$$s(\varrho) = (s_1, s_2, s_3) \text{ mit}$$

$$s_k = \frac{1}{\lambda^3(M)} \int_M \lambda^3(dx)\, x_k$$

1.5 Transformationsformel

ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel in mehreren Dimensionen. Die kreisfläche lässt sich nicht so einfach im kartesischen koordinaten $x, y \in \mathbb{R}$ berechnen, wohl aber, nach einer Substitution in Polarkoordinaten

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

<u>Dfn 1.5.</u> Seien $U, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\psi : U \to D$ bijektiv. ψ heißt <u>$C1$-Diffeomorphismus</u> (oder <u>koordinatentransformation</u>) falls $\Phi : U \to D$ und $\Phi^{-1} : D \to U$ stetig diffbar sind.

8-11

Nach Dfn gilt $Id = \varphi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$

und $J_{Id} = Id$ Matrizen

„beste lineare Approx. von Id ist Id selbst"

$D(Id) = Id$ lin Abb.

mehr dim Kettenregel:

$$Id = J_{Id}(u) = J_{\varphi^{-1} \circ \varphi}(u)$$
$$= J_{\varphi^{-1}}(\varphi(u)) \, J_\varphi(u)$$

$\Rightarrow$ $J_\varphi(u)^{-1} = J_{\varphi^{-1}}(\varphi(u))$ ex. für alle $u \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ $J_\varphi(u)$ invertierbar und $\det J_\varphi(u) \neq 0$

letztere nennt man <u>Funktionaldeterminante</u>

<u>S. 1.5.2 Transformationssatz</u>

Seien $\mathcal{U}, W, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete, $A \subset \mathbb{R}^n$ messb. mit $W \supset A \supset \mathcal{U}$ und $\lambda^n(A \setminus \mathcal{U}) = 0$. Sei $\varphi \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi : \mathcal{U} \to D = \varphi(\mathcal{U})$ C^1-Diffeomorphismus.

Im einfachsten Fall $W = A = U \subset \mathbb{R}^M$ und

$\phi : U \to D = \phi(U)$ C^1- Diffeom.

Für eine Fkt. $f : \phi(A) \to \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) $f \in \mathcal{L}(\phi(A))$

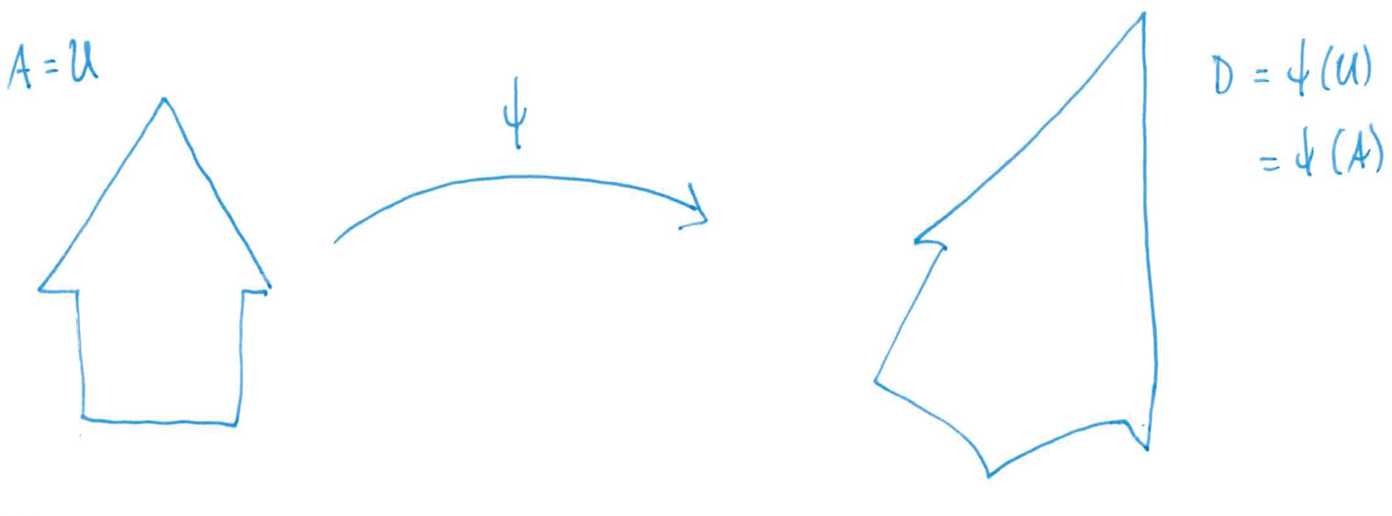
(ii) $(f \circ \phi) \, |\det J_\phi| \in \mathcal{L}(A)$

