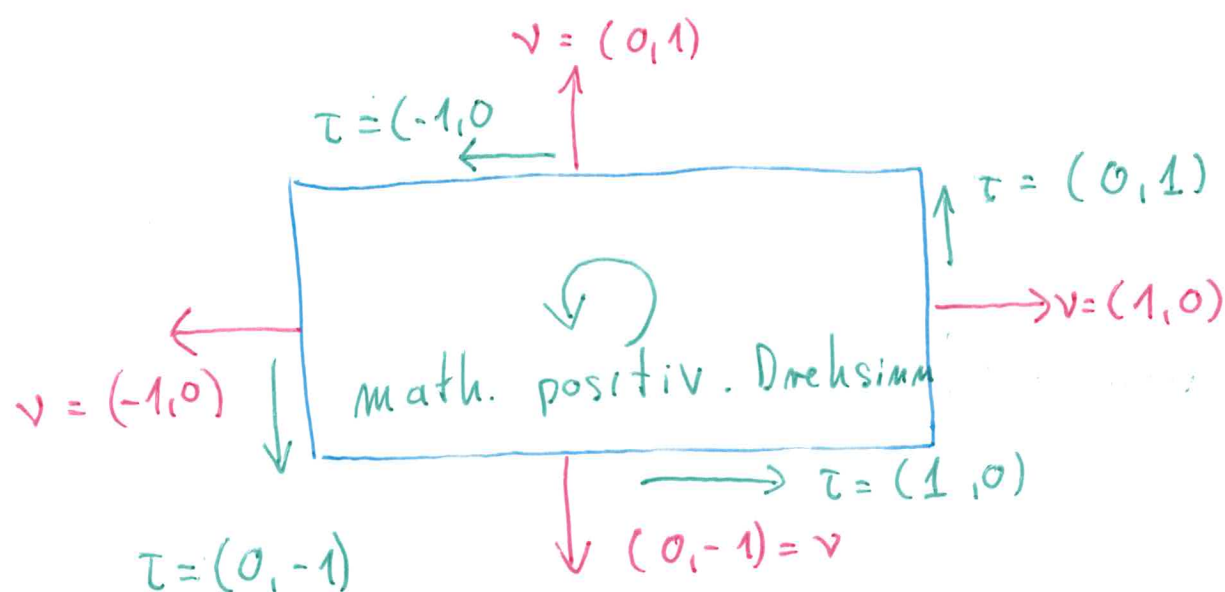
Uminterpretation

Definiere für $q \in \partial D \setminus F$ „guter Randpunkt“

$\tau(q) = (-v_2(q), v_1(q))$ wobei

$\boxed{1G - G}$ $(v_1, v_2)(q)$ äußerer Normalen einh. V

im $q \in \partial D$. Dann ist $\tau(q)$ um $\frac{\pi}{2}$, d.h. 90° gedrehter äußerer Normalenvektor



Damit haben wir eine Orientierung vom ∂D erhalten. Beachte: Entgegengesetzt zu den Orientierungen der $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ im Beweis. Da es sich aber um ein kurvenint. 1. Art handelte, kommt bei beiden Orientierungen derselbe Integralwert raus.

Zu dem betrachteten Vektorfeld $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiere $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\boxed{16-7} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$

auch dies ist eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$, aber in die andere Richtung:

$$\Rightarrow \operatorname{div} w = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \langle w, v_a \rangle &= w_1 v_1 + w_2 v_2 = v_2 v_1 - v_1 v_2 \\ &= v_2 \tau_2 + v_1 \tau_1 = \langle v, \tau \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die beiden Rotationen heben sich auf.

Integralsatz von Green in der Ebene 2.2.7

Seien $D \subset \bar{D} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, D beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, Ω offen,

$v = (v_1, v_2)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig diffbar und

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \in L(D). \text{ Sei } \tau \text{ der (wie oben}$$

konstruierte) Tangential einheitsvektor, s.d. ∂D

im math. positiven Sinne definiert ist.

(6r)

$$\text{Dann } \int_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) (x, y) \lambda^2(dx, dy) =$$

$$= \int_{\partial D} \langle v(x,y), \underbrace{\tau(x,y)}_{\text{orientiert.}} \rangle ds$$

Kurvenint. 1. Art.
unabh. vom Orient.
von $\Gamma = \partial D$

$$= \int_{\Gamma} v(x) \cdot dx \quad \text{mit einer positiv orientierten Parameterdarst. } \gamma \text{ von } \Gamma, \text{ s.d. } \tau = \gamma' / \|\gamma'\|$$

Kurvenint. 2. Art ist vom Orientierung abh.

vgl. Bm. 2.2.2 (d).

Betrachtet man das Vektorfeld

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u = (v_1, v_2, 0) \quad \text{so ist}$$

$$\text{rot } u = \begin{pmatrix} -D_3 v_2 \\ D_3 v_1 \\ \underbrace{D_1 v_2 - D_2 v_1} \end{pmatrix}$$

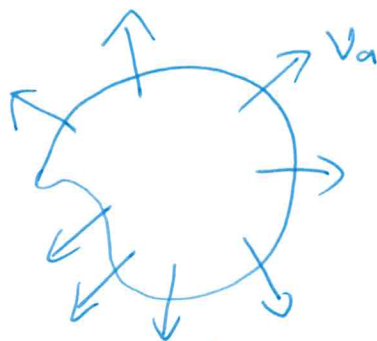
$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad \text{wie in (6r)}$$

Bm 2.2.8 (Veranschaulichung d. Begriffe
Rotation u. Divergenz)

Wir betrachten eine Flüssigkeit, die inkompressibel ist und die konstante Dichte $\rho = 1$ besitzt in einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$.

In jedem Punkt $(x, y) \in D$ fließt die Flüssigkeit in eine Richtung $v(x, y)$. Dies ergibt ein Geschwindigkeitsfeld $v: D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_{\partial D} \langle v(x, y), v_n(x, y) \rangle ds$$



der Fluß durch den Rand ∂D nach Außen pro Zeiteinheit. Ist dieser Wert positiv, dann liegt in D eine Quelle vor. Die mittlere Ergiebigkeit (der Quelle) von v in D ist

$$\frac{1}{\lambda^2(D)} \int_{\partial D} \langle v, v_n \rangle ds$$

Ist nun $D_h \subset D$ eine Folge von solchen Gebieten mit $\bigcap_{h \in \mathbb{N}} D_h = (x_0, y_0)$ und

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{diam } D_h = 0 \quad , \quad \text{z. B.} \quad D_h = B_{\frac{1}{h}}(x_0, y_0)$$

es gilt dann folgender Grenzübergang:

$$(\operatorname{div} v)(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(D_h)} \int_{D_h} \operatorname{div}(x, y) \lambda^2(dx, dy)$$

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(D_h)} \int_{\partial D_h} \langle v, \nu_a \rangle ds$$

Daher beschreibt $\operatorname{div} v(x_0, y_0)$ die Quellstärke oder lokale Ergiebigkeit von v in (x_0, y_0)

es gilt dann folgender Grenzübergang:

$$(\operatorname{div} v)(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(D_h)} \int_{D_h} \operatorname{div} v(x, y) \lambda^2(dx, dy)$$

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(D_h)} \int_{\partial D_h} \langle v, \nu_a \rangle ds$$

Daher beschreibt $\operatorname{div} v(x_0, y_0)$ die Quell-
stärke oder lokale Ergiebigkeit von v
in (x_0, y_0)

12.12.2022

Analog kann man für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$
das Integral

$$\int_{\partial D} \langle v(x, y), \tau(x, y) \rangle ds$$

$$= \int_D (\operatorname{rot} v(x, y))_z \lambda^2(dx, dy)$$

als Zirkulation oder (mittlere) Wirbelstärke von
 v längs ∂D interpretieren. Wieder mit
einem Grenzübergang ergibt sich:

dass $(\operatorname{rot} u(x_0, y_0))$ die Wirbelstärke bzw. Wirbel dichte von v im Punkt $(x_0, y_0) \in D$ angibt.

Korr. 2.2.9 a) (Flächenformel)

Wir betrachten das Vektorfeld $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und eine positiv orientierte

Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der

Jordan kurve $\Gamma = \partial D$, die stückweise glatt ist.

Nach Bm. 2.2.2 gilt dann für den

Tangentenheitsvektor $\tau(t) \in \mathbb{R}^2$ zu $\gamma(t)$

$$\tau(t) \parallel \gamma'(t) = \gamma'(t)$$

Der Integralsatz von Green besagt:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) (x, y) \, x^2 &= \int_{\partial D} \langle v, \tau \rangle \, ds = \int_a^b \frac{\langle v(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \, dt \\ &\parallel \\ &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \end{aligned}$$

17-1 kombiniert für $v = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_D (1 - (-1)) \lambda^2(dx, dy)$$

$$2 \lambda^2(D)$$

$$\int_a^b [\gamma_1(t) \gamma_2'(t) - \gamma_2(t) \gamma_1'(t)] dt$$

Falls man die abkürzende Notation

$$\gamma_1(t) = x(t) \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = y(t)$$

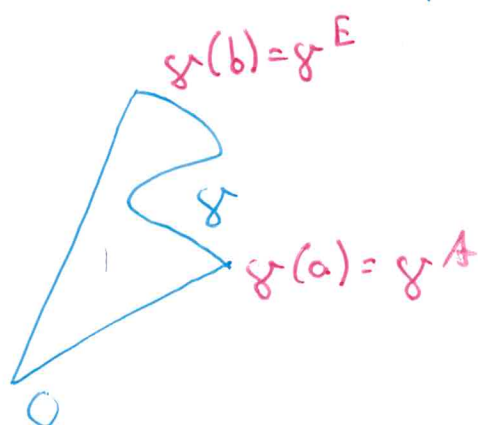
benutzt, folgt

$$\lambda^2(D) = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t) y'(t) - y(t) x'(t)] dt. \quad (1)$$

b) Verallgemeinere die Sektorflächenformel.

Sei Γ stückweise glatter Jordanbogen mit Parameterdarst. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, s.d.

$$0 \notin \gamma([a, b])$$



$$\sigma_A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\sigma_A(t) = t \gamma^A$$

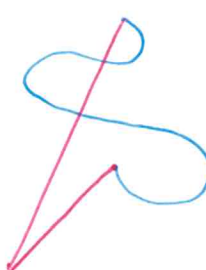
$$\sigma_E$$

$$= t \gamma^E$$

Segmentparametrisierungen die 0 mit Endpunkt γ^A , γ^E verbinden.

Dann ist $\tilde{\Gamma} = \Sigma_A \mapsto \Gamma \mapsto (-\Sigma_E)$

stückw glatte, geschlossene Kurve. Wir nehmen an,
 das $\tilde{\Gamma} = \partial D$ der Rand eines Gebietes ist,
 d.h.



ist abgeschlossen.

Σ_{AE} und Γ sind disjunkt.



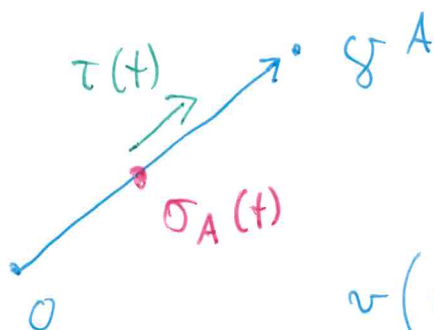
Dann besteht $\lambda^2(D)$

analog zu (1) aus drei Wegintegralen.

Wir zeigen, dass die Beiträge von $\int_{\Sigma_A}$

und $\int_{\Sigma_E}$ Null sind.

Was ist der Tangentenvektor zur Kurve σ_A ?



$\tau(t)$ parallel zu $\sigma_A(t)$

$$v(\sigma(t)) = \begin{pmatrix} -\sigma_2(t) \\ \sigma_1(t) \end{pmatrix} \perp \sigma(t)$$

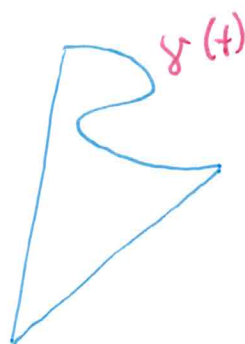
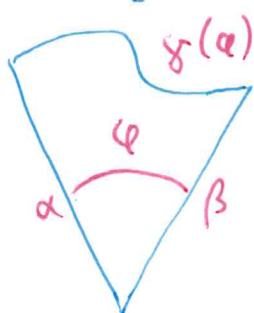
Also $v(\gamma(t)) \perp \tau(t)$, denn nach

$$\int_{\Sigma_A} \langle v, \tau \rangle (x, y) ds = 0 \quad \text{ebenso für } \int_{\Sigma_E} \langle v, \tau \rangle ds = 0$$

$\Rightarrow$ Bei (1) bleibt nur das Kurvenintegral über Γ stehen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \chi^2(D) &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_A} \langle v, \tau \rangle ds + \int_{\Gamma} \langle v, \tau \rangle ds + \int_{-\Sigma_E} \langle v, \tau \rangle ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[x(t) y'(t) - y(t) x'(t) \right] dt \end{aligned}$$

Die geometrische Verallgemeinerung im Vergleich zur Leibnizschen Sektorformel in § 1 besteht darin, dass wir nicht annehmen, dass Γ über eine Winkelvariable parametrisiert werden kann § 1



Bsp. 2.2.10 Die Ellipse ist eine Jordankurve.

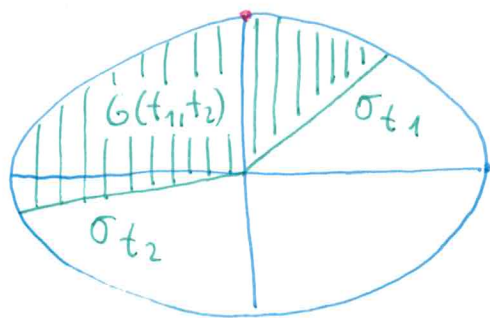
Man kann sie durch $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$ parametrisieren

$$\gamma(\pi/2) = \begin{pmatrix} a \cos \frac{\pi}{2} \\ b \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Für
 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$

sei



$$\gamma(0) = (a \cos 0, b \sin 0)^T = (a, 0)^T$$

$G(t_1, t_2)$

das vom Fahrstrahl σ_t im Zeitraum $[t_1, t_2]$
überstrichene Gebiet

Anwendung von Kor 2.2.9 liefert

$$\begin{aligned} \lambda^2(G(t_1, t_2)) &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [a b (\cos t)^2 + a b (\sin t)^2] dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_{t_1}^{t_2} [\cos^2 + \sin^2](t) dt = \frac{t_2 - t_1}{2} ab \end{aligned}$$

Insgesamt

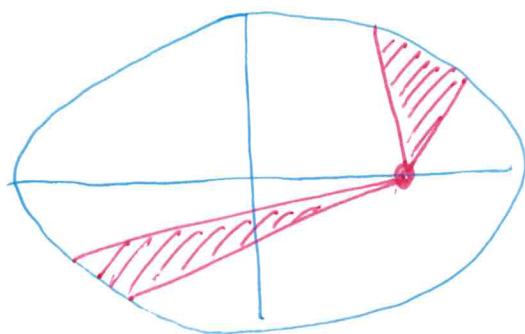
In jeder Zeitspanne der Länge $T = t_2 - t_1$

überstricht der Fahrstrahl ein Gebiet

derselben Fläche

⇒ (falsches) 2. Keplersches Gesetz

gleiche Zeitdauer ⇒ gleiche überstrichene Fläche



§ 2.3 Flächenintegrale

Def 2.3.1 Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$,
injektiv, $\psi \in C^1(W, \mathbb{R}^3)$, und $\psi^{-1}: S := \psi(W)$
 $\rightarrow W$ stetig, sowie

$$2 = \text{Rang } J_\psi(u,v) = \text{Rang}$$

$$\begin{pmatrix} D_u \psi_1 & D_v \psi_1 \\ D_u \psi_2 & D_v \psi_2 \\ D_u \psi_3 & D_v \psi_3 \end{pmatrix}$$

für alle $(u,v) \in W$. D. h. mindestens eine der
drei 2×2 Determinanten in J_ψ muß $\neq 0$
sein.

Dies ist äquivalent zur Forderung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq D_u \psi \times D_v \psi = \begin{pmatrix} D_u \psi_2 D_v \psi_3 - D_u \psi_3 D_v \psi_2 \\ D_u \psi_3 D_v \psi_1 - D_u \psi_1 D_v \psi_3 \\ D_u \psi_1 D_v \psi_2 - D_u \psi_2 D_v \psi_1 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen dann $S = \psi(W)$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung ψ .

