

Bei der Illustration von 2-dimensionalen Nullmengen, vgl. (2) im Dfm 2.3.3, nach Bsp. 2.3.4 sind wir um genau vor gegangen, das halb schauen wir das nochmal genauer an

Für ein Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ suchen wir nach einer Folge von Würfeln $W_1, W_2, \dots \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $S \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$. An

dieser Stelle ist es wichtig, dass alle W_k echte Würfel sind, d.h. von der

Form

$$W_k = x_k + [0, a_k]^3$$

$$(6) \quad = \left\{ y_k \mid y_k = x_k + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 0 \leq b_i \leq a_k \\ 1 \leq i \leq 3 \end{matrix} \right\},$$

s. d. insbesondere alle drei Seiten gleich

lang sind und für das 3-dim Lebesgue-

Maß gilt $\lambda^3(W_k) = a_k^3$. Dann gilt für

19-1 Im (6) ist es egal, ob W_k offen, halboffen o. abgeschl. ist.

den Durchmesser:

$$\begin{aligned} \text{diam } W_k &= \sup \{ \|x-y\| \mid x, y \in W_k \} \\ &= \sqrt{3} a_k = \sqrt{3} [\lambda^3(W_k)]^{1/3} \end{aligned}$$

Falls wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche Würfel

Folge mit $S \subset \bigcup W_k$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda^3(W_k)]^{2/3} < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{3} (\text{diam } W_k)^2 \sim \text{Fläche eines 2-dim Schnitts durch } W_k$$

existiert, so heißt S eine 2-dim Nullmenge.

Beachte: Die Fläche jedes Schnittes $W_k \cap V$ für eine affine Ebene $V \subset \mathbb{R}^3$ ist höchstens $(\text{diam } W_k)^2$

Dies illustriert, warum die Potenz $2/3$ auftritt.

Nun betrachten wir noch mal sorgfältiger Überdeckungen der Kante

$$K = \{ (x_1, 1, 1) \mid x_1 \in [-1, 1] \} \subset \partial W \subset \mathbb{R}^3$$

und der Seitenfläche

$$S = \{ (x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in [-1, 1] \} \subset \partial W \subset \mathbb{R}^3$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$

$$\delta := \frac{2}{N} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2N = \frac{4}{\delta}$$

Definiere Würfel $W_{-N}, W_{-N+1}, \dots, W_{N-1}$ mit

$$W_h = \begin{pmatrix} h/N \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left([0, \delta/2] \times [0, \delta/2] \times [0, \delta/2] \right)$$

Dann:

$$\bigcup_{h=-N}^{N-1} W_h = [-1, 1] \times [0, \delta/2] \times [0, \delta/2]$$

$$\sum_{k=-N}^{N-1} \underbrace{\left[\lambda^3(W_k) \right]^{2/3}}_{= (\delta/2)^3} = 2N \cdot \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 = \frac{4}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{4} = \delta < \varepsilon$$

wie gewünscht in (2). $\Rightarrow$ k ist 2-dim Nullmenge.

Versuchen wir analoges Vorgehen bei der

19.3 Seitenfläche S .

Defn Würfel

$$W_{h,l} = \begin{pmatrix} h/N \\ l/N \\ 1 \end{pmatrix} + [0, \delta/2]^3$$

$$h, l \in \{-N, \dots, N-1\} =: I \Rightarrow \#I = 2N$$

$$\Rightarrow \bigcup_{h,l \in I} W_{h,l} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, \delta/2]$$

$$\sum_{h,l \in I} \left[\underbrace{\lambda^3(W_{h,l})}_{\left(\frac{\delta}{2}\right)^3} \right]^{3/2} = 4N^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{\delta}\right)^2 \frac{\delta^2}{4} = 4$$

$\Rightarrow$ Die δ -Abhängigkeit hebt sich raus, spielt keine Rolle

$\Rightarrow$ Egal wie klein wir die Würfel wählen, der Ausdruck in (2) kann nicht bel. verkleinert werden.