Analysis III für Lehramt, WiSe 22/23

Lösungsskizzen für Blatt 10

Aufgabe 1) Idee: Wir lösen die Ungleichung für E, $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$, bzw. die Gleichung für ∂E, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, lokal nach x oder y auf. Dafür benötigen wir eine Fallunterscheidung. Der Schlüssel liegt hierbei in einer geeigneten Wahl des lokalen (ξ, η)-Koordinatensystems.

Sei $q = (q_x, q_y) \in \partial E$, d.h. $q_x^2/a^2 + q_y^2/b^2 = 1$. Dann gilt $|q_x| \leq a$ und $|q_y| \leq b$. Wir unterscheiden drei Fälle: $q_y > 0$, $q_y < 0$ und $q_y = 0$.

Sei zunächst $q_y > 0$. Dann gilt insbesondere $|q_x| < a$. Wir betrachten das Rechteck $R_+ := (-a, a) \times (0, b+1)$ mit $q \in R_+$; die $+1$ bei $b+1$ ist hierbei willkürlich. Man muss nur sicherstellen, dass b im Intervall liegt. Man beachte auch, dass R_+ auf diese Weise sozusagen maximal gewählt wird, so dass wir alle Punkte q mit $q_y > 0$ simultan behandeln können. Wir legen nun das (ξ, η)-Koordinatensystem um q fest, indem wir die Punkte $(x, y) \in R_+$ schreiben als

$$(x, y) = q + \xi(1, 0) + \eta(0, 1) = (q_x + \xi, q_y + \eta), \quad (\xi, \eta) \in R_+ - q, \tag{1}$$

mit $R_+ - q := (-a - q_x, a - q_x) \times (-q_y, b + 1 - q_y)$; $(x, y) = q$ entspricht dann $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Wir definieren $h_q \colon (-a - q_x, a - q_x) \to (-q_y, b + 1 - q_y)$ durch

$$h_q(\xi) := b\sqrt{1 - \frac{(q_x + \xi)^2}{a^2}} - q_y.$$

Es gilt dann $h_q(0) = 0$, und mit (1) sieht man durch Auflösen nach y leicht

$$E \cap R_+ = \{q + \xi(1, 0) + \eta(0, 1) \colon (\xi, \eta) \in R_+ - q,\ \eta < h_q(\xi)\}$$

und

$$(\partial E) \cap R_+ = \{q + \xi(1, 0) + \eta(0, 1) \colon (\xi, \eta) \in R_+ - q,\ \eta = h_q(\xi)\}.$$

Insbesondere parametrisiert $(-a - q_x, a - q_x) \ni \xi \mapsto (q_x + \xi, q_y + h_q(\xi))$ den Teil $(\partial E) \cap R_+$ des Randes ∂E. Gemäß Vorlesung sind dann $\nu(q)$ und $\tau(q)$ gegeben durch

$$\nu(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_q'(0))^2}} \begin{pmatrix} -h_q'(0) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_q'(0))^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -h_q'(0) \end{pmatrix}.$$

Achtung: Die Darstellung für $\nu(q)$ (und dann auch für $\tau(q)$) gilt zunächst nur in der Basis des lokalen (ξ, η)-Koordinatensystems. Der zugehörige Basiswechsel ist hier wegen (1) aber trivial, so dass dies auch schon die tatsächlichen Vektoren im ursprünglichen Koordinatensystem sind. Wir berechnen noch

$$h_q'(\xi) = -\frac{b(q_x + \xi)/a^2}{\sqrt{1 - (q_x + \xi)^2/a^2}}, \quad h_q'(0) = -\frac{b^2 q_x}{a^2 q_y},$$

und erhalten schließlich

$$\nu(q) = \frac{1}{\sqrt{a^4 q_y^2 + b^4 q_x^2}} \begin{pmatrix} b^2 q_x \\ a^2 q_y \end{pmatrix}, \quad \tau(q) = \frac{1}{\sqrt{a^4 q_y^2 + b^4 q_x^2}} \begin{pmatrix} -a^2 q_y \\ b^2 q_x \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Speziell für $q = (0, b)$ gilt