Ist eine / beide der Bed. erfüllt, so gilt auch:

$$\int_{\phi(A)} f(x) \, \lambda^M(dx) = \int_A f(\phi(u)) \, |\det J_\phi(u)| \, \lambda^M(du)$$

Insbes. für $f \equiv 1$:

$$\lambda^M(\phi(A)) = \int_{\phi(A)} 1 \, \lambda^M = \int_A |\det J_\phi(u)| \, \lambda^M(du)$$

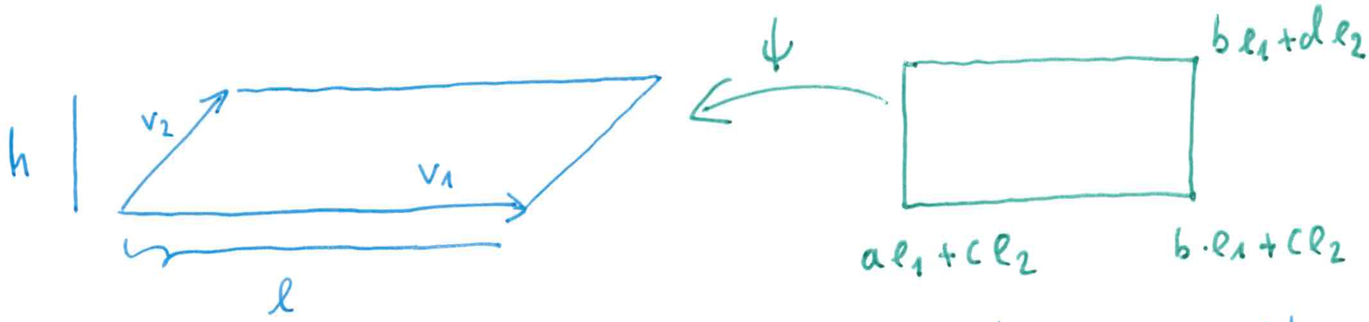


Bw-Ideen im $\mathbb{R}^2$

Sei $A = [a,b] \times [c,d]$ Rechteck

Ist ϕ linear oder affin-linear, so ist

$\phi(A)$ ein Parallelogramm:

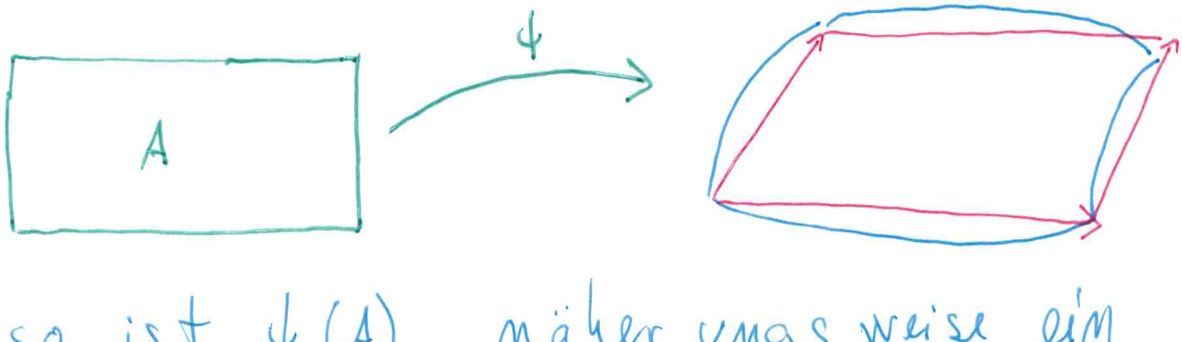


mit Volumen $\lambda^2(\phi(A)) = l \cdot h = |\det(v_1, v_2)|$

$$= |\det(J_\phi((b-a)e_1, (d-c)e_2))|$$

$$\overset{\text{multi lin.}}{=} |\det J_\phi| \underbrace{(b-a)\cdot(d-c)}_{\lambda^2(A)} \qquad J_\phi = \phi \text{ da } \phi \text{ linear}$$