Seien ψ_1, ψ_2 zwei solche Parameterdarst.
für $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} \psi_1 : W_1 & \searrow & \\ & S = \psi_1(W_1) = \psi_2(W_2) & \\ \psi_2 : W_2 & \nearrow & \\ & \cap & \\ & \mathbb{R}^3 & \end{array} \quad \text{und} \quad \alpha := \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \text{, s.d.}$$

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & \xrightarrow{\psi_1} & S & \xrightarrow{\psi_2^{-1}} & W_2 \\ & & & \searrow \alpha & \\ & & & & \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Als Verkettung von bijektiven stetigen Abb. ist auch α solche und $\alpha^{-1} = \psi_1^{-1} \circ \psi_2$ ist
17-7] dann eben falls bijektiv und stetig. kor. 2.3.7

besagt, dass α sogar C¹-Diffeomorphismos.

Beh: Ist α diffb in $(u,v) \in W_1$, so ist $(D\alpha)(u,v)$ regulär.

Bw: Wende Kettenregel auf $\psi_2 \circ \alpha = \psi_1$ an

$$\underbrace{J_{\psi_1}(u,v)}_{\text{Rang} = 2} = \underbrace{J_{\psi_2}(\alpha(u,v))}_{\text{nach Ann.}} \cdot J_{\alpha}(u,v)$$

Rang = 2 nach Ann.

Wäre $\text{Rang } J_{\alpha}(u,v) < 2$, so auch der von $J_{\psi_1}(u,v)$. Also $(\det J_{\alpha})(u,v) \neq 0$ für alle $(u,v) \in W_1$.

Ist $\alpha: W_1 \rightarrow W_2$ stetig diffb, hat $\det J_{\alpha}$ auf ganz W_1 festes Vorzeichen.

zudem
Sind die Parameterdarst. ψ_1, ψ_2 von S derart, dass $(\det J_{\alpha}) > 0$, so heißen ψ_1 und ψ_2 gleich orientiert. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $\{\psi: W \rightarrow S \text{ mit obigen Eigensch.}\}$ der Menge

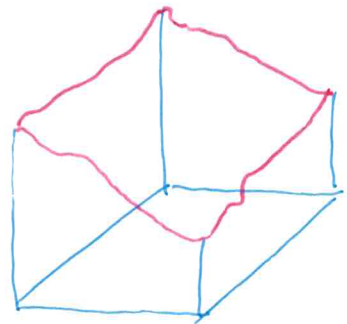
17-8 | aller Parameter-D. von S .

Die Menge zerfällt in 2 Äquivalenzklassen,
wovon jede einer Orientierung von S ist.

Bsp 2.3.2

(a) Sei $h: W \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1(W)$ mit Graph

$$G_h \subset W \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$



Dann ist $S = G_h$ ein
reguläres Flächenst. mit

Parameter.-D. $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix}$$

Offensichtlich hat

$$J_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_u h & D_v h \end{pmatrix} \quad \text{vollen Rang}$$

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(D)$

so wie $N = \{x \in D \mid F(x) = 0\}$. Ist $q \in N$

ein Punkt mit $\text{grad } F(q) \neq 0$ so folgt

17-9 aus dem S. ü. implizite Fkt., dass

eine Umgebung $U = B_\varepsilon(q) \subset \mathbb{R}^3$ von q ex.,
s.d. $U \cap N$ der Graph einer Fkt. h wie
oben ist. Damit ist $S = U \cap N$ ein regu-
läres Flächenstück.

(c) Für $H, R > 0$ parametrisiert

$$\psi: (0, H) \times (-\pi, \pi) =: W \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \varphi) \mapsto (s \cos \varphi, s \sin \varphi, t)$$

mit $s = R(1 - t/H)$, einen aufgeschlitzten
Kegelmantel der Höhe H mit Radius R .

Der Schlitz entspricht dem Parameter-
menge $\{(t, \pi) \mid t \in (0, H)\}$.

(d) Für $R > 0$ ist $\psi: (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\psi(\varphi, \Theta) = r (\cos \varphi \cos \Theta, \sin \varphi \cos \Theta, \sin \Theta)^T$$

eine Parametrisierung einer Sphäre, d.h.

Kugeloberfläche $S = S_R^2$ abzüglich

eines Halblängengrads.

Konnektionen im D.2.3.1

$$\psi^{-1}: S := \psi(W) \rightarrow W \text{ stetig}$$

Als Verkettung von bij. stetigen

Abb. ist auch α solche und

$$\alpha^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi \text{ ist dann eben}$$

falls bijektiv und stetig.

k 2.3.7 unten besagt, dass

α sogar C^1 -Diffeomorphismus

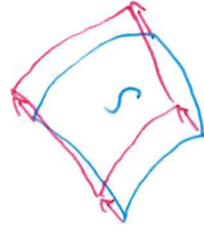
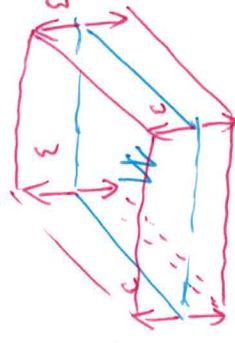
ist.

Warum?

Flächensstück $S \subset \mathbb{R}^3$ ist nicht offen.

Differenzierbarkeit ist nur für Fläch auf offenen Defn-Ber definiert.

Lösungs möglichkeit:



"aufgedichtetes S"

ist offen in $\mathbb{R}^3$

Mögliche Lsg, wir machen aber anders.

Wir auflösen

$\mathbb{R}^3 \supset S$ ist metrischer Raum.

Abstands $\Rightarrow$ vererbt.
 begriff

ausreichend, um

Stetigkeit zu

Definieren (robuster).

Dfm 2.3.3

Eine Fläche S in $\mathbb{R}^3$ ist eine Teilmenge
 $S \subset \mathbb{R}^3$ für die eine Darstellung

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j \quad \cup \quad \bigcup_{i \in I} N_i \quad (1)$$

existiert mit den Eigenschaften:

- * Alle auftretenden Vereinigungen sind disjunkt.
- * Die Indexm. I und J sind endlich.
- * Jedes S_j ist ein reguläres Flächenstück wie oben (mit einer Parameter D $\psi_j: W_j \rightarrow S_j$)
- * Jedes N_i ist in $\bigcup_{j \in J} (\overline{S_j} \setminus S_j)$

enthalten und eine 2-dimensionale

Nullmenge, d.h. es ex zu jedem $\varepsilon > 0$

18-1 eine Folge von Würfeln $(W_n)_n$ in $\mathbb{R}^3$

so dass $N_i \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda^3(W_k)]^{2/3} < \varepsilon \quad (2)$$

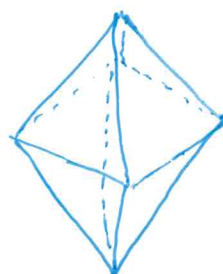
Bsp. 2.34

Beispiele für Flächen im $\mathbb{R}^3$ sind

Kegelmantel und Sphäre, da fehlende Kegelstrahl und Halblängengrad jeweils durch N_i wie oben dargestellt werden können.

Ebenso: Oberflächen von Quadern, Zylindern

Pyramiden, Polyeder



Wir dürfen uns Flächen

mit Spitzen und Kanten „erlauben“, weil

sie im den $\bigcup_{i \in I} N_i$ Anteil der λ^2 -

Nullmengen enthalten sind und daher bei

der (noch folgenden) Berechnung von

Integralen über 2-dim Flächen keinen

18 - 2 Beitrag liefern.

Auch das Möbius band ist eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$,
obwohl es nicht die Oberfläche eines
Körpers ist.

—
Eine Kante ... (Einheits) Würfels $W =$
 $= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_{\max} = \|x\|_{\infty} \leq 1 \}$ ist

$$K = \{ (x_1, 1, 1) \mid x_1 \in [-1, 1] \} \subset \partial W \subset \mathbb{R}^3$$

Offensichtlich gilt für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$

$$W^\varepsilon := \{ (x_1, x_2+1, x_3+1) \mid x_2, x_3 \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}], x_1 \in [-1, 1] \}$$

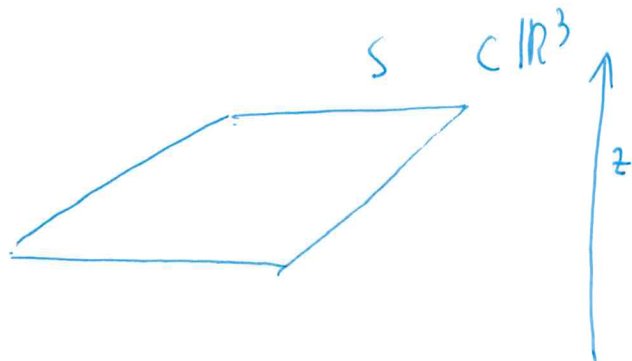
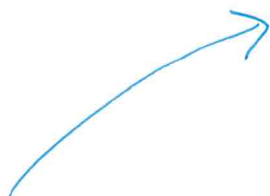
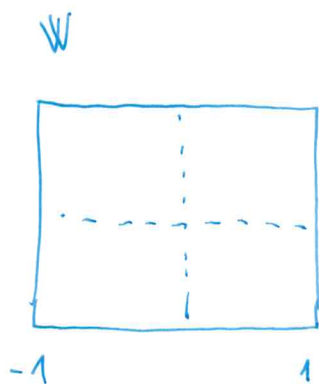
$$\supset K$$

$$\text{und } \chi^3(W^\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow [\chi^3(W^\varepsilon)]^{2/3} = \varepsilon^{4/3} < \varepsilon.$$

Bsp. 2.3.5 Gute und schlechte Parameter-Darst.

$$\text{Sei } W = \{ (u, v) \mid u, v \in (-1, 1) \} = (-1, 1)^2$$

$$\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$S = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \{5\}$$

Offensichtlich: $\psi : W \rightarrow S$ bijektiv, stetig, C^1

Alternative Param - Darst.

$$\varphi : U = W \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = (x^3, y, 5)$$

ist bijektiv, C^1

$$\varphi^{-1} : S \rightarrow W \text{ ist } (\xi, y, 5) \mapsto (\text{sign } \xi \sqrt[3]{|\xi|}, y)$$

Aus Ama I :

$$\left[\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ bij., isotom, stetig} \Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ebenfalls} \\ x \mapsto x^3 \qquad \qquad \qquad \xi \mapsto \text{sign } \xi \sqrt[3]{|\xi|} \end{array} \right]$$

Um parametrisierung

$$\alpha : \varphi^{-1} \circ \psi : W \rightarrow W$$

$$W \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\varphi^{-1}} U = W$$

α

18-4 $(u, v) \mapsto (u, v, 5) \mapsto (\text{sign } u \sqrt[3]{|u|}, v)$

ist als Verknüpfung bijektiv, bi-stetiger
Abb ebenfalls eine.

Aber $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha: W \rightarrow W$ ist nicht partiell
diffbar in u Richtung in allen
 $w = (u, v) \in W$ mit $u = 0$

Denn: für $u > 0$ ist $\alpha_1(u, v) = \sqrt[3]{u}$, also

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(u+\varepsilon, v) - \alpha_1(u, v)}{\varepsilon} &= \frac{\sqrt[3]{u+\varepsilon} - \sqrt[3]{u}}{\varepsilon} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{1/3}}{\varepsilon} = \varepsilon^{-2/3} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty \end{aligned}$$

$u=0$

Insbesondere $\alpha \notin C^1(W)$.

Wie kann das sein? Welche Vorass ist verletzt?

Betrachte $J_\alpha(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ D_u \alpha \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ D_v \alpha \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\text{Rang } J_\phi(0, v) = 1$ für alle $v \in (-1, 1)$.

Bm 2.3.6

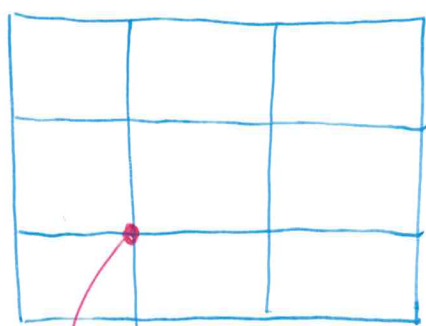
Geometrische Interpretation der

Dtm

Ableitungen

Landkarte

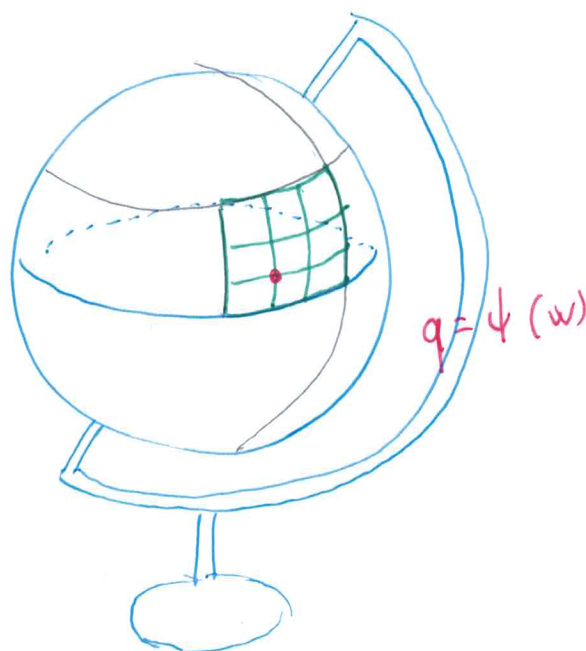
w



$w = (u_0, v_0)$

ϕ

Globus



$q = \phi(w)$

Punkte nahe w werden auf Punkte nahe q abgebildet.

Was ist mit den Koordinatenrichtungen?

Betrachte zwei Kurven:

$$\gamma_B : t \mapsto \phi(u_0 + t, v_0) = \phi(w + t e_1) \quad \text{Breitenkr.}$$

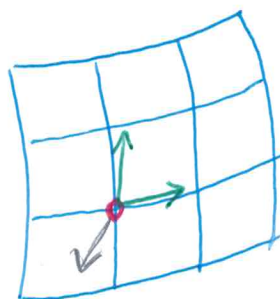
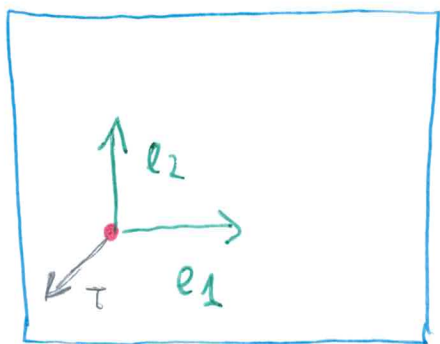
$\gamma'_B(t=0)$ ist ein Tangentialvektor an

18-6 $q = \phi(w) \in S$

$$\gamma_L: t \mapsto \psi(u_0, v_0 + t) = \psi(w + t e_2) \quad \text{Längen hvers.}$$

$\gamma_L'(0)$ ebenfalls Tangentialvektor an $q \in S$

Wie stehen die beiden zueinander



senkrecht

$\Rightarrow$ lin. unabh.

Bedingung

$$2 = \text{Rg } D\psi = \text{Rg} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ D_u \psi & D_v \psi \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Insbesondere sind die Tangentialvektoren

$$\gamma_B'(0) = D_u \psi(w) \quad \text{und} \quad \gamma_L'(0) = D_v \psi(w)$$

linear unabhängig, spannen also einen 2-dimensionalen Vektorraum $T_q \subset \mathbb{R}^3$ auf.

$T_q(S) = T_q$ heißt Tangentialebene oder Tangentialraum an S im Punkt q . Jeder

18-7 Vektor $\tau \in T_q(S)$ kann als $\tau = \gamma'(0)$

für eine Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \psi(w+th)$

für ein $\varepsilon > 0$ und einen Richtungsvektor $h \in \mathbb{R}^2$
beschrieben werden.

Wg der lin. Unabhängigkeit ist für alle
 $w \in W \quad \tilde{v}(w) := (D_u \psi)(w) \times (D_v \psi)(w) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

insbesondere ist der Normalen einheitsvektor
an S in q

$$v_\psi(q) = \frac{\tilde{v}(w)}{\|\tilde{v}(w)\|} \quad (4)$$

wohldefiniert.