$$\nu((0,b)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau((0,b)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Fall $q_y < 0$ verläuft ähnlich zum Fall $q_y > 0$ unter Verwendung von $R_- := (-a, a) \times (-b-1, 0)$ mit $q \in R_-$. Diesmal wählen wir das (ξ, η)-Koordinatenssystem um q, indem wir $(x, y) \in R_-$ in der Form

$$(x, y) = q + \xi(1, 0) + \eta(0, -1) = (q_x + \xi, q_y - \eta), \quad (\xi, -\eta) \in R_- - q, \tag{3}$$

schreiben. Hierbei ist $(\xi, -\eta) \in R_- - q$ offensichtlich gleichbedeutend mit $(\xi, \eta) \in R_+ - \tilde{q}$, $\tilde{q} = (q_x, -q_y)$; man beachte $-q_y > 0$. Mit der Funktion $h_{\tilde{q}}$ wie im ersten Fall haben wir dann

$$E \cap R_- = \{q + \xi(1, 0) + \eta(0, -1) \colon (\xi, \eta) \in R_+ - \tilde{q},\ \eta < h_{\tilde{q}}(\xi)\}$$

und

$$(\partial E) \cap R_- = \{q + \xi(1, 0) + \eta(0, -1) \colon (\xi, \eta) \in R_+ - \tilde{q},\ \eta = h_{\tilde{q}}(\xi)\},$$

und wir können $\nu(q)$ und $\tau(q)$ wieder über $h'_{\tilde{q}}(0)$ bestimmen. Diesmal müssen wir die Koordinaten des Ergebnisses für $\nu(q)$ jedoch wegen (3) über den Basiswechsel $((1, 0), (0, 1)) \mapsto ((1, 0), (0, -1))$ interpretieren, d.h.

$$\nu(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'_{\tilde{q}}(0))^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h'_{\tilde{q}}(0) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'_{\tilde{q}}(0))^2}} \begin{pmatrix} -h'_{\tilde{q}}(0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

woraus wir gemäß Vorlesung auch

$$\tau(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'_{\tilde{q}}(0))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -h'_{\tilde{q}}(0) \end{pmatrix}.$$

erhalten. Mit

$$h'_{\tilde{q}}(0) = \frac{b^2 q_x}{a^2 q_y}$$

resultiert dies schließlich in *denselben* Formel für $\nu(q)$ und $\tau(q)$ wie in (2). Speziell für $q = (0, -b)$ haben wir

$$\nu((0,-b)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tau((0,-b)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $q_y = 0$ gilt entweder $q_x = a > 0$ oder $q_x = -a < 0$. Wir können die Rollen der Koordinaten q_x und q_y vertauschen (bzw. das Koordinatensystem um $90°$ drehen) und so auf die beiden vorherigen Fälle durch einen geeigneten Basiswechsel reduzieren. Genauer stellen wir die Punkte (x, y) in der Form

$$(x, y) = q + \xi(0, 1) + \eta(1, 0) \qquad (\text{für } q_x > 0)$$

bzw.

$$(x, y) = q + \xi(0, 1) + \eta(-1, 0) \qquad (\text{für } q_x < 0)$$

dar und lösen $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$ und $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ nach x auf. Mit Hilfe der finalen Basiswechsel

$$((1, 0), (0, 1)) \mapsto ((0, 1), (1, 0)) \quad \text{bzw.} \quad ((1, 0), (0, 1)) \mapsto ((0, 1), (-1, 0))$$

erhalten wir dann analog zu den obigen Fällen

$$\nu(\pm a, 0) = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau(\pm a, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

was erneut konsistent zu den Formeln (2) ist. Insgesamt stellen also (2) geschlossene Formeln für $\nu(q)$ und $\tau(q)$ für alle $q \in \partial E$ dar.