Wir sehen schon mal, wie die Determinante auftaucht. Ist ϕ nicht linear aber C^1-Diffeomorphismus

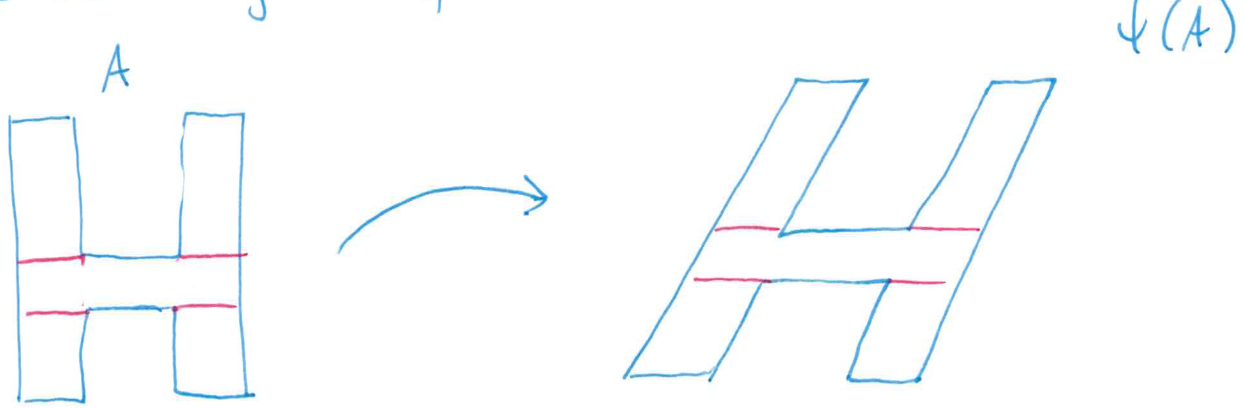


$\boxed{9-3}$ so ist $\phi(A)$ näherungsweise ein

Parallelogramm. Der Näherungsfehler ist umso kleiner, je kleiner das Rechteck ist, denn φ ist C^1, also wird über kleine Distanzen φ gut durch $D\varphi$ bzw J_φ approximiert

---

Ist φ linear und A endl. Vereinigung von Rechtecken, so gilt wegen der Additivität des Lebesgue maßes.



weiterhin:

$$\lambda^2(\varphi(A)) = |\det \varphi| \; \lambda^2(A)$$

Beides motiviert, dass es günstig ist, A in kleine Rechtecke zu zerlegen, darauf die Transformationsformel anzuwenden

9-4

– dabei darf dann ψ durch $J\psi$ mit kleinem Fehler approximiert werden – und danach die Beiträge über die Zerlegung zu addieren.

Im Folgenden beschränken wir uns wieder auf ein Rechteck $A = [a,b] \times [c,d]$ und zerlegen es