Erhalten wir denselben N-E-V, wenn wir
statt ψ eine andere (gute) Parametrisierung
 φ von S betrachten?

Ja, bis auf Vorzeichen:

$$v_\varphi(q) = \pm v_\psi(q)$$

Ist $\varphi \sim \psi$, d.h. $\det(D\alpha) > 0$ für Umparam α ,
so tritt + auf für alle $q \in S$

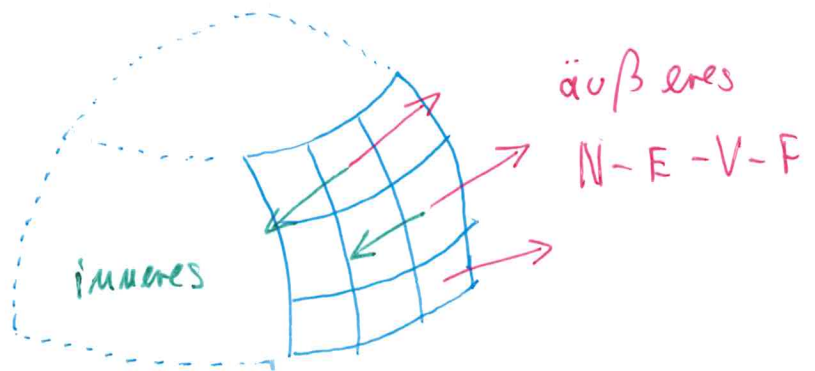
Ist $\det(D\alpha) < 0$ für $\alpha = \varphi^{-1} \circ \psi$, so tritt - auf
für alle $q \in S$.

D.h. durch die Wahl einer der beiden möglichen
Richtungen des Einheitsnormalenvektorfelds

$\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ legen wir eine der beiden
mögl. Orientierungen fest.

Wir könnten also

$$\nu_\psi(q) = \nu_\sigma(q)$$



schreiben, wobei

$\sigma = [\psi] = \{ \varphi : W_\varphi \rightarrow S \text{ Parameter d. } \varphi \sim \psi \}$
eine Orientierung ist.

Achtung: Beim Möbiusband kann ich kein

äußeres / inneres Normalenvektorfeld

18-9] definieren: Es ist nicht orientierbar.

Um parametrisierungen zw. Parameterdarst. eines
regul. Flächensstücks sind immer C^1 -Diffeomorph.

Korr. (zum folg. S.) 2.3.7

Sind $\psi: W \rightarrow S$, $\varphi: U \rightarrow S$ Parameterd.
des regul. Flächensstücks wie in Dfm. 2.3.1, so
ist $\psi^{-1} \circ \varphi: U \rightarrow W$ stetig diffbar.

Da man die Rollen von ψ und φ vertauschen
kann ist $\alpha = \varphi^{-1} \circ \psi$ sogar ein C^1 -
Diffeomorphismus.

ist Spezialfall von:

S. 2.3.7 (Differenzierbarkeit von S -wertigen Fkt.)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ regul. Flächens. mit Parameter-
darst. $\psi: W \rightarrow S$. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^m$
offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(U) \subset S$. Dann gilt

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist $C^1 \Leftrightarrow \psi^{-1} \circ f: U \rightarrow W$ ist C^1

18-10 Bw: Satz über Umkehrfkt (ein Verwandter

des S. ü. implizite Fkt) unter Verwendung von
 $\operatorname{Rg} J_4 = 2$ auf ganz W . $\square$

Fazit: Für Differenzierbarkeitseigenschaften
einer Fkt f mit Werten in S spielt es keine
Rolle, ob wir f als Abb. mit Werten in $\mathbb{R}^3$
oder mit Werten in der Koordinaten-/Parameter-
menge W auffassen.

9-Januar 2023

Bsp. 2.3.8

(a) Ist $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$
offen, $F \in C^1(D)$, $q \in N = \{x \in D \mid F(x) = 0\}$
mit $DF(q) \neq 0$
so ist $S = N \cap B_\varepsilon(q)$ ein reg. Flächenst
für $\varepsilon > 0$ klein genug und

$$\nu(q) = \pm \frac{1}{\| \operatorname{grad} F(q) \|} \operatorname{grad} F(q)$$

Bei der Illustration von 2-dimensionalen Nullmengen, vgl. (2) in Dfm 2.3.3, nach Bsp. 2.3.4 sind wir um genau vor gegangen, das haben wir das nochmal genauer an

Für ein Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ suchen wir nach einer Folge von Würfeln $W_1, W_2, \dots \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $S \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$. An

dieser Stelle ist es wichtig, dass alle W_k echte Würfel sind, d.h. von der

Form

$$W_k = x_k + [0, a_k]^3$$

$$(6) \quad = \left\{ y_k \mid y_k = x_k + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 0 \leq b_i \leq a_k \\ 1 \leq i \leq 3 \end{matrix} \right\},$$

s. d. insbesondere alle drei Seiten gleich

lang sind und für das 3-dim Lebesgue-

Maß gilt $\lambda^3(W_k) = a_k^3$. Dann gilt für

19-1] In (6) ist es egal, ob W_k offen, halboffen o. abgeschl. ist.

den Durchmesser:

$$\begin{aligned} \text{diam } W_k &= \sup \{ \|x-y\| \mid x, y \in W_k \} \\ &= \sqrt{3} a_k = \sqrt{3} [\lambda^3(W_k)]^{1/3} \end{aligned}$$

Falls wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche Würfelfolge mit $S \subset \bigcup W_k$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda^3(W_k)]^{2/3} < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{3} (\text{diam } W_k)^2 \sim \text{Fläche eines 2-dim Schnittes durch } W_k$$

existiert, so heißt S eine 2-dim Nullmenge.

Beachte: Die Fläche jedes Schnittes $W_k \cap V$ für eine affine Ebene $V \subset \mathbb{R}^3$ ist höchstens $(\text{diam } W_k)^2$

Dies illustriert, warum die Potenz $2/3$ auftritt.

Nun betrachten wir noch mal sorgfältiger Überdeckungen der Kante

$$K = \{ (x_1, 1, 1) \mid x_1 \in [-1, 1] \} \subset \partial W \subset \mathbb{R}^3$$

und der Seitenfläche

$$S = \{ (x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in [-1, 1] \} \subset \partial W \subset \mathbb{R}^3$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$

$$\delta := \frac{2}{N} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2N = \frac{4}{\delta}$$

Definiere Würfel $W_{-N}, W_{-N+1}, \dots, W_{N-1}$ mit

$$W_h = \left(\begin{array}{c} h/N \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) + \left([0, \delta/2] \times [0, \delta/2] \times [0, \delta/2] \right)$$

Dann:

$$\bigcup_{h=-N}^{N-1} W_h = [-1, 1] \times [0, \delta/2] \times [0, \delta/2]$$

$$\sum_{h=-N}^{N-1} \underbrace{\left[\chi^3(W_h) \right]^{2/3}}_{= (\delta/2)^3} = 2N \cdot \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 = \frac{4}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{4} = \delta < \varepsilon$$

wie gewünscht in (2). $\Rightarrow$ K ist 2-dim Nullmenge.

Versuchen wir analoges Vorgehen bei der

19-3] Seitenfläche S

Defn Würfel

$$W_{h,l} = \begin{pmatrix} h/N \\ l/N \\ 1 \end{pmatrix} + [0, \delta/2]^3$$

$$h, l \in \{-N, \dots, N-1\} =: I \Rightarrow \# I = 2N$$

$$\Rightarrow \bigcup_{h,l \in I} W_{h,l} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, \delta/2]$$

$$\sum_{h,l \in I} \left[\underbrace{\lambda^3(W_{h,l})}_{\left(\frac{\delta}{2}\right)^3} \right]^{3/2} = 4N^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{\delta}\right)^2 \frac{\delta^2}{4} = 4$$

$\Rightarrow$ Die δ -Abhängigkeit hebt sich raus, spielt keine Rolle

$\Rightarrow$ Egal wie klein wir die Würfel wählen, der Ausdruck in (2) kann nicht bel. verkleinert werden.

(b) Für die Parameterdarstellung der Sphäre (bis auf 2-dim Nullmenge)

$$\psi(\varphi, \vartheta) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

gilt

$$D_{\varphi} \psi = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vartheta} \psi = r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

⇒ Vektorprodukt

$$D_{\varphi} \psi \times D_{\vartheta} \psi = r^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \vartheta \\ \sin \varphi \cos^2 \vartheta \\ \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta + \cos^2 \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r^2 \cos \vartheta \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Wegem

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos \varphi & \cos \vartheta \\ \sin \varphi & \cos \vartheta \\ & \sin \vartheta \end{pmatrix} \right\|^2 = \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta$$
$$= \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{= 1} \underbrace{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}_{= 1}$$

ist dieser Vektor normiert und damit

$$\nu_\psi(q) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \cos \vartheta \\ \sin \varphi & \cos \vartheta \\ & \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{bereits der}$$

Normalenheitsvektor an S im Punkt

$q = \psi(\varphi, \vartheta)$ und zwar der äußere.

Unser Ziel nun: Definiere, analog zu

bereits bekannten Kurvenintegral 1. Art,
das Flächenintegral

$$\int_S f(x) \, d\sigma$$

wobei:

S reguläres Flächenstück in $\mathbb{R}^3$
(später auch Fläche u. g. Voraussetzungen)

$\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
(später auch nur integrierbar, statt stetig)
damit noch zu definieren des „Oberflächenmaß“

Motivation / Vorstellung:

λ ist Dichte der Ladungsverteilung auf
einer dünnen Metallschale S , oder

λ ist die Dichte der Masseverteilung einer
dünnen Schicht $S \subset \mathbb{R}^3$.

Im Fall kann man $\lambda \equiv 1$ auf S
die Oberfläche von S berechnen.

Um eine Intuition zu erhalten, wie das
Flächenintegral lauten sollte, betrachte
ein regul. Flächenstück $S \subset \mathbb{R}^3$

mit Parameter darst. $\psi: W \rightarrow S$ bijektiv
und $W \subset \mathbb{R}^2$ offen. In W wähle ein abges.

Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ und setze

$$Q := \psi(R) \subset S \subset \mathbb{R}^3.$$

Im Folgenden gehen wir ganz analog
vor, wie beim Bw. der Transformations
Formel für Integrale. Seien:

$$Z_1 = \{u_0, u_1, \dots, u_r\} \subset [a, b] \quad \text{Zerlegung}$$

$$Z_2 = \{v_0, v_1, \dots, v_s\} \subset [c, d] \quad - || -$$

für $r, s \in \mathbb{N}$ mit Feinheiten $\|Z_1\| < \varepsilon$, $\|Z_2\| < \varepsilon$.

Teilrechtecke

$$R_{j,h} := [u_{j-1}, u_j] \times [v_{h-1}, v_h] \subset R \subset W$$

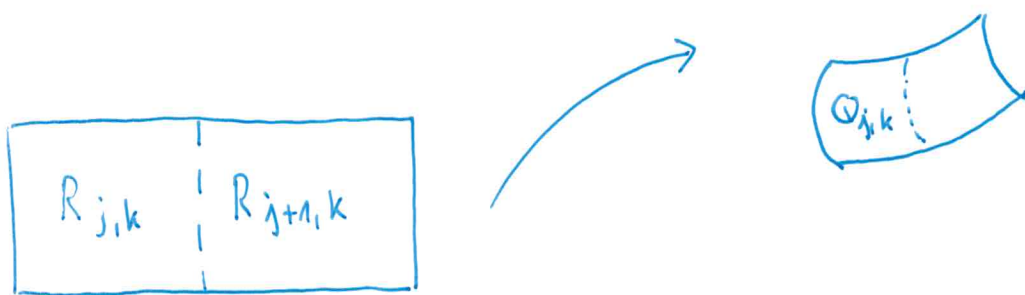
mit linker unterer Ecke

$$\tau_{j,h} = (u_{j-1}, v_{h-1})$$

$R = \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{k=1}^s R_{j,k}$ Überdeckung ist
 disjunkt bis auf
 kantenstücke

$$\Rightarrow Q = \psi(R) = \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{k=1}^s Q_{j,k} \text{ mit } Q_{j,k} = \psi(R_{j,k})$$

ebenfalls disjunkt, bis auf 2-dim Nullmenge
 bestehend aus Randkurven.



Setze $q_{j,k} = \psi(r_{j,k})$

Idee

$$\int_Q f(x, y, z) d\sigma \approx \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(q_{j,k}) \sigma(Q_{j,k}),$$

ε klein

wobei $\sigma(Q_{j,k})$ den Flächeninhalt von $Q_{j,k}$
 bezeichnen soll. Wie sollen wir ihn definieren?

19-5 | Für kleine $u_j - u_{j-1}$ und $v_k - v_{k-1}$

$Q_{j,k}$ approximativ im Punkt $q_{j,k}$ angeheftetes Parallelogramm $P_{j,k}$ aufgespannt von den beiden Vektoren

$$\psi(u_j, v_{k-1}) - \psi(u_{j-1}, v_{k-1})$$

$$\approx \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_{j-1}, v_{k-1}) \right) (u_j - u_{j-1})$$

$$\psi(u_{j-1}, v_k) - \psi(u_{j-1}, v_{k-1})$$

$$\approx \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(u_{j-1}, v_{k-1}) \right) (v_k - v_{k-1})$$

Für die Approximation verwenden wir den MWS und dass $D_u \psi$ und $D_v \psi$ nach Ann. stetig sind.

Aus der Lin. Algebra wissen wir:

Fläche des Parallelogramms = $\|\text{Vektorprodukt der Seiten}\|$

$$\Rightarrow \lambda^2(P_{j,k}) = \|D_u \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \times D_v \psi(u_{j-1}, v_{k-1})\|$$

$$= \lambda^2(R_{j,k}) \cdot (u_j - u_{j-1}) \cdot (v_k - v_{k-1})$$

Einsetzen in die Summe führt zur Näherungsformel

$$\int_Q f \, d\sigma \approx \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(\psi(u_{j-1}, v_{k-1})) \|D_u \psi \times D_v \psi(u_{j-1}, v_{k-1})\| \cdot \lambda^2(R_{jk})$$

für kleines $\varepsilon > 0$.

$$\downarrow$$

$$\approx \int_R f(\psi(u, v)) \|D_u \psi \times D_v \psi(u, v)\| \lambda^2(du, dv)$$

Indem man die obigen Plausibilitätsargumente rigoros durchführt und verallgemeinert, rechtfertigt man Jedes offene W ist disj. Verein. von halboffenen Quadern Q .

Def 2.3.9

Sei $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks $S \subset \mathbb{R}^3$ und

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) f heißt (Lebesgue-) integrierbar auf S , falls

$$(f \circ \psi)(\cdot) \|D_u \psi \times D_v \psi(\cdot)\| \in \mathcal{L}(W)$$

(b) Im diesem Fall ist das Flächenintegral von f über S definiert durch

$$(FI) \int_S f(x, y, z) d\sigma := \int_W f(\psi(u, v)) \|D_u \psi \times D_v \psi(u, v)\| \lambda^2(du, dv)$$

Dabei greifen wir auf das bereits bekannte Lebesgueintegral der Fkt

$$(u, v) \mapsto (f \circ \psi)(u, v) \|D_u \psi(u, v) \times D_v \psi(u, v)\|$$

zurück.

Bem 2.3.10

(a) Der Wert des Flächenintegrals (FI) hängt nicht von der gewählten Param-D. ψ ab, wie aus dem Transformationss. folgt.

(b) Seien $h: W \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1(W)$ und $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))^T$ eine Parameter-D. des Graphen $G_h \subset W \times \mathbb{R}$ von h . Dann gilt

$$D_u \psi = (1, 0, D_u h)^T$$

$$D_v \psi = (0, 1, D_v h)^T$$

$$\Rightarrow \|D_u \psi \times D_v \psi\| = \left\| \begin{pmatrix} -D_u h \\ -D_v h \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + (D_u h)^2 + (D_v h)^2}$$

(c) Eine Menge $B \subset S$ heißt messbar, falls

$A := \psi^{-1}(B) \subset W \subset \mathbb{R}^2$ messbar ist. Dann

ist der Flächeninhalt von B definiert als

$$\sigma(B) = \int_A \|D_u \psi \times D_v \psi(u, v)\| \lambda^2(du, dv) \in [0, \infty]$$

Für unbeschränkte Mengen B kann $\sigma(B)$ auch ∞ sein.