Speziell für die beiden gefragten konkreten Punkte (Fall $q_y > 0$) erhalten wir

$$\nu(\pm a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} \pm b \\ a \end{pmatrix}, \quad \tau(\pm a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \\ \pm b \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Moralisch legt die Wahl des (ξ, η)-Koordinatensystem mit der Bedingung $\eta < h_q(\xi)$ fest, wo „Innen" ist, und dann umgekehrt auch wo „Außen" ist. Obiges Vorgehen ist im konkreten Fall natürlich umständlich und lästig. Effizienter ist Folgendes: Für $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$ gilt $E = F^{-1}((-\infty, 1))$ und $\partial E = F^{-1}(\{1\})$. Für $q \in \partial E$ ist der Gradient $\nabla F(q)$ ungleich 0 und steht dann senkrecht auf der Niveaumenge $F^{-1}(\{1\})$ im Punkt q (d.h. senkrecht auf den Tangentenvektoren; Kettenregel mit Parametrisierung!). Ferner zeigt $\nabla F(q)$ nach Analysis II in die Richtung des steilsten Anstiegs, hier also von E weg. Damit zeigt $\nabla F(q)$ also in die Richtung des äußeren Normalenvektors und muss nur noch normiert werden,

$$\nu(q) = \frac{\nabla F(q)}{\|\nabla F(q)\|},$$

vgl. Bespiel 2.3.8 (a) der Vorlesung.

Aufgabe 2) Die Ellipse E ist ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand (vgl. Aufgabe 1). Ferner ist v offensichtlich stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$, da beide Komponentenfunktionen von v aus stetig differenzierbaren (sogar polynomiellen) Funktionen zusammengesetzt sind. Insbesondere ist $\operatorname{div} v$ auf E stetig und beschränkt und somit integrierbar. Mit dem Integralsatz von Gauß gilt also

$$\int_{\partial E} \langle v(x, y), \nu(x, y) \rangle \,\mathrm{d}s = \int_E \operatorname{div} v(x, y) \,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Letzteres können wir wie bisher berechnen, vgl. etwa Aufgabe 2 von Blatt 7. Schreiben wir $v = (v_1, v_2)$, so gilt

$$\operatorname{div} v(x,y) = D_1 v_1(x,y) + D_2 v_2(x,y) = 6xy + 3y^2.$$

Nun gilt $E = \psi(B_1(0))$, wobei die Transformation $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch $\psi(u,v) := (u, 2v)$. Wegen $\det \psi(u,v) = 2$ folgt mit der Transformationsformel dann

$$\int_E (6xy + 3y^2)\,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 24 \int_{B_1(0)} (uv + v^2)\,\lambda^2(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$$

Schließlich erhalten wir mit einer Transformation auf Polarkoordinaten

$$\int_{B_1(0)} (uv + v^2)\,\lambda^2(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) = \int_0^1 \mathrm{d}r\, r^3 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,(\cos\varphi \sin\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{\pi}{4}.$$

Insgesamt gilt also

$$\int_{\partial E} \langle v(x,y), \nu(x,y)\rangle\,\mathrm{d}s = 24 \cdot \frac{\pi}{4} = 6\pi.$$

Bemerkung: Mit einer Parametrisierung des Randes ∂E und einer Darstellung des äußeren Normaleneinheitsvektorfeldes ν (vgl. Aufgabe 1) kann man das Integral natürlich auch direkt als Kurvenintegral berechnen.