$Z_1 = \{u_0, u_1, \dots, u_r\}$ Zerlegung von $[a,b]$

$Z_2 = \{v_0, \quad v_s\}$ 〃 $[c,d]$

Rechtecke $R_{j,k} = [u_{j-1}, u_j] \times [v_{k-1}, v_k]$

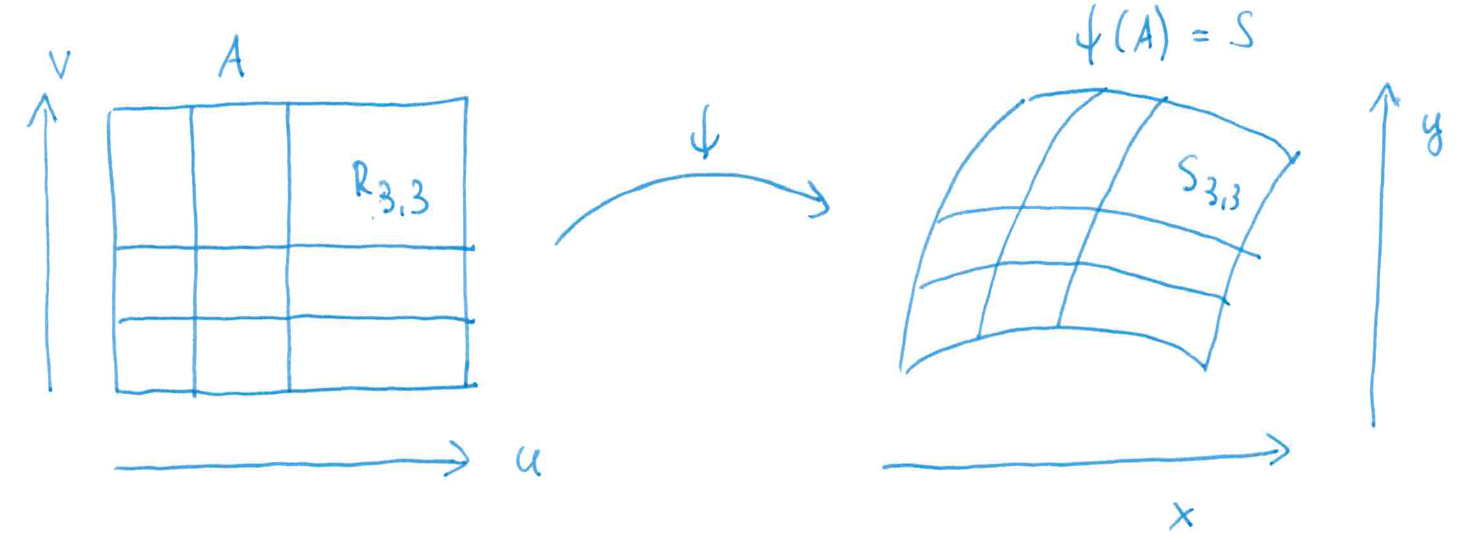
(jeweils mit rechter oberer Ecke (u_j, v_k))

bilden Zerlegung von A

Setze $S_{j,k} = \psi(R_{j,k})$ & $(x_j, y_k) = \psi(u_j, v_k)$

Wir fassen die „neuen" x-y Koordinaten als Komponenten von ψ auf:

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} := \psi(u,v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u,v) \\ \psi_2(u,v) \end{pmatrix} \in \psi(A) \subset \mathbb{R}^2$$



Zumindest für stetige $f : S \to \mathbb{R}$ ist die Approximation

$$\int_S f(x,y)\,\lambda(dx,dy) \approx \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \underbrace{f(x_{j-1}, y_{k-1})}_{\text{Wert in einem Eckp. von } S_{j,k}} \overbrace{\lambda^2(S_{j,k})}^{\text{Volumen d. deformierten R.}}$$

intuitiv.

Das Volumen $\lambda^2(S_{j,k})$ berechnen bzw approx. wir wie oben. Da ψ jetzt nicht mehr linear ist verwenden wir die Näherungen

$$w_1 = \psi(u_j, v_{k-1}) - \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \sim D_1\psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \cdot (u_j - u_{j-1})$$

$$w_2 = \psi(u_{j-1}, v_k) - \psi(u_{j-1}, v_{k-1}) \sim (D_2\psi(u_{j-1}, v_{k-1})) \cdot (v_k - v_{k-1})$$

Diese sind motiviert durch den Mittelwertsatz und durch $\phi \in C^1$.