Wir bezeichnen B als ^{2-dim} Nullmenge, falls $A = \psi^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^2$ eine λ^2 -Nullmenge ist.

Dies ist konsistent (äquivalent) zum früher eingef. Begriff der 2-dim Nullmenge.

(d) Ist $S = \bigcup S_i \cup \bigcup N_i \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche

19-9 wie in D.2.3.3 und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

so setzen wir

$$\int_S f(x,y,z) d\sigma = \sum_{j \in J} \int_{W_j} f(\psi_j(u,v))$$

$$\|D_u \psi_j(u,v) \times D_v \psi_j(u,v)\| \lambda^2(du, dv)$$

wobei J endl. Indexmenge und für $j \in J$:

$\psi_j : W_j \rightarrow S_j$ Parameter D von S_j

Über die Mengen N_i muß nicht integriert werden, da der Beitrag Null ist, da jedes N_i 2-dim Nullmenge.

Bsp. 2.3.11

(a) Sei $r > 0$

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \}$ Sphäre

und $f \in \mathcal{L}(S)$. Dann ergibt sich

$$\int_S f(x,y,z) d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \quad f(r \cos\varphi \cos\vartheta, \\ r \sin\varphi \cos\vartheta, \\ r \sin\vartheta) \quad r^2 \cos\vartheta$$

insbes für $k \equiv 1$:

$$\int_S 1 \, d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \, r^2 \cos(\varphi) = r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi$$

Also haben wir gezeigt, dass die Oberfläche $\sigma(S)$ der Kugel $4\pi r^2$ ist. 9.1.2023

(b) Rotationsfläche:

Sei $f: (a,b) \rightarrow (0,\infty)$, $f \in C^1(a,b)$.

Wir betrachten den Graphen G_f in $\mathbb{R}^3$ ein

$$\tilde{G} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,b], z = f(x), y = 0 \}$$

Rotieren wir diese Menge um die x -Achse, so entsteht eine sogenannte Rotationsfläche S_f .

Es existiert eine Parameter-D. $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ von S_f bis auf eine 2-dim Nullmenge. Also ist S_f eine Fläche. Mit Hilfe von ψ

zeigt man (HA):

$$\sigma(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

(c) Ist speziell $f: (0, h) \rightarrow (0, \infty)$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

so heißt S_f Rotationsparaboloid. Es folgt

$$\sigma(S_f) = 2\pi \int_0^h \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x}} dx$$

$$= \pi \int_0^h \sqrt{4x+1} dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[(4x+1)^{3/2} \right]_0^h = \frac{\pi}{6} \left((4h+1)^{3/2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \left((4x+1)^{3/2} \right)' &= \frac{3}{2} (4x+1)^{1/2} \cdot 4 \\ &= 6 [4x+1]^{1/2} \end{aligned}$$

d) Ist $Q = \prod_{k=1}^3 [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^3$ Quader, so

besteht der Rand ∂Q aus 6 regulären
Flächenstücken S_j ($j=1, \dots, 6$) nämlich
Rechtecken und 12 (halb-) offenen Kanten,
die alle 2-dim Nullm. sind.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma(S) &= \sum_{j=1}^6 \sigma(S_j) = \\ &= 2 \left[(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) \right. \\ &\quad \left. + (b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \right] \end{aligned}$$

Bm 2.3.13

(a) Notation: Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläres Flächenst.
und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, so setze: vgl. D. 2.3.9

$f \in \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow f$ ist integrierbar über S

(b) Im Bm. 2.3.10 haben wir das Integral $\int_S f d\sigma$
einer (stetigen) Fkt $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ über

20-2 einer Fläche S definiert.

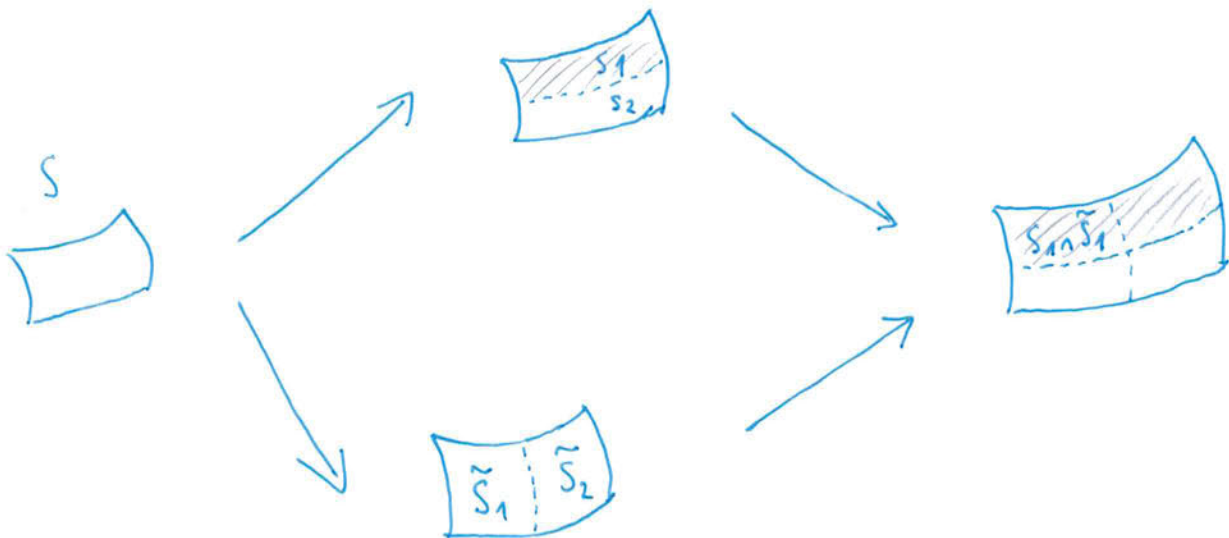
Dieser Wert hängt nicht von der gewählten Zerlegung

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j \quad \dot{\cup} \quad \bigcup_{i \in I} N_i$$

$$= \bigcup_{k \in K} \tilde{S}_k \quad \dot{\cup} \quad \bigcup_{l \in L} \tilde{N}_l$$

Bw-Idee: Betrachte 3. Zerlegung, die die beiden obigen verfeinert:

$$S = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{k \in K} (S_j \cap \tilde{S}_k) \quad \dot{\cup} \quad \bigcup_{i \in I} \bigcup_{l \in L} (N_i \cap \tilde{N}_l)$$



$$\int_{S_1} f d\sigma = \int_{S_1 \cap \tilde{S}_1} f d\sigma + \int_{S_1 \cap \tilde{S}_2} f d\sigma$$

Dfm 2.3.14

a) Ist $S = \bigcup_j S_j \cup \bigcup_I N_i$ Fläche

so heißt jedes $q \in \bigcup_{j \in J} S_j$ regulärer

Punkt von S .

klar da $S_1 = S_1 \cap \tilde{S}_1 \cup S_1 \cap \tilde{S}_2 \cup \text{Trenn-}$
kurve

Trenn kurve ist 2-dim Nullm.

Dfm 2.3.14

b) Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise
glatt berandetes Gebiet, falls G offen,
zusammenhängend und beschränkt ist,
falls ∂G eine Fläche ist und G
in jedem regulären Punkt $q \in \partial G$ „auf
einer Seite von ∂G liegt.“, d.h. genauer:
Zu jedem regulären $q \in \partial G$ ex. ein Koord-
System (ξ, η, ζ) des $\mathbb{R}^3$, s.d.

$$q = (\xi=0, \eta=0, \zeta=0) \quad (1)$$

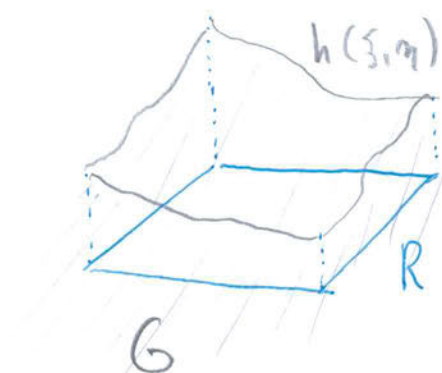
ein offener Quader $Q = R \times (c,d) \subset \mathbb{R}^3$

20-4 und eine C^1 -Fkt $h: R \rightarrow \mathbb{R}$ existieren,

s.d. $q \in Q$, $h(R) \subset (c, d)$

$$G \cap Q = \{ (\xi, \eta, \zeta) \in Q \mid \zeta < h(\xi, \eta) \}$$

$$\partial G \cap Q = \{ \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \}$$



Ist G stückw. glatt berandetes Gebiet,
so schreiben wir $G \in \mathcal{G}_s = \mathcal{G}_s(\mathbb{R}^3)$
und ∂G heißt stückw. glatter Rand.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar. Kann

man $D_1 f$, $D_2 f$ und $D_3 f$ stetig auf $\overline{\Omega}$
fortsetzen, schreiben wir $f \in \overline{C^1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Ist $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und

20-5] kann man alle ersten und zweiten (auch

gemischten) Ableitungen stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar, schreiben wir $g \in \bar{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$.

Bm. 2.3.15

a) Kugeln, Kugelschalen, Halbkugeln, Ellipsoide, Quader, Polytope sind alle $\mathcal{C}_s(\mathbb{R}^3)$.

In allen diesen Fällen ist die Oberfläche $\sigma(\partial G)$ endlich.

b) Ist $G \in \mathcal{C}_s(\mathbb{R}^3)$ und regulärer Punkt $q \in \partial G$ gegeben, so ex. $\psi: W \rightarrow S = \psi(W)$ mit $q \in S$. In q ist der äußere Normalen einheitsvektor $\nu_a(q)$ die Auswertung des stetigen Normalen einheitsvektorfeldes

$$\nu_a: S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ist konkret q wie in (a) beschrieben und

20-6 $p \in \partial G \cap Q$, so läßt es sich schreiben

als $p = (\xi, \eta, h(\xi, \eta))$ und wir haben

$$v_a(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + (D_\xi h(\xi, \eta))^2 + (D_\eta h(\xi, \eta))^2}} \begin{pmatrix} -D_\xi h(\xi, \eta) \\ -D_\eta h(\xi, \eta) \\ 1 \end{pmatrix}$$

vgl. auch. Bm. 2.3.10

S. 2.3.16 (Integralsatz von Gauß)

Seien $G \in \mathcal{G}_s$, $v \in C(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ Vektorfeld
mit $v|_G : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diffbar. Gelten

$$\langle v, v_a \rangle \in \mathcal{L}(\partial G) \text{ und } \operatorname{div} v \in \mathcal{L}(G)$$

so gilt

$$(2) \int_G \operatorname{div} v(x, y, z) \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\partial G} \langle v, v_a \rangle d\sigma$$

Erklärungen 2.3.17

$$\langle v, v_a \rangle : \partial G \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle v, v_a \rangle(p) = \langle v(p), v_a(p) \rangle$$

$$\operatorname{div} v : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{div} v(x) = \sum_{j=1}^3 (D_j v_j)(x)$$

$$\boxed{20-7} \quad \text{Da } |\langle v, v_a \rangle(p)| \leq \|v(p)\| \cdot \|v_a(p)\| = \|v(p)\|$$

und $p \mapsto \|v(p)\|$ stetig auf kompaktem $\bar{G}$ ist $\langle v, v_a \rangle$ beschr. Fkt.

Im Fall $\sigma(\partial G) < \infty$ ist damit $\langle v, v_a \rangle \in L(\partial G)$

Gilt sogar $v \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ so ist

$\operatorname{div} v = D_1 v_1 + D_2 v_2 + D_3 v_3$ stetig auf $\bar{G}$

und damit ebenfalls beschränkt und integrierbar. $\bar{G}$ ist ja kompakt.

K 2.3.17 (Volumenformel)

Setzen wir in (2) das Vektorfeld

$v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto$ ein und nehmen $\sigma(\partial G) < \infty$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \chi^3(G) &= \frac{1}{3} \int_G \chi^3(dx, dy, dz) \\ &= \frac{1}{3} \int_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle d\sigma \end{aligned}$$

Bm 2.3.18 Fluß und Divergenz.

Ist $F: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld wie in dem Integralsatz, so ist

$$\int_{\partial G} \langle F, \nu_a \rangle d\sigma \quad (4)$$

der Fluß von F durch ∂G nach Außen,
d.h. in Richtung ν_a :

Für den Fluß durch ein reg. Flächenst.

$S \subset \partial G$ ergibt sich mit der Parameter-D.

$\psi: W \rightarrow S$ konkret

hier kürzen sich zwei Fakt.

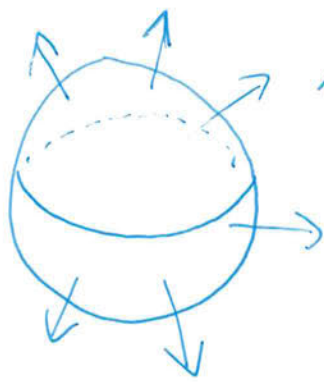
$$\int_S \langle F, \nu_\psi \rangle d\sigma = \int_W \langle F(\psi(u,v)), (D_u \psi \times D_v \psi)(u,v) \rangle \lambda^2(du, dv)$$

$\| \cdot \|^{-1}$ $\| \cdot \|$

Damit können wir wieder die Divergenz von F
physikalisch als Quellstärke einer (inkom-
pressiblen) Strömung F interpretieren:

Integriert über $G = B_r(0)$

$$\int_G \operatorname{div} F \lambda^3 = \int_{\partial G} \langle F, \nu_a \rangle d\sigma$$



$\langle F, v_a \rangle =$ Komponente von F ,
die radial nach
Außen zeigt

$$\begin{aligned} \langle F(x_1, x_2, x_3), v_a(x_1, x_2, x_3) \rangle &= \sum_{j=1}^3 F_j(x) x_j \frac{1}{\|x\|} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^3 F_j(x) x_j \end{aligned}$$

Bm 2.3.19

Sei wieder $G \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R}^3)$ mit $\sigma(\partial G) < \infty$

Betrachte Fkt $f, g \in \bar{C}^1(G, \mathbb{R})$

und $v := f g e_i$ für ein koord. $i \in \{1, 2, 3\}$

Dann ist $v \in \bar{C}^1(G, \mathbb{R}^3)$ und

$$\operatorname{div} v = f D_i g + g D_i f$$

(2) im Integrals. impliziert:

$$\int_G (D_i f) g \, \lambda^3 = \int_{\partial G} f g (v_a)_i \, d\sigma - \int_G f D_i g \, \lambda^3$$

vgl. im eindimensionalen

$$\int_{[a,b]} f' g = f g \Big|_a^b - \int_{[a,b]} f g'$$

$$\partial[a,b] = \{a, b\}$$

$\begin{matrix} v_a \leftarrow \\ \leftarrow [a \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \rightarrow [b \\ \rightarrow v_b \end{matrix}$

$\begin{matrix} b \text{ erhält } + \\ a \text{ erhält } - \end{matrix}$

3. Differentialgleichungen

Gewöhnliche Dgl. im Gegensatz zu partiellen Dgl, bei denen partielle Ableitungen auftreten.

3.0 Beobachtung:

Seien $f, g, h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Fkt.

Ist $f(x) = e^{ax}$ so folgt $f'(x) = a e^{ax}$,
für bel. $a \in \mathbb{R}$. Also erfüllt die Fkt f
die Identität

$$(a) \quad f' = af \quad \text{auf ganz } (0, \infty)$$

Ähnlich gilt für $g(x) = \sin(x)$ für alle $x > 0$

$g''(x) = (\cos(x))' = -\sin(x) = -g(x)$, also
erfüllt g die Identität

$$(b) \quad g'' = -g \quad \text{auf } (0, \infty)$$

22-1 Schließlich gilt für $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$h'(x) = -x^{-2} = -(x^{-1})^2$, also genügt g der Gl

$$(c) \quad h' = -h^2 \quad \text{auf } (0, \infty).$$

Wir haben also zu jeder der 3 Gleichungen (a), (b), (c) eine Lsg. gefunden. Im Folgenden wollen wir uns nun systematisch Gl. anschauen, die eine (unbekannte) Fkt f und ihre Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(n)}$ beinhalten und fragen

ob es eine Lsg der DGl gibt,

wie wir sämtliche Lsg, d.h. den Lsgs-Raum beschreiben können,

welche Eigenschaften (z.B. Regularität, Beschränktheit) die Lsg besitzen,

was über das Intervall der Variablen x , auf dem die Gl. gilt, gesagt werden

z. B. gelten die Gl. (a) und (b) sogar auf ganz $\mathbb{R}$, allerdings (c) nicht.