Aufgabe 3) Unter den gegebenen Voraussetzungen an G besagt der Integralsatz von Green insbesondere: Sei das Vektorfeld $v = (v_1, v_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $D_1 v_2 - D_2 v_1 \in \mathscr{L}(G)$, und sei ∂G durch das Tangentialeinheitsvektorfeld τ positiv orientiert. Dann gilt

$$\int_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_{\partial G} \langle v(x,y), \tau(x,y)\rangle\,\mathrm{d}s.$$

Ist dabei $\gamma\colon [a,b] \to \partial G \subset \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Parameterdarstellung für die den Rand beschreibende Jordankurve, so gilt stets

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

so dass

$$\int_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Wir zeigen die Aussagen der Aufgabe nun indem wir in (4) spezielle Wahlen für v treffen. Wir erinnern dabei an die Schreibweise $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$.

(a). Mit $v(x,y) = (0, x)$ gilt $D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) = 1$ und wegen (4) dann

$$\lambda^2(G) = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_a^b \gamma_x(t)\gamma_y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Analog folgt mit $v(x,y) = (-y, 0)$ ebenso $D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) = 1$ und

$$\lambda^2(G) = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = -\int_a^b \gamma_y(t)\gamma_x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung: Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir wieder die Flächenformel

$$\lambda^2(G) = \frac{1}{2}\int_a^b \big(\gamma_x(t)\gamma_y'(t) - \gamma_y(t)\gamma_x'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

(b). Diesmal wählen wir $v(x,y) = (0, x^2/2)$ mit $D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) = x$ und erhalten

$$\int_G x\,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma_x^2(t)\gamma_y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dies zeigt die behauptete Darstellung für S_x. Analog erhalten wir die Darstellung für S_y mit der Wahl $v(x,y) = (-y^2/2, 0)$ wegen

$$\int_G y\,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_a^b \gamma_y^2(t)\gamma_x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 4) Der Rotationskörper R_U hat die Darstellung

$$R_U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in U\big\}. \tag{5}$$

Wir betrachten nun die Transformation $\psi\colon (-\pi,\pi) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(\varphi, x, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ x\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann ist ψ injektiv und stetig differenzierbar mit $|\det J_\psi(\varphi,x,z)| = x > 0$. Damit ist $\psi\colon (-\pi,\pi)\times(0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathrm{Bild}(\psi)$ also ein Diffeomorphismus; durch Invertieren der Polarkoordinaten kann man die Inverse sogar explizit bestimmen. Wegen

$$R_U \setminus \mathrm{Bild}(\psi) \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0,\ x \le 0\}$$

ist ferner $R_U \setminus \mathrm{Bild}(\psi)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^3$. Mit Hilfe der Transformationsformel, der Darstellung (5) und Fubini erhalten wir also

$$\begin{aligned} \lambda^3(R_U) &= \lambda^3(\psi((-\pi,\pi)\times U)) \\ &= \int_{(-\pi,\pi)\times U} x\,\lambda^3(\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}x, \mathrm{d}z) \\ &= 2\pi \int_U x\,\lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}z) = \lambda^2(U)\cdot 2\pi S_x. \end{aligned}$$

Speziell für den Volltorus aus Aufgabe 3 von Blatt 7 gilt $T = R_U$, wobei U die Kreisfläche in der x-z-Ebene vom Radius 1 um den Punkt $(2, 0, 0)$ beschreibt. In diesem Fall gilt daher $\lambda^2(U) = \pi$ und man berechnet $S_x = 2$. Wir erhalten mit der Guldinschen Regel daher

$$\lambda^3(T) = \pi \cdot (2\pi \cdot 2) = 4\pi^2,$$

was natürlich mit dem damals ermittelten Wert übereinstimmt.

Bemerkung: Der Schwerpunkt einer Kreisfläche ist stets der Mittelpunkt des Kreises, denn es gilt aus Symmetriegründen

$$\int_{B_1(0)} x \, \lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 0 = \int_{B_1(0)} y \, \lambda^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Letzteres lässt sich alternativ natürlich auch explizit z.B. mit Hilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten nachweisen. Durch Translation und Streckung lässt sich diese Aussage natürlich auch auf alle Kreisflächen ausdehnen.