$\Rightarrow \lambda^2(S_{jk}) \sim \lambda^2($ von w_1, w_2 aufgesp. Parallelogr$)$

$$\sim \Big|\det\big(D_1\phi(u_{j-1}, v_{k-1})\cdot(u_j - u_{j-1}),\; D_2\phi(u_{j-1}, v_{k-1})(v_k - v_{k-1})\big)$$

$$\overset{\text{multi}}{\underset{\text{linear}}{=}} \underbrace{(u_j - u_{j-1})(v_k - v_{k-1})}_{=\lambda^2(R_{jk})} \left|\det D\phi(u_{j-1}, v_{k-1})\right|$$

Also zusammen

$$\int_S f(x,y)\,\lambda^2(dx,dy) \sim \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} f(x_{j-1}, y_{k-1})\,\lambda^2(S_{jk})$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} f(\phi(u_{j-1}, v_{k-1}))\,\left|\det D\phi(u_{j-1}, v_{k-1})\right|\lambda^2(R_{jk})$$

$$\sim \int_A f(\phi(u,v))\,\left|\det D(u,v)\right|\,\lambda^2(du,dv)$$

$\blacksquare$

Kor. 1.5.3 (a)

Ist $\tau_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x+c$ Translation

und $\phi = \tau_c$, so ist $D\phi = D\tau_c = Id$

insbes $\det \phi'(u) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \lambda^n(\tau_c(A)) = \lambda^n(A)$ für alle messb. $A \subset \mathbb{R}^n$

und alle $c \in \mathbb{R}^n$.

„Translationsinv. des Lebesguemaßes"

und

$$\int_{\tau_c(A)} f(x)\,\lambda^n(dx) = \int_A f(u+c)\,\lambda^n(du)$$

Kurzschreibweise $A+c = \tau_c(A)$

(b)

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und B zugeh. $n \times n$

Matrix. Damn ist für alle $u \in \mathbb{R}^n$:

$DL(u) = L(u)$ und $\det(DL) = \det(B)$

insbes für jedes messb. $A \subset \mathbb{R}^n$

 $\lambda^n(L(A)) = |\det B|\,\lambda^n(A)$

Ist L sogar orthogonal, so ist

$$|\det DL(u)| = 1 \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^n,$$

also $\quad \lambda^n(L(A)) = \lambda^n(A)$

„Lebesguemaß ist invariant unter orthog. Abb,
insbes Spiegelungen und Drehungen"

c) Für $r > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ setze

$$rA = \{ rx \mid x \in A \}$$

Ist A messbar, so auch rA und

$$\lambda^n(rA) = r^n \lambda^n(A)$$

und

$$\int_{rA} f(x)\, \lambda^n(dx) = \int_A f(ru)\, r^n\, \lambda^n(du)$$

denn für $\varphi(x) = r \cdot x$ gilt

$$D\varphi(x) = r\,\mathrm{Id} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \text{ also}$$

$$\det D\varphi(x) = r^n, \quad \text{da } r\,\mathrm{Id} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & r \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}}$$

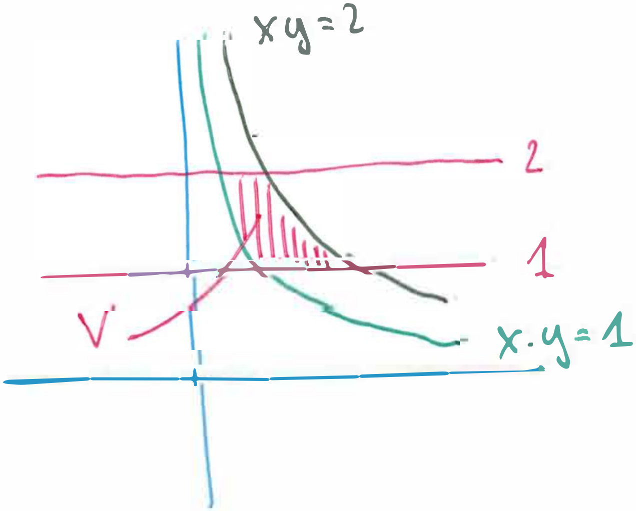
9-9 Spezialfall vom allg. Teil von b)

Diese Eig. haben wir im Vorgriff bereits bei der Berechnung des Kugelvolumens benutzt

Für $B_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r \}$ gilt

$$\lambda^n(B_r) = r^n \lambda^n(B_1) = r^n \omega_n .$$

Bsp. 1.5.4 Krummliniges Viereck



Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ berandet durch:

$$\{(x,y) \mid y=1\}, \quad \{y=2\}$$

$$\{xy=1\}, \quad \{xy=2\}$$

Berechne: $\int_V xy^2 \, \lambda^2(dx,dy)$