Gl. (c) beinhaltet ein ~~h~~ $(h)^2$ während (a) und (b) linear in der Fkt f und allen ihren Ableitungen sind.

3.1 Wachstumsprozesse

Das Wachstum einer zeit abh. Population

$x = x(t) \in [0, \infty)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ kann

häufig durch eine DGL der Form

$$\dot{x}(t) := \left(\frac{d}{dt} x \right)(t) = a(x, t) x(t) \quad (1)$$

beschrieben werden.

Def 3.1.1 Die Fkt a in (1) heißt Wachstums-

rate. Hängt diese nur von t ab, nicht

aber von x , so heißt

$$\dot{x}(t) = a(t) x(t) \quad (2)$$

homogene lineare Differentialgleichung erster

Ordnung, da

die Gl. nur die erste Abl. von x (und x selbst) beinhaltet,

sie linear in x und $\dot{x}$ ist,

$\dot{x} - a x = 0$ keinen konstanten (d.h. von x und seinen Abl. unabh.) Summanden enthält.

Bei (2) suchen wir nach $\mathbb{K}$ -wertigen Lsg. x , auch wenn im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Interpretation von a als Wachstumsrate nicht mehr intuitiv ist. Also $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ im Folg.

Bem & Bsp & Fesst. 3.1.2 ^{*}(Lsgs-Raum)

(a)^{*} Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, und A eine bel. Stammfkt von a , so ist

22-4 Für jedes Unterintervall $I_0 \subset I$

die Fkt $x(t) = C e^{A(t)}$, $t \in I_0$, mit bel. $C \in K$
eine Lsg. der DGL

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) \quad \text{auf } I_0$$

Test: $\dot{x}(t) = C (e^{A(t)})' = C e^{A(t)} a(t)$
 $= x(t) a(t) \quad \checkmark$

Dies sind schon alle Lsg. der DGL $\dot{x} = ax$.

Sie bilden einen 1-dim UVR. Legen wir
nämlich eine spezielle Stammfkt A_0

von a fest, so sind alle anderen durch

die Form $A(t) = A_0(t) + c$, $c \in K$

gegeben und

$$\begin{aligned} x(t) &= C e^{A(t)} = C e^{A_0(t) + c} \\ &= C e^c e^{A_0(t)} \end{aligned}$$

hat genau einen freien Parameter, nämlich

den Vorfaktor $C e^c \in K$.

22-5 Ander Lsg. gibt es nicht, denn:

Ist $q: I_0 \rightarrow \mathbb{K}$ bel. Lsg von $\dot{x} = a x$ insbes.
differenzierbar, so folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(q(t) e^{-A(t)} \right) = \underbrace{\left(\dot{q}(t) - q(t)a(t) \right)}_{=0 \text{ da Lsg. der DGL (2)}} e^{-A(t)} = 0$$

Also ist $q(t) e^{-A(t)}$ konstant in t , d.h.

$$q(t) e^{-A(t)} = C \Rightarrow q(t) = C e^{A(t)}$$

(b) (Nullstellen & Vorzeichen)

Fallunterscheidung für Lsg $x(t) = C e^{A(t)}$

$$C = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \text{ für alle } t \in I_0$$

$$C \neq 0 \Rightarrow x(t) \neq 0 \quad \text{---||---},$$

da $e^z \neq 0$ für sämtliche $z \in \mathbb{C}$.

Insbesondere hat Lsg x von (2) keine
Nichttrivialen Nullstellen.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt weiter

$$\boxed{22-6} \quad C > 0 \Rightarrow x(t) > 0 \text{ auf } I_0$$

$c < 0 \Rightarrow x < 0$ auf I_0

(c) (Anfangs wert)

Unter allen mögl. Lsg x von (2) wird eine eindeutig festgelegt durch die

Spezifikation eines Anfangs werts

$x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I_0$ und ein $x_0 \in \mathbb{K}$.

In der Tat ist

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(t) dt \right), \quad t \in I_0 \quad (3)$$

die eindeutige Lsg des Anfangs wert problems

(AWP)

$$\dot{x}(t) = a(t) x(t) \text{ auf } I_0, \quad x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

D.h. von einer allg. Stamm fkt A von a ,

gehen wir zu einer konkreten, nämlich

$$t \mapsto \int_{t_0}^t a(t) dt, \quad \text{über um den}$$

Anfangs wert (m. H.d. Vorfaktors x_0) anzupassen.

(d) Ist (die Wachstumsrate) $a = a_0 \in \mathbb{K}$

22-7 konstant, so ist sogar für $I = \mathbb{R}$

die allg. Lsg in (2) gegeben durch

$x(t) = (e^{t a_0})$ und die eind. Lsg. des
AWP (4) durch $x(t) = x_0 e^{(t-t_0)a_0}$.

(e) Bsp.

Das AWP $\dot{x}(t) = -2\alpha t x(t)$ auf $I = \mathbb{R}$
 $x(0) = x_0$ (5)

hat eind. Lsg $x(t) = x_0 e^{-\alpha t^2}$. Hier ist

$a(t) = \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$.

¿ Was ändert sich, falls wir zusätzlich
einen konstanten (von $x, \dot{x}$ unabh) Summanden
in der DGL zulassen?

D. 3.1.4 Sind $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,
 $a, b \in C(I, k)$, so heißt

$$\dot{x} = ax + b \quad \text{auf } I \quad (6)$$

In homogene lineare DGL 1. Ordnung

Um die Lsg-Menge von (6) besser zu verstehen,
22-8 | bemerken wir:

$$D: C^1(I, \mathbb{K}) \longrightarrow C(I, \mathbb{K})$$

$$x \longmapsto \dot{x} - ax$$

ist eine lineare Abbildung. Der Kern von D
 $\text{Kern}(D)$ ist nach 3.1.2 (a) 1-dimensional.

Erinnerung aus der Lin-A. 3.1.5

Sind E, F VR, $b \in F$ und $D: E \rightarrow F$ linear. Ist
 $x_s \in E$ ein (spezielles) Element von E mit
 $D x_s = b$, so ist der affine Unterraum
von E

$$x_s + \text{Kern}(D) = \{ x = x_s + x_0 \mid D x_0 = 0 \} \quad (7)$$

die Menge aller Lsg. der Gl. $Dx = b$.

Wir wissen bereits das der Lsg-Raum von der
homogenen DGL (2) eindimensional ist, d.h.

$$\text{Kern}(D) = \{ c \cdot e^{A(t)} \mid c \in \mathbb{K} \},$$

wobei wir die Stammfkt A von a bel. wählen
dürfen. Also müssen wir jetzt nur noch
22-9] eine spezielle Lsg. $x_s = x_s(t)$ der

DGL. (6) finden

Brob. 3.1.6 (Variation der Konstanten)

Um eine spez. Lsg. von (6) zu identifizieren machen wir den Ansatz

$$x_s(t) = c(t) e^{A(t)}, t \in I_0. \quad (8)$$

Einsetzen in (6) führt zur Gl:

$$\begin{aligned} a(t) c(t) e^{A(t)} + b(t) &= a(t) x_s(t) + b(t) = \dot{x}_s(t) \\ &= [\dot{c}(t) + c(t) a(t)] e^{A(t)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Rightarrow b(t) = \dot{c}(t) e^{A(t)} \Leftrightarrow \dot{c}(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

Woraus wir im Prinzip $c(\cdot)$ durch Integr. erhalten können.

Bsp. 3.1.7 (Logistisches Wachstum)

Ist in der DGL (2) $k = \mathbb{R}$ und $a(t) \geq a_0$, führt dies bei $c > 0$ zum exponentiellen oder schnellerem Wachstum der Population.

22-10 Im praktischen Bsp. tritt allerdings

eine Saturation / Sättigung bei einer Grenzpopulation $g > 0$ auf. Solche Effekte können durch die logistische DGL

$$\dot{x} = b(g-x)x =: ax - bx^2$$

mit konstanten $a, b, g > 0$. (10)

Lsg sind insbes:

$$x \equiv 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 = b(g-0)0 \quad \checkmark$$

$$x \equiv g \Rightarrow \dot{x} = 0 = b(g-g)g = 0 \quad \checkmark$$

Dies sind stationäre, d.h. von der Zeit unabh., Lsg.

Interessanter ist der zeitabh. Fall mit

$x(t) > 0$ für alle $t \in I$. Dann ist

$$y(t) = 1/x(t) \quad \text{---||---} \quad \text{wohldef und}$$

genügt der DGL:

(11)

$$\dot{y}(t) = -x^{-2}(t) \dot{x}(t) = -a x^{-1}(t) + b = -a y(t) + b$$

Die stat. Lsg $x(t) = g$ entspricht hier $y = \frac{1}{g} = \frac{b}{a}$

Nach 3.1.5 ist dann die allg. Lsg. von (11) geg. durch

22-11) $y(t) = \frac{1}{g} + C e^{-a \cdot t}$. Durch Rücktransforma-

tion erhalten wir die allgem. Darst. aller positiven Lsg von (10) als:

$$x(t) = \left(\frac{1}{g} + C e^{-at} \right)^{-1}, \quad C \geq 0.$$

Hier müssen wir die Vorzeichen bed. an C verlangen, damit $y(t)$ positiv bleibt und die Rücktransf. $x(t) = 1/y(t)$ legitim ist.

Bsp. 3.1.8 Bernoulli DGL

Eine Verallgem. von (10) ist die DGL

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha \quad \text{mit } \alpha > 0 \quad (13)$$

Setzen wir wieder voraus, dass x eine pos. Lsg. von (13) ist, ist $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$ wohldefiniert und löst die DGL

$$\dot{y}(t) = (1-\alpha) [a(t)y(t) + b(t)] \quad (14)$$

Diese ist linear und daher mit den bisher entw. Methoden behandelbar.

tion erhalten wir die allgem. Darst. aller positiven Lsg von (10) als:

$$x(t) = \left(\frac{1}{g} + C e^{-at} \right)^{-1}, \quad C \geq 0.$$

Hier müssen wir die Vorzeichen bed. an C verlangen, damit $y(t)$ positiv bleibt und die Rücktransf. $x(t) = 1/y(t)$ legitim ist.

Bsp. 3.1.8 Bernoulli DGL

18. Januar 23

Eine Verallgem. von (10) ist die DGL

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha \quad \text{mit } \alpha > 0 \quad (13)$$

Setzen wir wieder voraus, dass x eine pos. Lsg. von (13) ist, ist $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$ wohldefiniert und löst die DGL

$$\dot{y}(t) = (1-\alpha) [a(t)y(t) + b(t)] \quad (14)$$

Diese ist linear und daher mit den bisher entw. Methoden behandelbar.

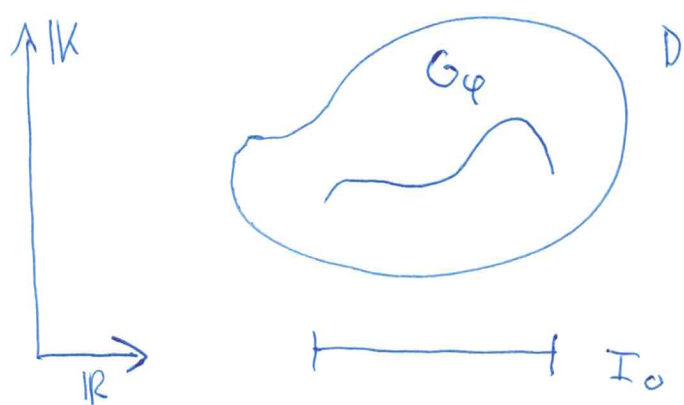
3.2 Differential gl. n mit getrennten Variablen

D.3.2.1 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ offen & $f \in C(D, \mathbb{K})$
& $I_0 \subset \mathbb{R}$ Intervall. Dann heißt

$$y' = f(x, y), \quad x \in I_0 \quad (1)$$

(explizite) Differentialgl. erster Ordnung und eine
diffbare Fkt $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Lösung von (1),
wenn $G_\varphi \subset D$ und und

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in I_0.$$



Bm 3.2.2

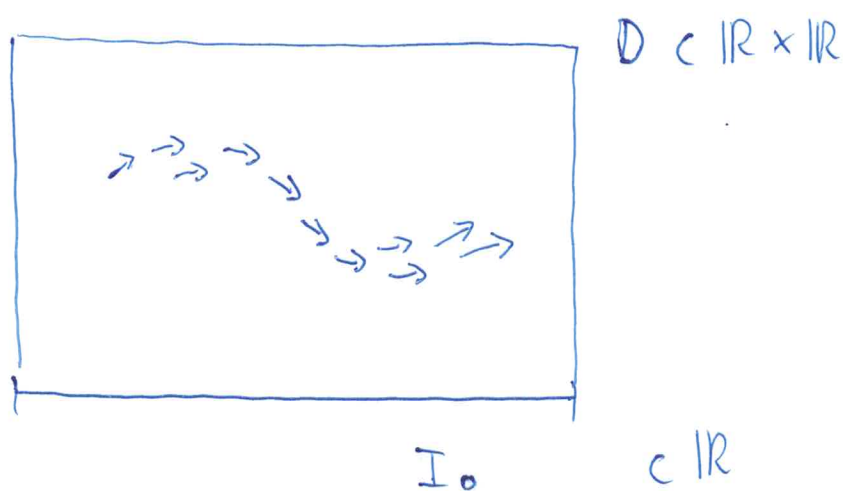
(a) Für eine Lsg φ von (1) ist

$x \mapsto y'(x) = f(x, \varphi(x))$ stetig nach Ann

23-2 an f , also $\varphi \in C^1(I_0, \mathbb{K})$

(b) Ist $K = \mathbb{R}$ kann f geometrisch als ein Richtungsfeld interpretiert werden, dass für jeden Punkt (x, y)

die Gerade durch (x, y) mit Steigung $f(x, y)$ bzw. den Vektor $(1, f(x, y))$ mit Basispunkt (x, y) zuordnet



Die Tangenten an den Graphen einer Lsg φ von (1) stimmen dann in jedem Punkt (x, y) mit der im Bild vorgeg. Gerade überein.

Methode 3.2.3 (Symbolische / Formale Lösung)

(a) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(I, \mathbb{R})$, $g \in C(J, \mathbb{R})$. Hat die Dgl (1) speziell die

Form
$$y' = f(x) g(y) \quad , x \in I \quad (2)$$

Sprechen wir von einer Dgl 1. Ord. mit
getrennten Variablen.

Ist $y_0 \in J$ mit $g(y_0) = 0$, so ist

$\varphi(x) = y_0$ eine Lsg. von (2), die zeitunabh.,
d.h. stationär ist.

b) Gilt $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$, so können

wir $\frac{dy}{dx} = f(x) g(y)$ symbolisch um zu

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad (3)$$

Integration ergibt

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad (4)$$

Ist G eine Stammfkt von $\frac{1}{g}$ und $F \in C^1(I)$
 $\in C^1(J)$

eine von f , so entspricht (4) der impliziten

Ggl. $G(\varphi(x)) = F(x) + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ (5)

23-4 für eine Lsg $\varphi \in C^1(I)$ von (2).

Die entsprechende rigorose mathematische Aussage ist:

S. 3.2.4 Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g \in C(J)$, $f \in C(I)$ mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Zu jedem $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ gibt es ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$ so dass das AWP

$$y'(x) = f(x) g(y(x)), \text{ auf } x \in I_0 \quad (6)$$

$$y(x_0) = y_0$$

genau eine Lsg. $\varphi \in C^1(I_0)$ hat. Setzen

Wir $G(y) := \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)}$ und

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

so ist diese Lsg gegeben durch

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x)) \text{ für } x \in I_0 \quad (7).$$

Bsp. 3.2.5

(a) Sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$ und

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{d.h.} \quad f(x) = -x, \quad g(y) = \frac{1}{y} > 0 \quad (8)$$

Dann ist $G(y) = \int_{y_0}^y s \, ds = \frac{1}{2} s^2 \Big|_{y_0}^y = \frac{1}{2} (y^2 - y_0^2)$

Mit der „symbolischen Methode“ aus 3.2.3 ergibt sich

$$y \, dy = -x \, dx$$

Ist $x_0 = 0$ und $y_0 > 0$, so folgt

$$\frac{1}{2} (y^2 - y_0^2) = -\frac{x^2}{2} \quad \text{bzw.} \quad y^2 = y_0^2 - x^2$$

und somit $\varphi(x) = y = \sqrt{y_0^2 - x^2}$ auf $I_0 = (-y_0, y_0)$.

Dort ist ja $y_0^2 - (x)^2 > y_0^2 - y_0^2 = 0$

(b)

Wir sehen also, dass das Intervall I_0 auf

dem die Lsg φ definiert ist, von dem

Anfangswert abhängen kann.

Bsp. 3.2.6 Die Dgl.

$$y' = \sqrt{|y|} \quad (x, y(x)) \in G_y \subset D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (g)$$

besitzt offensichtlich die stationäre Lsg $y \equiv 0$.

Im Folgenden interessieren wir uns insbesondere für Defn-Bereiche von Lsg φ von (g).

(a) Verlangen wir $y > 0$, d.h. $D \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$,
so kann man (g) symbolisch umformen zu

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx, \text{ was nach Integration zu}$$

$$\underbrace{2\sqrt{y}}_{> 0} = x + C \quad \text{führt mit der Bedingung von oben. Also ist eine Lsg.}$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2 \quad \text{für } x \in I_C := (-C, \infty),$$

wobei letzte Bedingung $x+C > 0$ garantiert

Analog gilt für $y < 0$, d.h. $D \subset \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$

$$\boxed{23-7} \quad \frac{dy}{\sqrt{-y}} = dx \Rightarrow -2\sqrt{-y} = x + C < 0$$

mit Lsg.

$$\varphi(x) = - \left(\frac{x+c}{2} \right)^2 \quad \text{für } \tilde{I}_c := (-\infty, c)$$

(b) Sind $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ gegeben, so ist

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-b}{2} \right)^2 & x > b \\ 0 & a \leq x \leq b \\ - \left(\frac{a-x}{2} \right)^2 & x < a \end{cases} \quad (10)$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lsg. von (9).

Beachte, dass $\varphi_{a,b}$ und $\varphi'_{a,b}$ (auch) in $x \in \{a,b\}$ stetig sind, insbes. $\varphi_{a,b} \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\text{Test: } \varphi'_{a,b}(x) = 2 \cdot \frac{x-b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x-b}{2} = \sqrt{|\varphi_{a,b}(x)|}$$

für $x \in (b, \infty)$.

c) Damit können wir für das AWP

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = y_0. \quad (11)$$

Folgerm:

① Fall: $y_0 \neq 0$. und $I = \mathbb{R}$

23-8 Setze dann $\varepsilon := |y_0| > 0$ und $J = B_\varepsilon(y_0)$

Dann $0 \notin J$ und $g(y) = \sqrt{|y|} \neq 0$ auf J &
 $0 \in I = \mathbb{R}$. $f \equiv 1$. Nach Satz 3.2.4 besitzt
(11) auf einem Intervall $I_0 \ni 0$ eine eind.
Lsg $\varphi \in C^1(I_0)$ besitzt.

② Fall $y_0 = 0$, also $g(y_0) = \sqrt{y_0} = 0$.

Dann kann man 3.2.4 auf kein Intervall
 J , das y_0 enth. anwenden.

Offensichtlich ist

$\varphi(x) \equiv 0$ eine Lsg. von (11) mit $y_0 = 0$,
sogar auf ganz $\mathbb{R}$.

Aber auch

$$\varphi_{0,0}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 & x \geq 0 \\ -\left(\frac{x}{2}\right)^2 & x < 0 \end{cases}$$

ist eine Lsg. von (11) mit $y_0 = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Die Eindeutigkeit der Lsg (die S. 4 garantierte)
gilt hier tatsächlich nicht.

Bsp. 3.2.7.

a) Seien $f(x) = \sin x$ und $g(y) = e^y$ Fkt
auf $I = J = \mathbb{R}$. Die DGL.

$$y' = f(x) \quad g(y) = e^y \sin x \quad (12)$$

genügt S. 3.2.4.: $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$,

also hat das AWP

$$y' = e^y \sin x, \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lsg. auf einem Umgebung Intervall
 I_0 von x_0 . Symbol. Umformung ergibt

$$e^{-y} dy = \sin x dx$$

und Integration

$$0 < e^{-y} = \cos x + C$$

Einsetzen der Anfangsbed $y(0) = y_0$ ergibt

$$e^{-y_0} = e^{-y(0)} = \cos 0 + C = 1 + C$$

Also $C = e^{-y_0} - 1 > -1$, was zur Lsg.

$$\boxed{23-10} \quad \varphi(x) = -\ln(\cos x + e^{-y_0} - 1), \quad x \in I_0 \equiv I(y_0)$$

führt

b) Wie groß das Existenzintervall $I_0(y_0)$ der Lsg ist, hängt vom AW y_0 ab.

① Ist $y_0 < -\ln 2$, also $C = e^{-y_0} - 1 > 1$,
so ist $\cos x + C > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Demnach existiert φ auf ganz $\mathbb{R} = I_0(y_0)$ ist dort C^∞ und 2π -periodisch.

18. Januar

② Ist $y_0 = -\ln 2$, also $C = e^{-y_0} - 1 = 1$

so ist $\cos x + C$ auf $(-\pi, \pi)$ aber nicht darüber hinaus. Die Lsg

$$\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\ln(\cos x + 1)$$

divergiert in den Randpunkten $\lim_{x \rightarrow \pm\pi} \varphi(x) = +\infty$.

③ Ist $y_0 \in (-\ln 2, \infty)$, also $C = e^{-y_0} - 1 < 1$

genauer $C \in (-1, 1)$, so ist φ nur auf einem (kleinen) Umgeb U von $x=0$ definiert,

genauer für $|x| < \arccos(c)$. Dieses
 Intervall schließt sich zum Punkt 0 zusammen
 für $y_0 \rightarrow \infty$ $x < \arccos(c)$ & $-x < \arccos(c)$
 $\cos x > c$ & $\cos(-x) > \arccos(c)$

Beob 3.2.8 Transformations / Substitutionsmeth.

Ähnlich wie Integrale kann man DGLs
 berechnen / lösen mittels Substitution.

(a) Die DGL

$$y' = f(ax + by + c) \quad (14)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall,

wird mit $u(x) := ax + by(x) + c$

transformiert in:

$$u' = a + by'(x) = a + bf(u) \quad (15)$$

(b)

Für die DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (16)$$

führt Substitution $u(x) = y(x)/x$ zu

$$24-1 \quad u' = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x} - u(x) \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (f(u) - u)$$

§ 3.3 D Gl. der klassischen Mechanik

Betrachte ein Zeitintervall $I \subset \mathbb{R}$,
 $x: I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$, J Intervall, beschreibt
den Ort / die Lage $x(t)$ eines Masse-
punktes mit Masse $m > 0$.

Bm 3.3.1 Bewegungsgl. & Energieerh.

Wirkt auf Massepunkt ein Kraft-
feld $F \in C(J, \mathbb{R})$ so gilt nach
Newton die Bewegungsgl

$$m \ddot{x} = F(x) \quad (1)$$

Führen wir nun eine zweite Koordinate
 $y = m \dot{x}$ ein, so können wir (1)
umschreiben in ein System (von
D Gl.) 1. Ordnung

$$\dot{x} = \frac{1}{m} y, \quad \dot{y} = F(x) \quad (2)$$

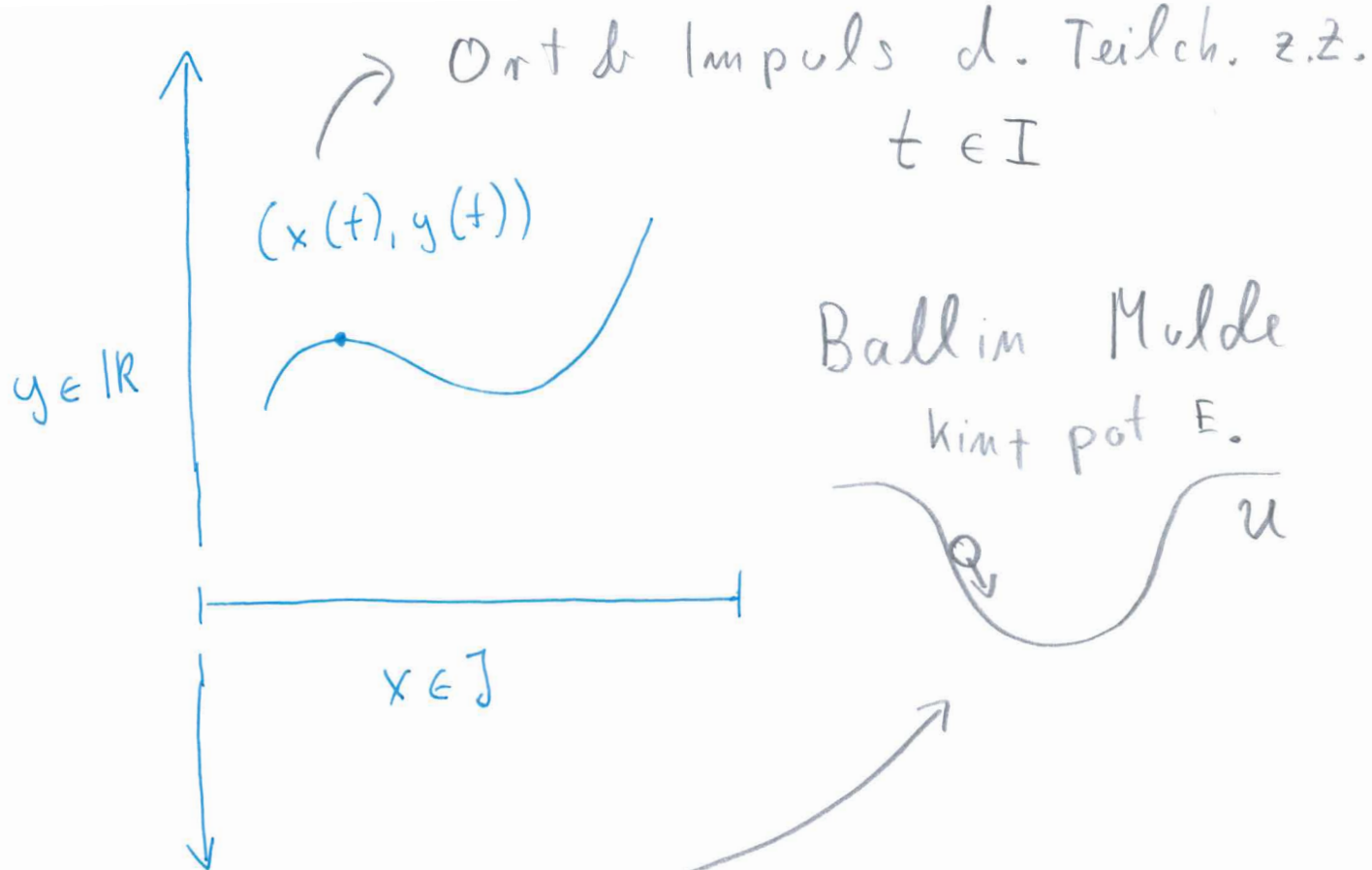
Das System ist gekoppelt, denn $\dot{x}$ hängt von y ab und $\dot{y}$ von $\dot{x}$.

In der Tat ist y nicht nur eine symbolische Variable, sondern ist der Impuls des Massepunktes zum Zeitpunkt t . $y(t) = m \dot{x}(t)$

Da die Masse m konstant ist, ist der Impuls y des Teilchens proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$.

Wir haben also Lage & Impuls des Teilch. mit der Zeit parametrisiert.

Die Bahnkurven / Trajektorien von Lsg. von (2) in der $x-y$ -Ebene $\gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (Phasenraum) bilden das Phasenportrait von (2), bzw (1).



Sei nun $U = -\int F + C$ eine
 Stammfkt. von $-F$, als Potential
 bezeichnet. Dann ist

$$E(x(t), \dot{x}(t)) := \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + U(x(t)) \quad (3)$$

die
 Energie = kinetische E. + potentielle E.

eines Massepunktes, das sich z.z. $t \in I$ in
 $x(t) \in J$ befindet mit Geschw $\dot{x}(t)$. Wir
 sehen, dass die Energie (3) nicht ex-

24-4 plizit von der Zeit abhängt,

somit, dass ich die Energie

$$E\left(x, \frac{y}{m}\right) = \frac{1}{2m} y^2 + U(x)$$

$= E(x, v) = \frac{m}{2} v^2 + U(x)$
schon komme, sobald Ort x und
Impuls y/v des Teilchens (nicht aber
notw.weise t) bekannt sind.

Ist $\varphi: I \rightarrow J$ eine Lsg $x = \varphi$ von (2),
so folgt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\varphi}^2(t) + U(\varphi(t)) \right) \\ &= m \dot{\varphi}(t) \ddot{\varphi}(t) + U'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ (2) \quad & m \dot{\varphi}(t) \frac{F(\varphi(t))}{m} - F(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = 0 \end{aligned}$$

also ist die Energie konstant entlang
vom
24-5 (Bahnkurven von) Lsg φ von (2).

⊗ Fazit:

Die Trajektorie $\{ (x, y) = (\varphi(t), \underbrace{\dot{\varphi}(t)}_{\dot{\varphi}(t)}) \in J \times \mathbb{R} \mid t \in I \}$

einer Lsg $\varphi: I \rightarrow J \times \mathbb{R}$

ist in einer Niveau-Menge der

Energie fkt. $E: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{ (x, y) \mid E(x, \frac{y}{m}) = E_0 \} \leftarrow$$

enthalten.

Für eine Lsg φ gilt stets:

$$U(\varphi(t)) \leq U(\varphi(t)) + \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\varphi}(t)^2}_{\geq 0} = E(\varphi, \dot{\varphi})(t) = E_0$$

somit ist

$$\sqrt{E_0 - U(\varphi(t))}$$

wohldef. & nicht-negativ.

Bezeichnen wir den konstanten Wert mit $E_0 \in \mathbb{R}$, folgt also

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = E_0 \quad t \in I \quad (3a)$$

für eine Lsg. $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ von (2). $\otimes$

Damit wollen wir nun das Anfangswertproblem mittels der symbolischen Methode der separation d. Variablen lösen:

Bm 3.3.2 AWP d. Bewegungsgl.

Die Energie E_0 in (3a) wird durch die beiden Anfangswerte

$x(\tau) = x_0$ für den Ort zum Zeitpunkt

& $\dot{x}(\tau) = v_0$ für Geschwindigkeit $\tau \in I$

festgelegt:

$$E(x, \frac{y}{m}) = E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + U(x_0) \quad (4)$$

Wegen $D_x E(x, v) = U'(x) = -F(x)$

und $D_v E(x, v) = \frac{m}{2} 2 v \dot{v} = y \dot{y} \frac{1}{m}$

sind AW $(x_0, y_0) = (x_0, m v_0) \in \{(x, 0) \in \mathbb{J} \times \mathbb{R} \mid U'(x) = -F(x) = 0\}$

stationäre Punkte der Energie $E: \mathbb{J} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

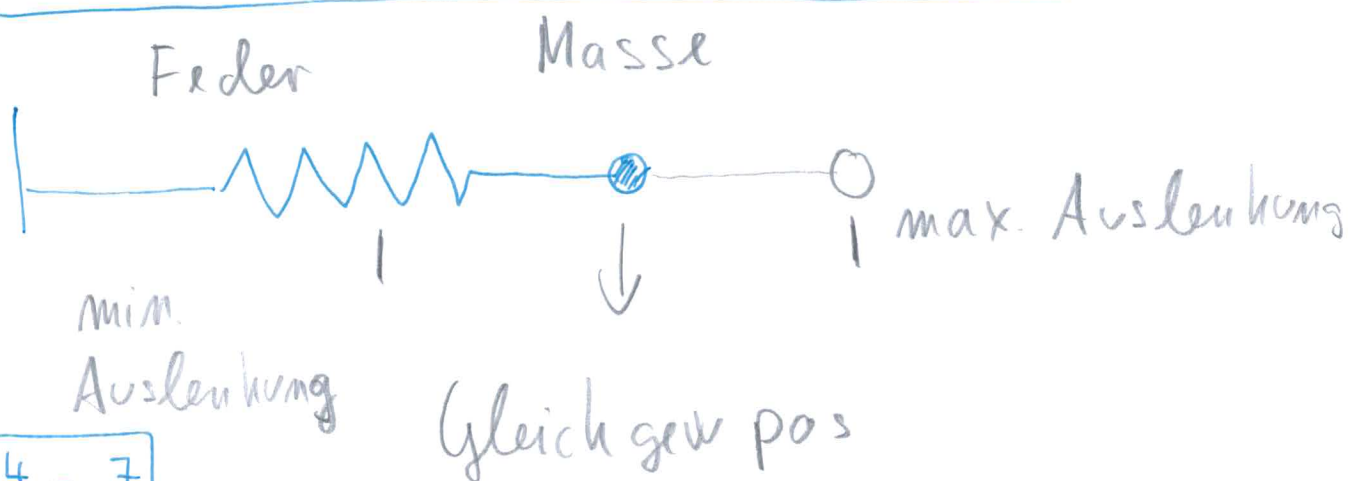
Dies sind Ruhelagen der Bew.-Gln., denn

$$\dot{x} = \frac{1}{m} y = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y} = F(x) = 0$$

$\Rightarrow$ Ableitung von $t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$ ist Null.
 — || ——— konstant.

$\Rightarrow$

Bsp. Schwingende Feder



Bei kleinen Auslenkungen gilt näherungs-
weise das Hookesche Gesetz

$$F(x) = -kx$$

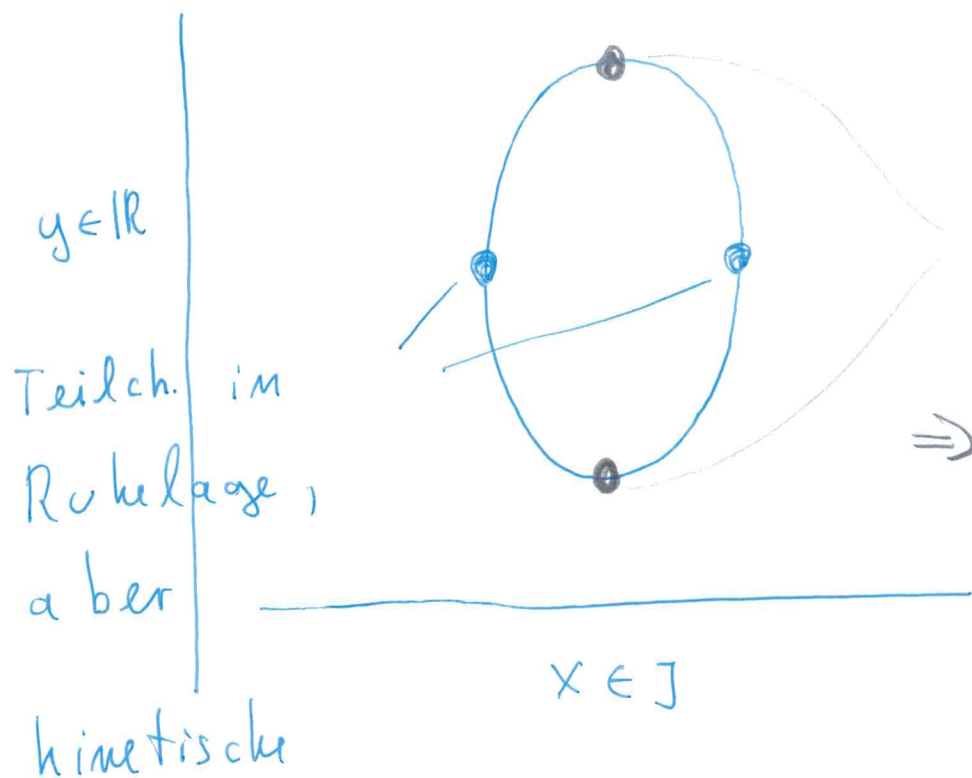
also $U(x) = \frac{k}{2} x^2$ und die Niveaumengen

$$\{E_0 = \frac{1}{2m} y^2 + \frac{k}{2} x^2\}$$

sind Ellipsen im Phasenraum (für $E_0 > 0$). Für E_0 besteht die Niveaumenge aus dem Punkt $(x, y) = (0, 0)$
 $\in \{ (x, 0) \mid 0 = -F(x) = kx \}$, dem einzigen stationären Punkt der Energie.

Klar: Auslenkung = 0 $\Rightarrow$ Ruhe
Geschw = 0

Für $E_0 > 0$ betrachte Scheitelpunkte der Ellipse



kinetische $E. = 0$
Auslenkung max.
 $\Rightarrow$ pot. $E.$ max.

Energie ist maximal.

Betrachte wie der allg. F. Wegen
 $U(x(t)) \leq E_0$ ist (3) äquivalent zu:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))} = \pm g(x) \quad (5)$$

also einer Dgl. mit getrennten Variablen.

Setzen wir für d. AW

$\dot{x}(t) = v_0 > 0$ voraus, so folgt

für $x(t) = x_0$; $U(x_0) < E_0$

24-9) und in (5) haben wir $\oplus$ Vorzeichen.

make bei t.
Zumindest für t

Also ist $g(x_0) \neq 0$ und wg.

Stetigkeit ex. Umgebungsintervall

$I_0 \ni x_0$ mit $g(x) \neq 0$ auf I_0

Aus S. 3.2.4 folgt, dass es $I_0 \subset I$

mit $\tau \in I_0$ gibt, und eine endl.

Lsg. $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ von (5) mit AW (x_0, v_0) .

Für diese gilt wegen

$$dt = \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))} dx$$

$$\Rightarrow t - \tau = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(s))}} \quad (6)$$

Im Fall $v_0 < 0$ ist in einer Umgebung von τ das Vorzeichen in (5) geg. durch

$$\dot{x} = - \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))},$$

was man analog zu $v_0 > 0$ behandeln kann.

Bsp. 3.3.3

Flug einer Rakete

a) Rakete wird mit Geschw $v_0 > 0$ vom Punkt auf Erdoberfl. nach oben geschossen. Sei

$x(t) > 0$ Höhe über bzw
Abstand zu Erdmittelp.

Newtons Gravitationsgesetz:

$$F(x) = - \gamma \frac{M \cdot m}{x^2}$$

wobei: $m > 0$ Masse der Rakete

$M > 0$ Erde

$\gamma > 0$ universelle Gravitations-
konstante

23. Jan 2023

Dies führt zu AWP

$$m \ddot{x} = - \gamma \frac{M m}{x^2}, \quad x(0) = R, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (7)$$

wobei $R > 0$ der Erdradius ist.

Bsp. 3.3.3

Flug einer Rakete

a) Rakete wird mit Geschw $v_0 > 0$ vom Punkt auf Erdoberfl. nach oben geschossen. Sei

$x(t) > 0$ Höhe über bzw.
Abstand zu Erdmittelp.

Newtons Gravitationsgesetz:

$$F(x) = - \gamma \frac{M \cdot m}{x^2}$$

wobei: $m > 0$ Masse der Rakete

$M > 0$ Erde

$\gamma > 0$ universelle Gravitationskonstante

23. Jan 2023

Dies führt zu AWP

$$m \ddot{x} = - \gamma \frac{M m}{x^2}, \quad x(0) = R, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (7)$$

wobei $R > 0$ der Erdradius ist.

b) Damit ist das Gravitationspot

$$U(x) = -\gamma \frac{Mm}{x}$$

was auf Energie gl.

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \gamma \frac{Mm}{x} \quad (8)$$

führt. Ist für $t \rightarrow \infty$ die Ortskoord.

$x(t)$ unbeschränkt, so

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma \frac{Mm}{x(t)} = -E + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 \geq -E$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$

also $E \geq 0$.

Gibt es dagegen eine Höhe H mit

$$R \leq x(t) \leq H \quad \text{für alle } t \geq 0$$

so

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E + \gamma \frac{Mm}{x} \geq E + \gamma \frac{Mm}{H} > E$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=: c > 0}$

Wäre $E \geq 0$ so

$$\dot{x}(t)^2 \geq \frac{2}{m} c > 0 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

Da $v_0 > 0$ und $\dot{x}$ stetig, folgt

$$\int_0^T \dot{x}(t) \geq T \sqrt{2\epsilon/m} > 0$$

$\Rightarrow x(t)$ wächst unbeschränkt $\Rightarrow \downarrow$

Also ist $E < 0$ in diesem Fall.

c) Also ist $E = 0$ die minimale Energie, bei der $x(t)$ unbeschr. sein kann. Dies ergibt:

$$\frac{M}{2} v_0^2 = \gamma \frac{Mm}{R}$$

Die entspr. Geschw

$$v_F := \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \sim 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (9)$$

ist die sog. Fluchtgeschwindigkeit.

d) Für $v_0 = v_F$, d.h. $E = 0$, wird (6) zu

$$t = \int_R^{\varphi(t)} \left(\frac{2\gamma M}{s} \right)^{-1/2} ds = [2\gamma M]^{-1/2} \int_R^{\varphi(t)} \sqrt{s} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2gM}} \frac{2}{3} \left(\varphi(t)^{3/2} - R^{3/2} \right)$$

Umstellen ergibt die Lsg

$$\varphi(t) = \left[R^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{2gM} t \right]^{2/3} \quad (10)$$

$$= R \left[1 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2gM}{R}} \frac{1}{R} t \right]^{2/3}$$

$$= R \left[1 + \frac{3}{2} \frac{v_F}{R} t \right]^{2/3}$$

die tatsächlich isoton und unbeschränkt wächst.

Bsp. 3.3.4 AWP aus 3.3.2 mit $v_0 = 0$

Betrachte Dgl. (1) mit $x(\tau) = x_0$

$$\dot{x}(\tau) = v_0 = 0$$

$\Rightarrow$ kinetische Energie = 0 im Zeitp. $t = \tau$.

$$\Rightarrow E_0 = U(x_0)$$

25-3] Dann hat Dgl. (5): $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U)}$

insbesondere die stationäre Lsg

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(t) = x_0$$

Allerdings ist die Dgl. (5) nicht äquivalent zur Dgl. (1), weil ja $v_0 \neq 0$ verletzt ist.

Fall (1): $F(x_0) = 0$, also ist (1)

m $\ddot{x} = F(x)$ ebenfalls für $\varphi \equiv x_0$ erfüllt.

Fall (2) $0 < F(x_0) = -U'(x_0)$

Stetigkeit $\Rightarrow -U' > 0$ auf $[x_0, x_1]$

für $x_1 - x_0$ klein genug

$$\Rightarrow E_0 - U(x) > E_0 - U(x_0) = 0 \text{ auf } (x_0, x_1]$$

da dort streng isotom $\uparrow$

Wollen nun (5) dort lösen. Da

$U \in C^1(J_0)$ gilt $S = \{$

$$25-4 \quad 0 \leq E - U(s) = -U'(x_0)(s - x_0) + o(s - x_0)$$

$$\gg \underbrace{-\frac{1}{2} U'(x_0)}_{>0} \underbrace{(s-x_0)}_{>0} \quad \text{auf } (x_0, x_0+\varepsilon)$$

Also existiert das uneigentl. Riemann-Integral

$$G(x) := \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(s))}^{-1} ds$$

$$\leq \left(\frac{-U'(x_0)}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{s}} ds}_{\text{integrierbare Singularität}} + \underbrace{\int_{x_0+\varepsilon}^x \left(2 \frac{E - U(s)}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} ds}_{\text{beschr.}}$$

integrierbare
Singularität

Integrand stets positiv $\Rightarrow x \mapsto G(x)$

ist streng isoton $\wedge$ stetig $\Rightarrow$ invert.

Setze: $\tau_1 := G(x_1)$ sowie

$$\varphi: [\tau - \tau_1, \tau + \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} G^{-1}(t - \tau), & t \in [\tau, \tau + \tau_1] \\ G^{-1}(\tau - t) & [\tau - \tau_1, \tau] \end{cases}$$

$\overline{25-5} \Rightarrow \varphi$ ist wohldef in $t=\tau$ und stetig.

$$0 = G(x) = \int_{x_0}^x \dots \quad \text{impliziert } x = x_0,$$

da Integrand stets > 0 . Also

$$G^{-1}(\tau - \tau) = G^{-1}(0) = x_0$$

Auf $(\tau, \tau + \tau_1)$ ist φ streng isoton
 $(\tau - \tau_1, \tau)$ antiton

G auf $[x_0, x_1]$ streng isoton & stet.

$\Rightarrow G^{-1}$ ebenfalls.

Für $a \in (x_0, x_1)$ ist

$$G'(a) = \left(\frac{2}{m} \underbrace{(E - U(a))}_{> 0} \right)^{-1/2} > 0$$

Kettenregel bzw. Abl-Regel f. Inverse $\Rightarrow$

G^{-1} ist diffbar in $G(a)$ und

$$(G^{-1})'(G(a)) = \frac{1}{G'(a)} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(a))}$$

2 5 - 6] Damit folgt für $t \in (\tau - \tau_1, \tau + \tau_1) \setminus \{\tau\}$

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \frac{1}{G(G^{-1}(\pm(t-\tau)))}$$

$$= \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right) \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(\varphi(t)))}$$

$$\parallel \text{sign}(t-\tau)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \cancel{\pm \frac{1}{2} \left(\frac{2}{m} (E - U(\varphi(t))) \right)^{-1/2}}$$

$$\cancel{\frac{2}{m} F(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)}$$

$$= \frac{1}{m} F(\varphi(t))$$

Also löst φ auf $(\tau-\tau_1, \tau) \cup (\tau, \tau+\tau_1)$ sowohl (5) als auch (1). Da beide Seiten der Gl. stetig sind, gelten sie auch auf $(\tau-\tau_1, \tau+\tau_1)$.

φ ist symmetrisch um $t=\tau$ und hat dort Minimum $\varphi(\tau) = G^{-1}(0) = x_0$.

25-7 Fall (3) $F(x_0) < 0$ analog.

Bsp. 3.3.5

a) Starres ebenes Pendel

der Länge $l > 0$ in einem Gravitationsfeld der Stärke $g > 0$. Der Auslenkungswinkel x erfüllt die Dgl.

$$m l \ddot{x} = -m g \sin x$$

wobei $m > 0$ die Masse des Pendelendes (Punktteilchen), der Faden ist masse los. Setzt man $\omega^2 := \frac{g}{l} > 0$ ergibt sich

$$m \ddot{x} = -m \omega^2 \sin x \quad (11)$$

b) Setzt man voraus, dass die Auslenkung klein ist, wird (11) wegen $\sin x \sim x$ für $|x| \ll 1$, näherungsweise durch die linearisierte Dgl.

$$m \ddot{x} = -m \omega^2 x \quad (12)$$

beschrieben. Das zugeh. Potential ist

25-8

$$U(x) = \frac{m}{2} \omega^2 x^2, \text{ ähnlich wie}$$

beim Hookeschen Gesetz. Ist die Anf. Bed.
gegeben durch

$$x(0) = -A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{für ein } A \in (0, \pi) \quad (13)$$

so ergibt sich für die Energie $E_0 = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$

und aus 3.3.2(6) folgt

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\xi}{A} \Big|_{-A}^{\varphi(t)}$$

$$= \int_{x_0}^{\varphi(t)} d\xi \left(\frac{2}{m} (E_0 - U(\xi)) \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\omega} \left(\arcsin \frac{\varphi(t)}{A} - \overbrace{\arcsin \frac{-A}{A}}^{-\pi/2} \right)$$

$$\text{da } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

und damit

$$\varphi(t) = A \sin \left((\omega t) - \frac{\pi}{2} \right) = -A \cos(\omega t)$$

$$= -A \cos(\omega t)$$

als Lsg. des AWP (12) mit (13). Die Periode
der Schwingung ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und hängt

25 - g nicht vom Wert A ab.

Für den Impuls gilt

30. Jan

$y(t) = m \ddot{\varphi}(t) = \omega A m \sin(\omega t)$, also
sind die Trajektorien im Phasenraum
wieder Ellipsen wie beim Hookeschen
Gesetz.

Bsp. 3.3.6 (Echte Pendelschwingung)

Ohne die Näherung $\sin x \sim x$ erhält
man

$$U(x) = -m \omega^2 \cos x \quad (15)$$

als Potential zur Kraft in Gl. (11).

Für AW $x(0) = -A$, $\dot{x}(0) = 0$

ergibt sich Energie $E_0 = -m \omega^2 \cos A$

und nach 3.3.2 (6)

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{\varphi(t)} d\xi \frac{1}{\sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos A}} \quad (16)$$

Substitution $\sin \eta := \frac{1}{h} \sin \frac{\xi}{2}$

Abkürzung $h = \sin \frac{A}{2}$ und

$a(t) := \arcsin \left(\frac{1}{h} \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right)$ führen zu

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a(t)} d\eta \left(1 - h^2 \sin^2 \eta \right)^{-1/2} \quad (17)$$

Dieses Integral kann man nicht elem. ausrechnen ist aber bekannt als elliptisches Integral 1. Art zum Modul h .

Setzt man $u(x, h) := \int_0^x dt \left[(1-t^2)(1-h^2 t^2) \right]^{-1/2}$

für $|x| \leq 1$, so ist

$$u(\cdot, h) : [-h, h] \rightarrow [-u(1, h), u(1, h)]$$

isoton & bijektiv mit Umkehrabb.

$$\sin(\cdot, h)$$



Die Lsg des AWP $\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$, $x(0) = -A$
ist $\dot{x}(0) = 0$

$$\varphi(t) = 2 \arcsin \left[h \sin(\omega t - u(1, h), h) \right] \quad (21)$$

Diese ist periodisch mit Periode

$$T = \frac{4}{\omega} u(1, h), \quad h = \sin \frac{A}{2}$$

Bsp. 3.3.7 Erzwungene Schwingung.
linearisierte Schw. $\sin x \sim x$

a) Die allg. Lsg. von (12) ist

$$\varphi(t) = B \sin \omega t - A \cos \omega t, \quad (22)$$

für bel. Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$

Wird das Pendel durch eine äußere Kraft $m F(t)$ „angetrieben“ erhält man die inhomogene Dgl.

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = F(t) \quad (23)$$

m rausgehört.

Ist $F(t) = M \cos \alpha t$ periodisch

bietet sich der Ansatz $x(t) = C \cos \alpha t$

26-2 an und führt auf

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (-\alpha^2 (+\omega^2 C)) \cos \alpha t$$

$$\stackrel{!}{=} M \cos \alpha t$$

also $C = M (\omega^2 - \alpha^2)^{-1}$ sofern $\alpha \neq \omega$

Im diesem Fall ist eine spezielle Lsg. gefunden und die allg. Lsg. nach

3.1.4 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = B \sin \omega t - A \cos \omega t + \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} \cos \alpha t$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$.

b) Speziell für $B = 0$, $A = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2}$

erhält man die Lsg zu (23)

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} [\cos \alpha t - \cos \omega t]$$

Nun modifizieren wir die äußere Kraft
 $m F(t) = m M \cos(\alpha t)$ $\uparrow$ Frequenz der
 stetig, so dass $\alpha \rightarrow \omega$.

26-3 | Was passiert (im Fall $\omega \neq 0$)?

Wegen

$$\cos \alpha t - \cos \omega t \longrightarrow 0 \quad \text{und}$$

$$\omega^2 - \alpha^2 \longrightarrow 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow \omega$$

können wir die Regel von L'Hospital anwenden

$$\varphi_{\omega}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \omega} \varphi_{\alpha}(t) = \frac{-M t \sin \alpha t}{-2 \alpha} \Big|_{\alpha = \omega}$$

$$= \frac{M}{2\omega} t \sin \omega t$$

Test: Einsetzen in (23):

$$\frac{M}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)' + \frac{M}{2} \frac{\omega^2}{\omega} t \sin \omega t$$

$$= \frac{M}{2} (\cos \omega t + \cos \omega t - \omega t \sin \omega t + \omega t \sin \omega t)$$

$$= M \cos \omega t = F(t)$$

Beachte: In diesem Resonanz-Fall, bei dem die äußere Anregung genau die Eigen-

Frequenz ω des Pendels trifft, wächst die Lsg mit der Zeit unbeschränkt an.

Dann wird allerdings die Auslenkung so groß, dass (23) die Schwingung d. Pendels nicht mehr korrekt beschreibt da $\sin x \neq x$ für große x .

Tatsächlich beobachten wir in d. R. dass die Auslenkung kleiner wird.

Bsp. 3.3.8

a) Dieser Effekt kommt vom Reibungsterm $2g\dot{x}$ mit $g > 0$ in der lin. Dgl.

$$\ddot{x} + 2g\dot{x} + \omega^2 x = F(t) \quad (26)$$

die (23) verallgemeinert.

Für die entsp. homogene Gl.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (26a)$$

machen wir den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t} \neq 0$
mit noch zu bestimmenden $\lambda \in \mathbb{C}$. Den
Term $e^{\lambda t}$ dürfen wir kürzen und erhalten

$$\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega^2 = 0$$

mit Lsgen

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

b) Falls $\gamma > \omega$ sind $\lambda_{+}, \lambda_{-} \in \mathbb{R}$

und wegen $\omega^2 > 0$ also $\gamma^2 - \omega^2 < \gamma^2$

beide negativ. Es ergeben sich expom.

abfallende Lsg $A, B \in \mathbb{C}$ math mögl.

$$\varphi(t) = A e^{\lambda_{+} t} + B e^{\lambda_{-} t} \quad \text{für } \gamma > \omega \quad (28)$$

bzw im Spezialfall $\gamma = \omega$

$$\varphi(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t} \quad (29)$$

26-6 | ähnlich wie im Resonanzfall in 3.3.7.

[Teste durch einsetzen in (26) mit $F \equiv 0$].

Fazit: Ist der Reibungsterm, so groß dass $\gamma \geq \omega$ erzeugt er eine so starke Dämpfung, dass keine Schwingung mehr stattfindet. Im Grenzfall $\gamma = \omega$ ist das Abklingen ein klein wenig wg. des Faktors t , verlangsamt, aber immer noch i.w. exponentiell.

c) Was passiert bei schwächerer Dämpfung, für $\gamma \in (0, \omega)$?

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\sigma, \quad \sigma = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

Einsetzen in (28):

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A e^{-\gamma t} e^{i\sigma t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\sigma t} \\ &= e^{-\gamma t} \left[\underbrace{(A-B)}_{=C} i \sin \sigma t + \underbrace{(A+B)}_D \cos \sigma t \right] \end{aligned} \quad (30)$$

26-7 Für $C, D \in \mathbb{R}$ erhalten wir

eine reelle Lsg der homogenen Dgl. (26a),
die eine gedämpfte Schwingung beschreibt.

Tatsächlich ist der Lsg. Raum der
hom. Gl. 2-dimensional (2 Freiheits-
grade: $x(0)$ und $\dot{x}(0)$), so dass wir
schon die allgem. Lsg-en beschreiben
haben

d) Betrachten wir wieder die inhomogen
Dgl. (26), speziell mit period.

äußerer Kraft $F(t) = M e^{i\alpha t}$ für
 M & α positiv. Es bietet sich der
Ansatz $x(t) = C e^{i\alpha t}$ an

und führt auf die Gl.

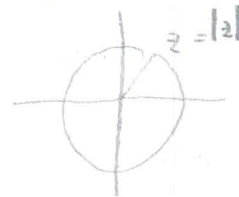
$$M e^{i\alpha t} = F(t) = \ddot{x} + 2g\dot{x} + \omega^2 x$$
$$= (-\alpha^2 + 2gi\alpha + \omega^2) C e^{i\alpha t}$$

$$\Rightarrow C = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2 + 2ig\alpha} = \frac{M}{z}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

Eine spezielle Lsg. von (26) ist

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4g^2\alpha^2}} e^{i(\alpha t + \delta)} \quad (31)$$

wobei $e^{i\delta} = \frac{C}{|C|} = \frac{|z|}{z}$ den Winkel $\delta \in (-\pi, \pi]$ festlegt.
 $(-\pi, 0) \Leftrightarrow \operatorname{Im} z > 0$



Um die allg. Lsg. der inh. Dgl. (26) zu erhalten, müssen wir (je nach $g > \omega$, $g = \omega$, $g \in (0, \omega)$) eine der allg. homog. Lsg. (28), (29) bzw (30) hinzuzulagieren.

Im Fall $g \in (0, \frac{\omega}{\sqrt{2}})$ wird die

Amplitude $|C|$ der Lsg. maximal

bei der Amplitudefrequenz

$$\boxed{26-9} \quad \alpha = \sqrt{\omega^2 - 2g^2} \neq \omega$$

Ohne Reibungsterm hat ja die Wahl
 $\alpha = \omega$ die Lsg φ „maximiert“.

[anders als im reibungslosen Fall.]

$$\text{Da } \operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \delta \in (-\pi, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha + \delta < \alpha$$

$\Rightarrow$ Die erzwungene Schwingung mit
Reibung ist gegenüber der Zeitabh.
der äußeren Kraft verzögert.

$$(26) \text{ ist } \ddot{x} + 2g\dot{x} + \omega^2 x = F(t)$$

$$(31) \text{ einsetzen: mit } k = M (\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4g^2 \alpha^2)^{-1/2}$$

$$M e^{i\alpha t} = F(t) = \ddot{x} + 2g\dot{x} + \omega^2 x$$

$$= -k \alpha^2 e^{i(\alpha t + \delta)} + i \alpha 2g k e^{i(\alpha t + \delta)} + \omega^2 k e^{i(\alpha t + \delta)}$$

$$= e^{i(\alpha t + \delta)} M \frac{\omega^2 - \alpha^2 + 2i\alpha g}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4g^2 \alpha^2}}$$

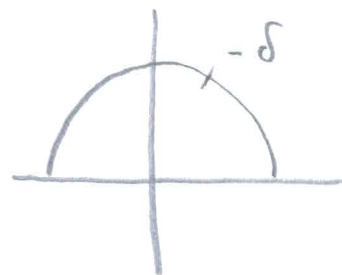
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4g^2 \alpha^2} = \underbrace{(\omega^2 - \alpha^2 + 2i\alpha g)}_{=z} e^{i\delta}$$

$$|\omega^2 - \alpha^2 + 2i\alpha g|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = e^{i\delta} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow z = |z| e^{-i\delta} = \omega^2 - \alpha^2 + 2ig\alpha$$

$$-\delta \in (0, \pi) \Leftrightarrow \delta \in (-\pi, 0)$$



$$\frac{d|z|}{d\alpha} = \left(\frac{d}{d\alpha} c \right) e^{-\delta} + c \frac{d e^{-\delta}}{d\alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

3.3.9 Mehrdimensionale Schwingung

Betrachten Schwingung im n -dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$. Für kleine Auslenkungen ist

$$m \ddot{x} = -m A x \quad (32)$$

gute Beschreibung, wobei m Masse des Massepunktes und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definite Matrix ist. Diese können wir mit einer orthogonalen Matrix U diagonalisieren

$$U^{-1} A U = D := \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad \omega_j > 0 \quad (33)$$

übersetze $\xi := U^{-1} x$ zu

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= U^{-1} \ddot{x} = -U^{-1} A x = -U^{-1} A U \xi \\ &= -D \xi = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \xi_1 \\ \vdots & \\ \omega_n^2 & \xi_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

27-1 also haben wir n entkoppelte Schwingungen gen.

Die allg. Lösung hat Komponenten

$$\xi_j(t) = A_j \sin(\omega(t - c_j)) \quad j=1, \dots, m$$

$$c_j \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen Überlagerung von (harmonischen)
Schwingungen in Richtung der Hauptachsen.
mit Frequenzen ω_j .

Welche Eig. fordern wir vom Volumen?

D.h. dem Lebesgue - Maß.

Quader volumen

Translations & Orthog - Invarianz

Additivität

& σ -Additivität

[Zerlegung, Überdeckung, σ -subadditiv]

(Lebesgue-) messbare Mengen

Eig: Quader bed., σ -Algebra

Eig. des Volumens

& Folgerungen z.B. $A \subset B$ messb.: $\chi(B \setminus A)$
 $= \chi(B) - \chi(A)$

Nullmengen Defn / Eig. / Bsp.

z.B. $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz, $N \subset \mathbb{R}^d$ Nullm. $\Rightarrow f(N)$
auch.

Lebesgue - Integral

messbare Fkt. Dfm. / Kombination von solchen

Bezug zu "stetig"

Approximation durch elementare Fkt.

Dafür ist $\int$ intuitiv klar.

Dfm Integral von $f \geq 0$ messb.



$$\sup_{s \in \mathcal{F}_f(E)} I_E(s) = \int_E f \, \lambda(dx)$$

fast überall $\leftrightarrow$ Nullmengen

Eigenschaften d. (Lebesgue-) Integrals

↳ Konvergenzsätze

Bsp & Gegenbsp.

Lebesgue m ist stetig von unten

parameterabh. Integrale

Cavalieri / Fubini / Tonelli

Berechnung von Volumina

Recht fertigung von $\int \chi(dx, dy) f(x, y)$

$$= \int \chi(dx) \left(\int \chi(dy) f(x, y) \right)$$

Kartesische Produkte, Zylinder, Kegel, ...

Normalbereiche, Bsp.

Transformationen

Diffeomorphismen, Funktionaldeterminante

$$\int_{\varphi(A)} \chi^M(dx) f(x) = \int_A f(\varphi(u)) |\det J_\varphi(u)| \chi^M(du)$$

Vorbereitung für Flächenintegrale

Spezialfälle: φ linear, orthogonal, Translation

Bsp: krummliniges $\square$, Polarkoord, Zylinder, Kugel, Rotationsk., Sektorformel.

Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^2$

2. Art $\int_{\Gamma} \langle v(x), dx \rangle = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$

Eig. von $\begin{matrix} \nearrow & \text{Kurven} \\ \searrow & \text{Vektorfeldern} \\ & \text{k-Integralen} \\ & \text{(insbes. Wohldef.)} \end{matrix}$

Potential ϕ : Dfm. $\text{grad } \phi = v$
Existenz
Kriterien für $\searrow$

v konservativ $\Rightarrow v$ wirbelfrei
 $\Leftarrow$
sternförmig.

Gegen (bsp), Zentralkraftfeld.

Gradient, Divergenz, Laplace.

1. Art $\int_{\Gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$

Def / Eig / Wohldef. / Bezug zu 2. Art / Kurvenlänge
Tangenten / Normalenvektor / Jordanbogen A4

stückweise glatter Rand ∂D , $D \subset \mathbb{R}^2$

Normalenvektor

Innen / Außen $\Rightarrow$ Orientierung

Gauß in $\mathbb{R}^2$

$$\int_D \operatorname{div} v(x,y) \lambda^2(dx,dy)$$

$$= \int_{\partial D} \langle v(x,y), \nu_a(x,y) \rangle ds$$

Green in $\mathbb{R}^2$:

$v: D \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)(x,y) \lambda^2(dx,dy)$$

$$= \int_{\partial D} \langle v(x,y), \tau(x,y) \rangle ds = \int_{\partial D} v(x) \cdot dx$$

1. Art

2. Art

Lokalisierung durch $B_\varepsilon(0) \rightarrow \{0\}$

Flächenformel Bsp: Ellipse

Integrale auf Flächen $\subset \mathbb{R}^3$

reguläres Flächenstück S

Parameterdarst: $\psi: W \rightarrow S$

Rang $J_\psi = 2$, Kartenwechsel α (1-Diffeo.
(später bew))

Bsp:

Funktionsgraphen, Nullstellengebilde (u. U.)

Fläche:

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j \quad \text{mit}$$

2-dim Nullmengen

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\chi^3(W_k))^{2/3} < \varepsilon$$

Ableitungen von ψ : Tangential / Normale Vektoren
Felder

Differenzierbarkeit von S -wertigen Fkt.

Flächenintegral: $\int_S f(x,y,z) d\sigma$ für reguläres FS

Dfm

Wohldef

Motivation.

$$= \int_W f(\psi(u,v)) \|D_u \psi \times D_v \psi(u,v)\| \chi^2(du dv)$$

meßbare

Nullmenge. $\overline{A-6}$

Für Fläche: füge Integrale zusammen
(ist wohldef)

Bsp

gute und schlechte Parametrisierungen

stetig glatt berandetes Gebiet

Gauß in $\mathbb{R}^3$

$$\int_G \operatorname{div} v(x, y, z) \, \lambda^3(dx, dy, dz) = \int_{\partial G} \langle v, \nu_a \rangle \, d\sigma$$

→ Volumenformel Fluß & Divergenz

partielle Integration